

Inferenzmethoden

Einheit 2

Verdichtung des logischen Schließens I Tableauxkalküle



1. Verdichtung als Entwicklungsprinzip
2. Tableauxbeweise
3. Korrektheit und Vollständigkeit
4. Zusammenhang zu Sequenzenkalkülen

SEQUENZENKALKÜLE SIND INEFFIZIENT

- Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur

orL *i* $\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C$

$\Gamma, A, \Delta \vdash C$

$\Gamma, B, \Delta \vdash C$

$\Gamma \vdash A \wedge B$ andR

$\Gamma \vdash A$

$\Gamma \vdash B$

SEQUENZENKALKÜLE SIND INEFFIZIENT

- Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur

$$\begin{array}{ll} \text{orL } i & \Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C \\ & \Gamma, A, \Delta \vdash C \\ & \Gamma, B, \Delta \vdash C \\ & \Gamma \vdash A \wedge B \quad \text{andR} \\ & \Gamma \vdash A \\ & \Gamma \vdash B \end{array}$$

- Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen

SEQUENZENKALKÜLE SIND INEFFIZIENT

- Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur

$$\begin{array}{ccc} \text{orL } i & \Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \wedge B \text{ andR} \\ & \Gamma, A, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \\ & \Gamma, B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash B \end{array}$$

– Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen

- Sequenzenbeweise enthalten viel Redundanz

– Jeder Knoten enthält alle gültigen Annahmen und die Konklusion
– Regeln zerlegen und kopieren Syntaxbaum von Formeln

SEQUENZENKALKÜLE SIND INEFFIZIENT

- Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur

$$\begin{array}{ccc} \text{orL } i & \Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \wedge B \quad \text{andR} \\ & \Gamma, A, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \\ & \Gamma, B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash B \end{array}$$

– Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen

- Sequenzenbeweise enthalten viel Redundanz

- Jeder Knoten enthält alle gültigen Annahmen und die Konklusion
- Regeln zerlegen und kopieren Syntaxbaum von Formeln
- Kalkül sollte direkt auf Syntaxbaum operieren

SEQUENZENKALKÜLE SIND INEFFIZIENT

- **Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur**

$$\begin{array}{ccc} \text{orL } i & \Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \wedge B \quad \text{andR} \\ & \Gamma, A, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \\ & \Gamma, B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash B \end{array}$$

- Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen

- **Sequenzenbeweise enthalten viel Redundanz**

- Jeder Knoten enthält alle gültigen Annahmen und die Konklusion
- Regeln zerlegen und kopieren Syntaxbaum von Formeln
- Kalkül sollte direkt auf Syntaxbaum operieren

- **Beweissuche erfordert Vorausschau**

- Inferenzregeln basieren auf Konnektiven und Quantoren
 - Welche Hypothese soll zerlegt werden?
 - Welcher Teil einer Disjunktion soll gezeigt werden?
 - Welche Substitution soll bei Quantorenzerlegung benutzt werden?
- Auswahl hat Anwendbarkeit der Regel **hypothesis** zum Ziel

SEQUENZENKALKÜLE SIND INEFFIZIENT

- **Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur**

$$\begin{array}{ccc} \text{orL } i & \Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \wedge B \quad \text{andR} \\ & \Gamma, A, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \\ & \Gamma, B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash B \end{array}$$

- Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen

- **Sequenzbeweise enthalten viel Redundanz**

- Jeder Knoten enthält alle gültigen Annahmen und die Konklusion
- Regeln zerlegen und kopieren Syntaxbaum von Formeln
- Kalkül sollte direkt auf Syntaxbaum operieren

- **Beweissuche erfordert Vorausschau**

- Inferenzregeln basieren auf Konnektiven und Quantoren
 - Welche Hypothese soll zerlegt werden?
 - Welcher Teil einer Disjunktion soll gezeigt werden?
 - Welche Substitution soll bei Quantorenzerlegung benutzt werden?
- Auswahl hat Anwendbarkeit der Regel **hypothesis** zum Ziel
- Beweisuche sollte auf möglichem Abschluß von Beweisästen basieren

VERDICHUNG VON BEWEISMETHODEN

Entferne Redundanz aus mathematischen Beweisen

VERDICHTUNG VON BEWEISMETHODEN

Entferne Redundanz aus mathematischen Beweisen

- **Formale Logik**

- Repräsentation mathematischer Aussagen in präziser Sprache



Entferne Redundanz aus mathematischen Beweisen

- **Formale Logik**

- Repräsentation mathematischer Aussagen in präziser Sprache



- **Kalküle des natürlichen Schließens**

- Schematische Inferenzfiguren für logische Konnektive



Entferne Redundanz aus mathematischen Beweisen

- **Formale Logik**

- Repräsentation mathematischer Aussagen in präziser Sprache



- **Kalküle des natürlichen Schließens**

- Schematische Inferenzfiguren für logische Konnektive



- **Sequenzkalküle**

- Lokale Verwaltung von Annahmen vereinfacht Anwendung von Regeln
 - Analytische Formulierung unterstützt Beweissuche



Entferne Redundanz aus mathematischen Beweisen

- **Formale Logik**

- Repräsentation mathematischer Aussagen in präziser Sprache



- **Kalküle des natürlichen Schließens**

- Schematische Inferenzfiguren für logische Konnektive



- **Sequenzkalküle**

- Lokale Verwaltung von Annahmen vereinfacht Anwendung von Regeln
 - Analytische Formulierung unterstützt Beweissuche



- **Tableaux-Kalküle**

- Zusammenfassung strukturell gleichartiger Inferenzregeln in Klassen

Entferne Redundanz aus mathematischen Beweisen

- **Formale Logik**

- Repräsentation mathematischer Aussagen in **präziser Sprache**



- **Kalküle des natürlichen Schließens**

- Schematische Inferenzfiguren für logische Konnektive



- **Sequenzkalküle**

- Lokale Verwaltung von Annahmen vereinfacht Anwendung von Regeln
- Analytische Formulierung unterstützt Beweissuche



- **Tableaux-Kalküle**

- Zusammenfassung strukturell gleichartiger Inferenzregeln in Klassen

- **Matrix-Kalküle**

- Kompakte Beweisrepräsentation durch Beweisführung im Formelbaum
- Gezielte Auswahl beweisrelevanter Teilformeln durch Konnektionen
- Gezielte Instantiierung von Quantoren durch Unifikation

TABLEAUX-KALKÜLE

Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen** repräsentieren Sequenzen
 - **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
 - Keine strukturellen Regeln erforderlich

Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen** repräsentieren Sequenzen
 - **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
 - Keine strukturellen Regeln erforderlich
- Regeln gruppiert in **Klassen ähnlicher Struktur**

Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen** repräsentieren Sequenzen
 - **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
 - Keine strukturellen Regeln erforderlich
- Regeln gruppiert in **Klassen ähnlicher Struktur**
 - **andL** und **orR**: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ α**

Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen** repräsentieren Sequenzen
 - **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
 - Keine strukturellen Regeln erforderlich
- Regeln gruppiert in **Klassen ähnlicher Struktur**
 - **andL** und **orR**: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ α**
 - **andR** und **orL**: Dekomposition verzweigt Beweis **Typ β**

Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen** repräsentieren Sequenzen

- **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
- **Keine strukturellen Regeln** erforderlich

- **Regeln** gruppiert in **Klassen ähnlicher Struktur**

- **andL** und **orR**: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ α**
- **andR** und **orL**: Dekomposition verzweigt Beweis **Typ β**
- **allL** und **exR**: Dekomposition instantiiert Variable mit Term **Typ γ**

Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen** repräsentieren Sequenzen

- **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
- **Keine strukturellen Regeln** erforderlich

- **Regeln** gruppiert in **Klassen ähnlicher Struktur**

- **andL** und **orR**: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ α**
- **andR** und **orL**: Dekomposition verzweigt Beweis **Typ β**
- **allL** und **exR**: Dekomposition instantiiert Variable mit Term **Typ γ**
- **allR** und **exL**: Dekomposition deklariert neue Variable **Typ δ**

Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen** repräsentieren Sequenzen
 - **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
 - Keine strukturellen Regeln erforderlich
- Regeln gruppiert in **Klassen ähnlicher Struktur**
 - **andL** und **orR**: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ α**
 - **andR** und **orL**: Dekomposition verzweigt Beweis **Typ β**
 - **allL** und **exR**: Dekomposition instantiiert Variable mit Term **Typ γ**
 - **allR** und **exL**: Dekomposition deklariert neue Variable **Typ δ**
- **Komplementarität** ersetzt hypothesis Regel
 - Gleiche Formeln mit verschiedener Polarität schließen Beweisast ab

Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen** repräsentieren Sequenzen

- **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
- Keine strukturellen Regeln erforderlich

- **Regeln** gruppiert in **Klassen ähnlicher Struktur**

- **andL** und **orR**: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ α**
- **andR** und **orL**: Dekomposition verzweigt Beweis **Typ β**
- **allL** und **exR**: Dekomposition instantiiert Variable mit Term **Typ γ**
- **allR** und **exL**: Dekomposition deklariert neue Variable **Typ δ**

- **Komplementarität** ersetzt hypothesis Regel

- Gleiche Formeln mit verschiedener Polarität schließen Beweisast ab

- **Effizientere Beweisführung**

- Weniger Regeln – Komplementaritätstest etwas schwerer für Menschen

TABLEAUXKALKÜL HISTORISCH

Unabhängig vom Sequenzenkalkül entstanden

Unabhängig vom Sequenzenkalkül entstanden

- **Begründung über indirekte Beweisführung**

- Statt $\vdash F$ beweise, daß $\neg F$ nicht gelten kann
- Zeige, daß alle möglichen Konsequenzen von $\neg F$ zum Widerspruch führen

Unabhängig vom Sequenzenkalkül entstanden

● Begründung über indirekte Beweisführung

- Statt $\vdash F$ beweise, daß $\neg F$ nicht gelten kann
- Zeige, daß alle möglichen Konsequenzen von $\neg F$ zum Widerspruch führen

● Regeln beschreiben logische Gesetze

- Wenn $\neg X$ wahr ist, dann ist X falsch
- Wenn $\neg X$ falsch ist, dann ist X wahr
- Wenn $X \wedge Y$ wahr ist, dann sind X und Y wahr
- Wenn $X \vee Y$ falsch ist, dann sind X und Y falsch
- Wenn $X \Rightarrow Y$ falsch ist, dann ist X wahr und Y falsch
- Wenn $X \wedge Y$ falsch ist, dann ist X falsch oder Y falsch
- Wenn $X \vee Y$ wahr ist, dann ist X wahr oder Y wahr
- Wenn $X \Rightarrow Y$ wahr ist, dann ist X falsch oder Y wahr

Unabhängig vom Sequenzenkalkül entstanden

● Begründung über indirekte Beweisführung

- Statt $\vdash F$ beweise, daß $\neg F$ nicht gelten kann
- Zeige, daß alle möglichen Konsequenzen von $\neg F$ zum Widerspruch führen

● Regeln beschreiben logische Gesetze

- Wenn $\neg X^T$, dann X^F
- Wenn $\neg X^F$, dann X^T
- Wenn $X \wedge Y^T$, dann X^T und Y^T
- Wenn $X \vee Y^F$, dann X^F und Y^F
- Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann X^T und Y^F
- Wenn $X \wedge Y^F$, dann X^F oder Y^F
- Wenn $X \vee Y^T$, dann X^T oder Y^T
- Wenn $X \Rightarrow Y^T$, dann X^F oder Y^T

● Polarität verkürzt Schreibweise

- $X^T \hat{=} X$ ist wahr, $X^F \hat{=} X$ ist falsch

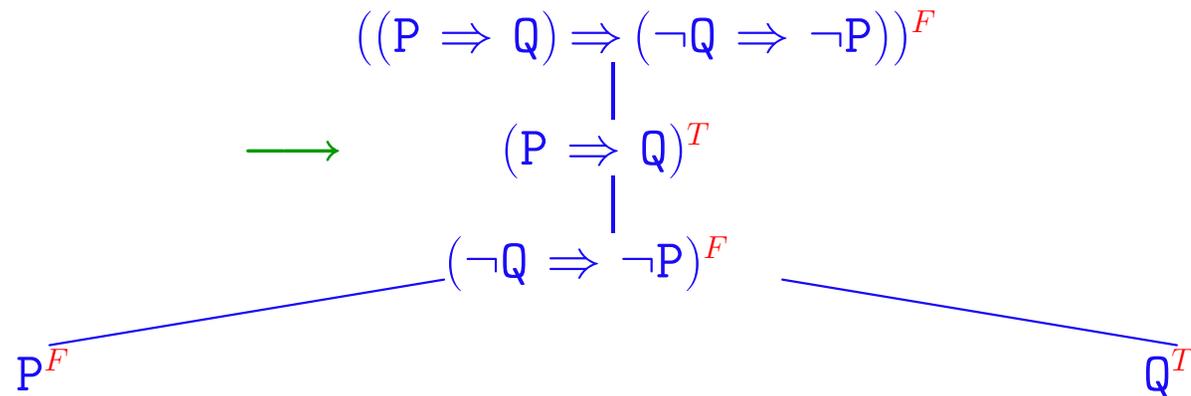
TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$

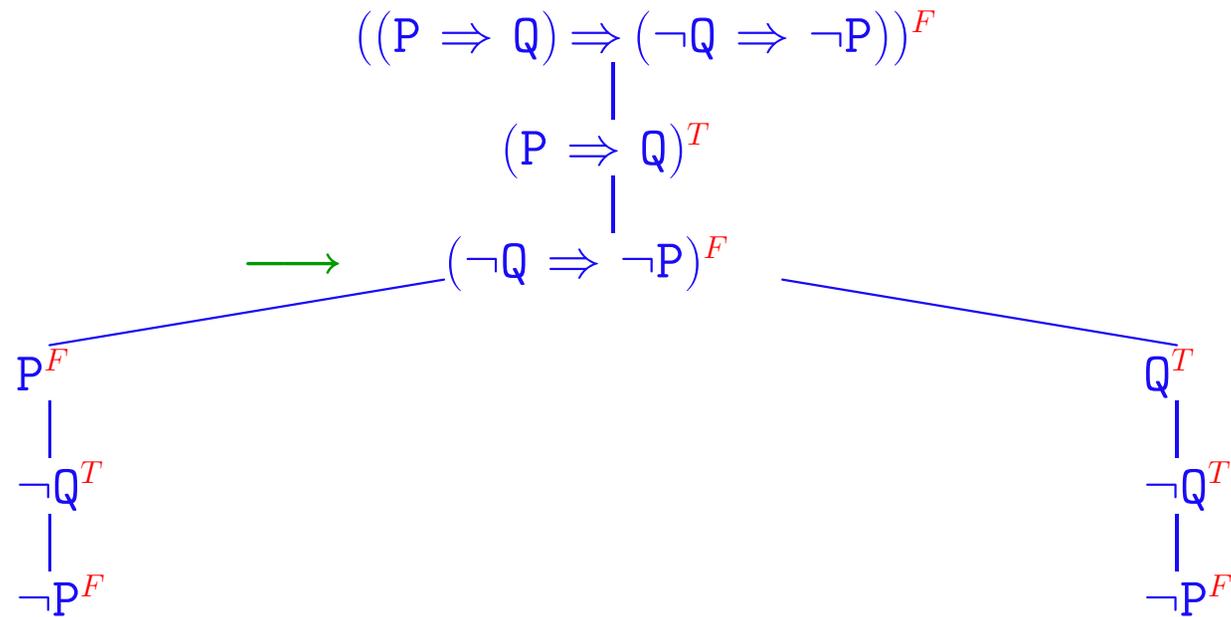
TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F \\ | \\ (P \Rightarrow Q)^T \\ | \\ (\neg Q \Rightarrow \neg P)^F \end{array}$$

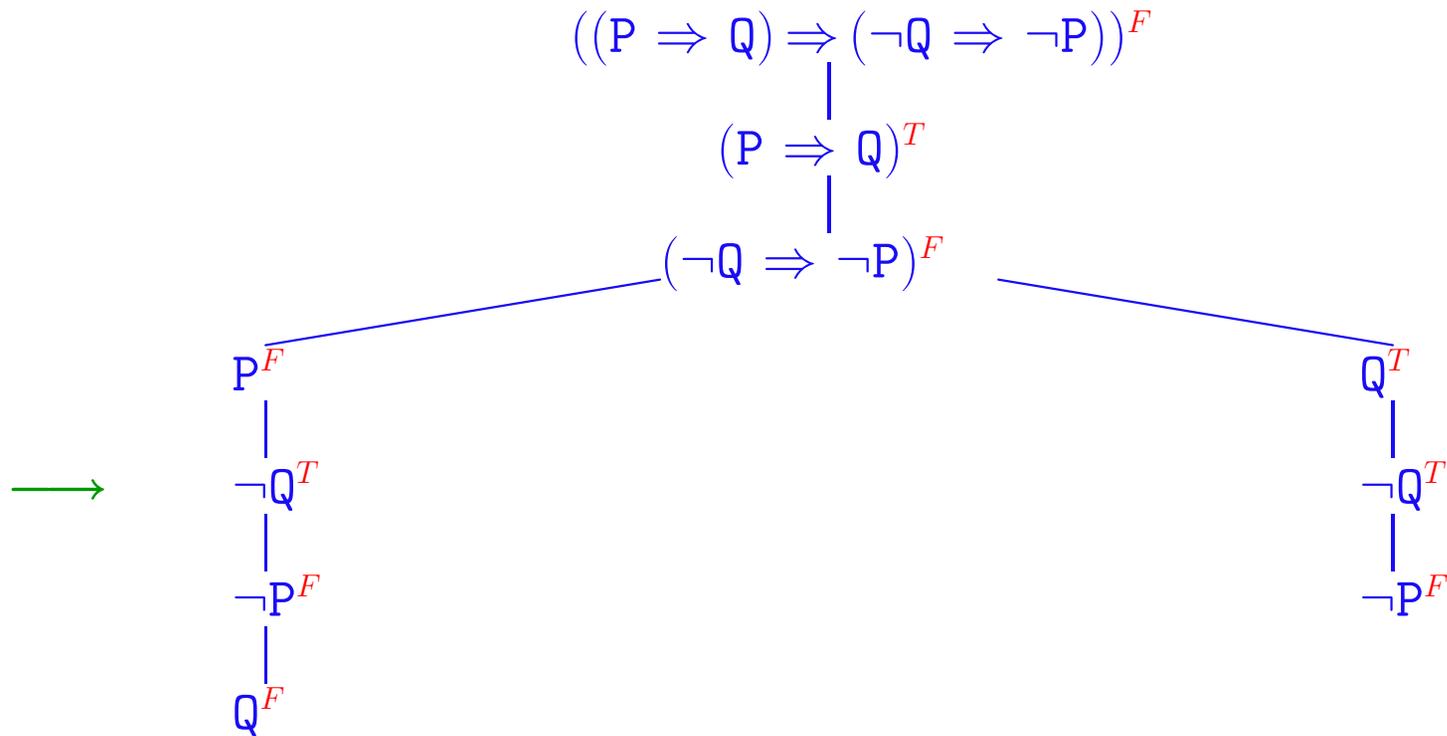
TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$



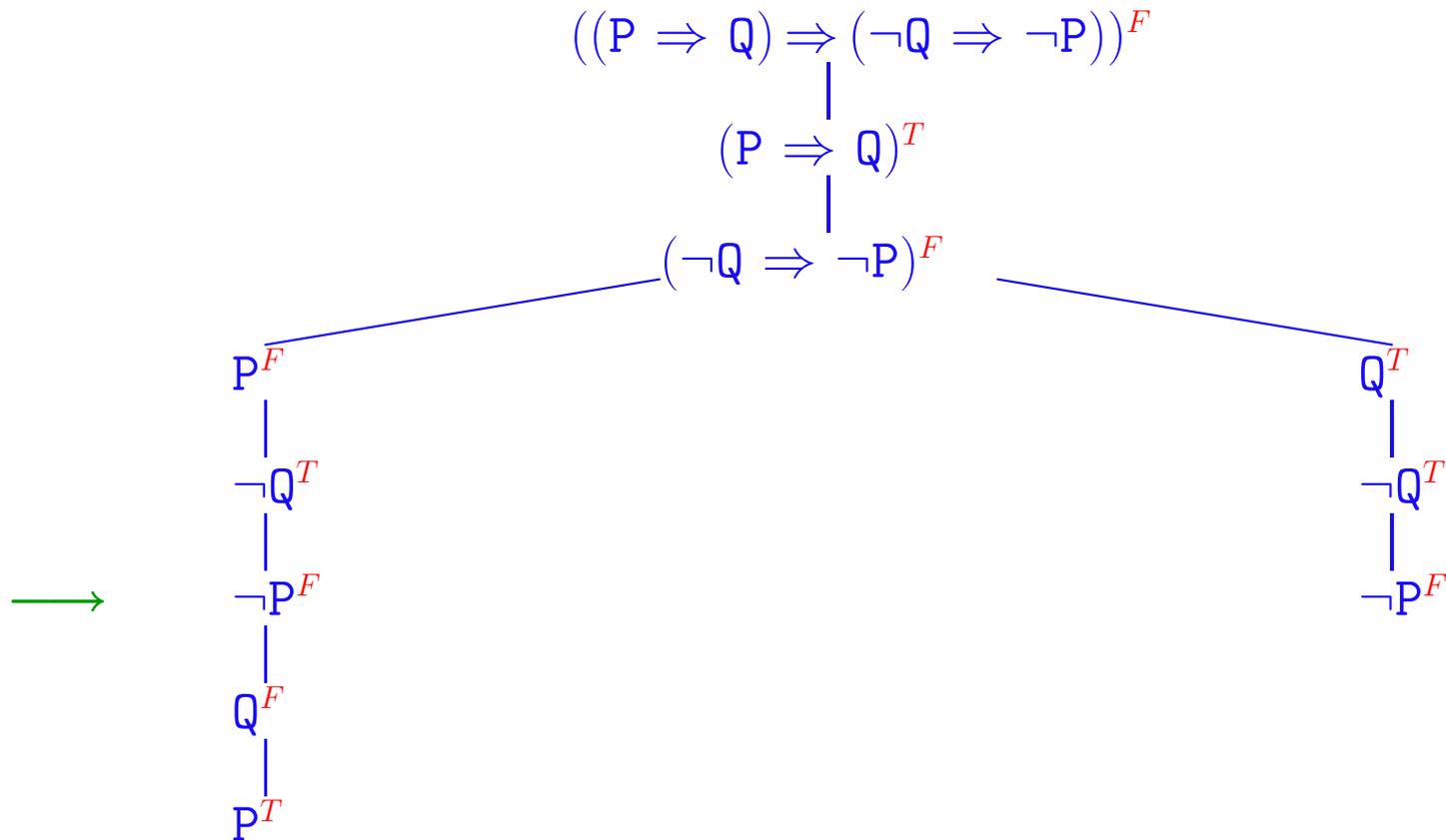
TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$



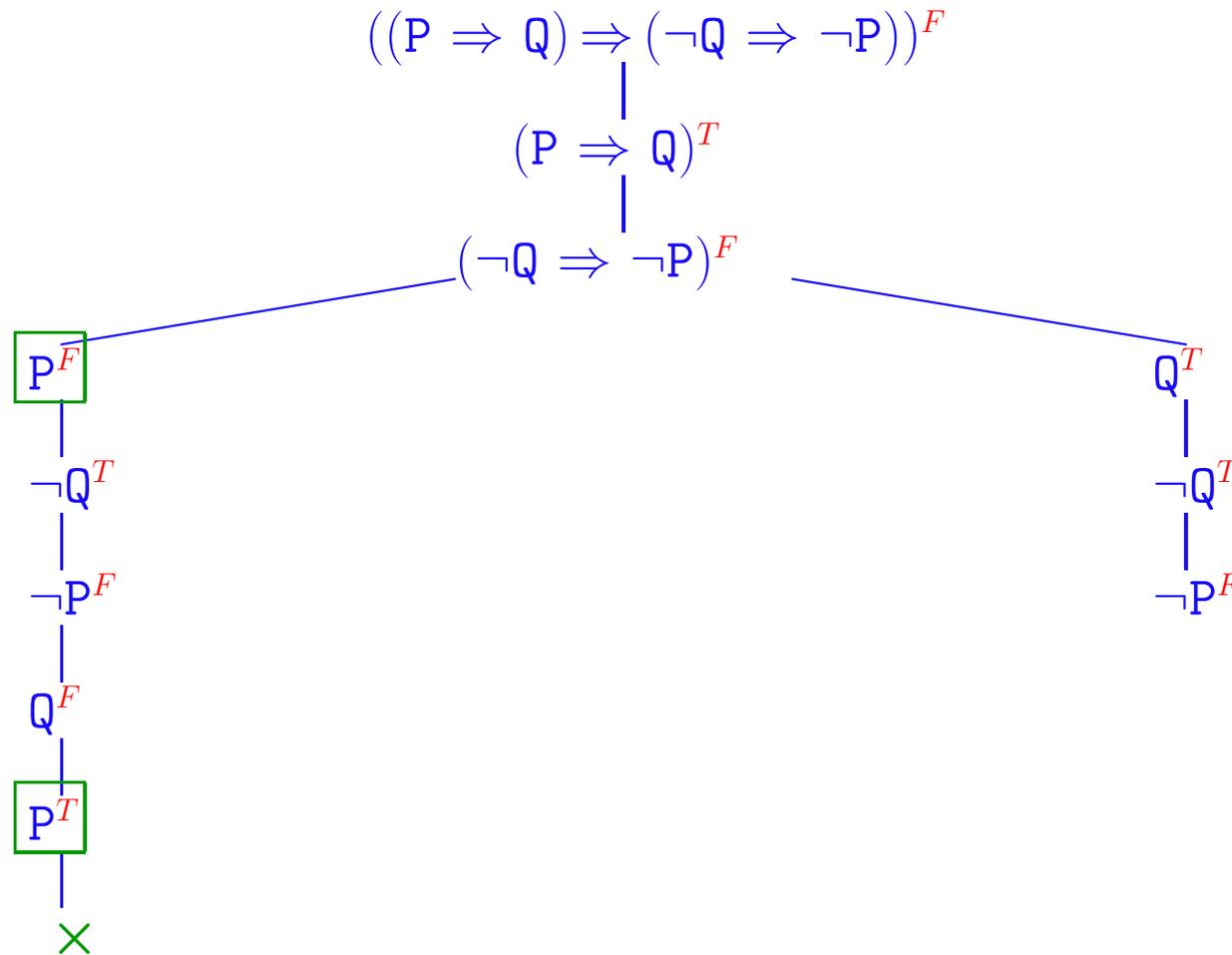
TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$



TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

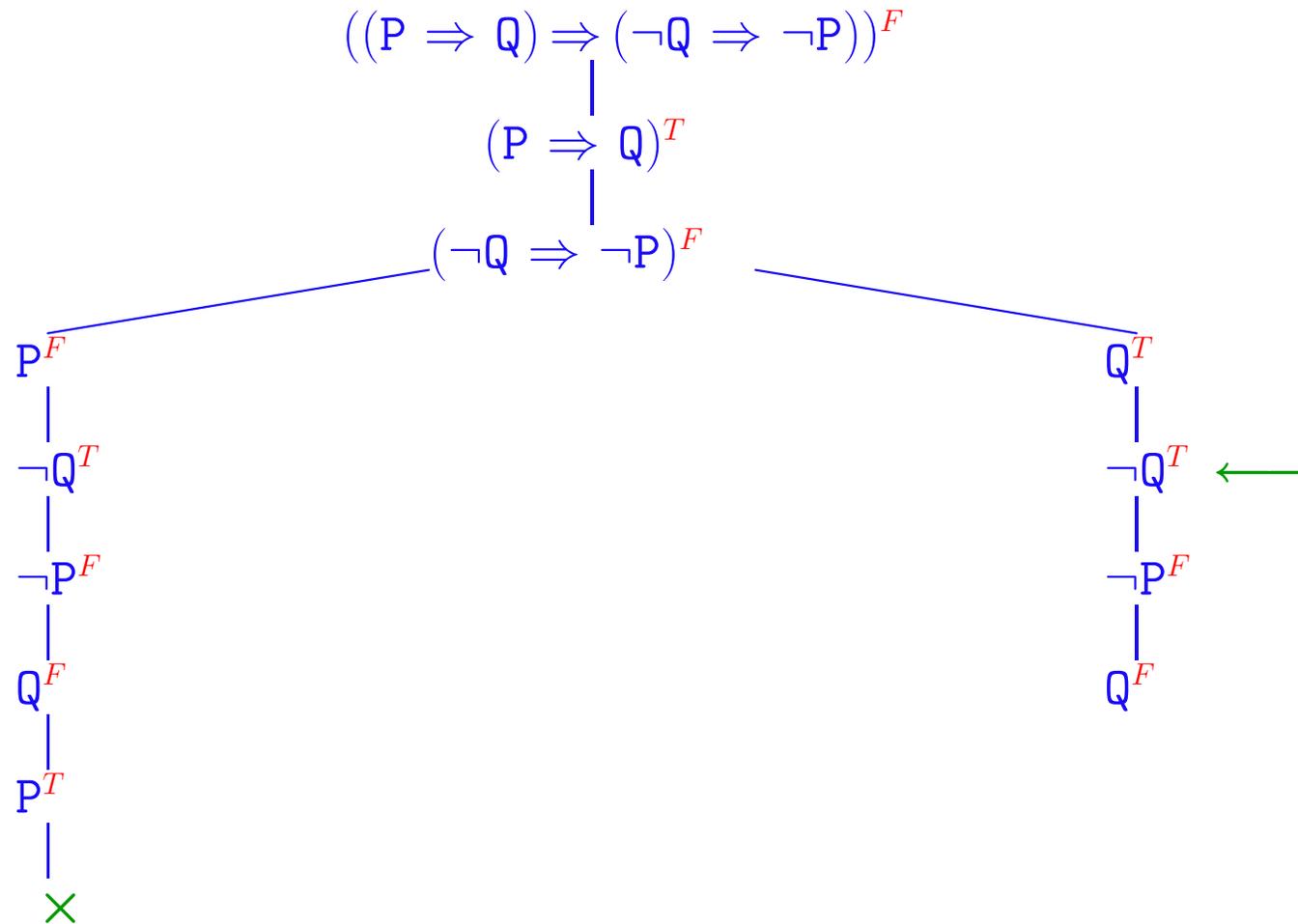


TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

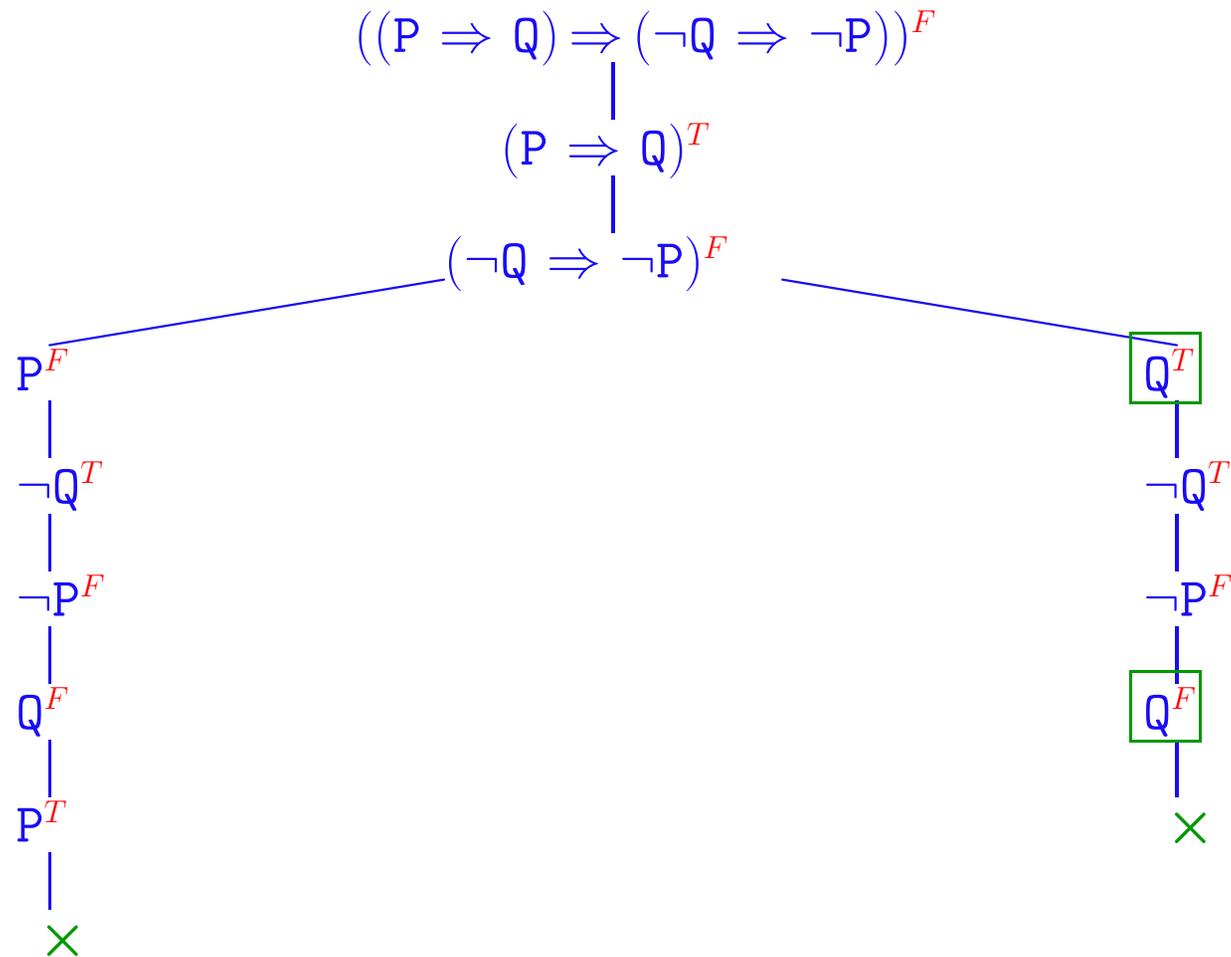


P kann nicht gleichzeitig falsch und wahr sein

TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

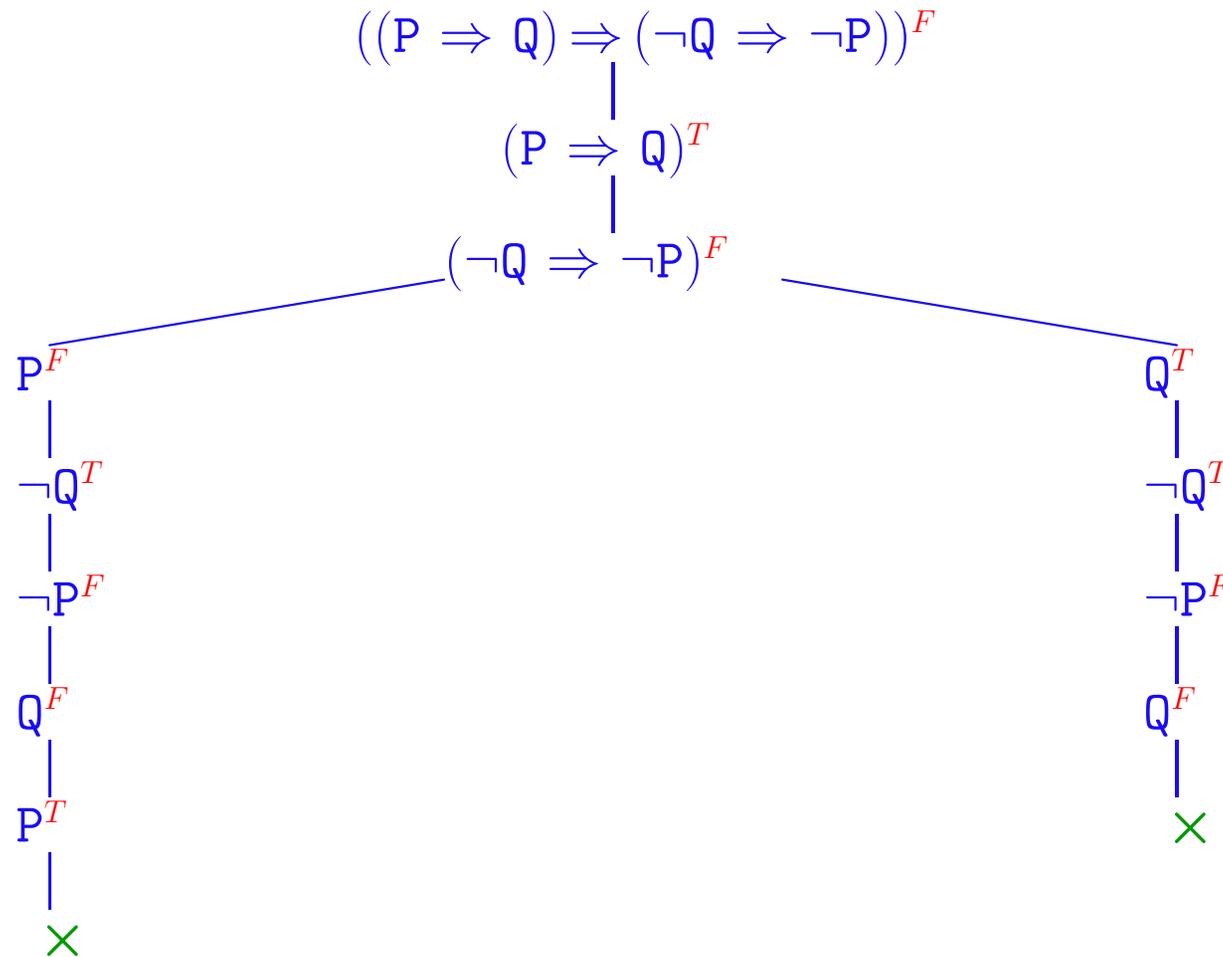


TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$



Q kann nicht gleichzeitig falsch und wahr sein

TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$



Alle Zweige widersprüchlich, Originalformel gültig

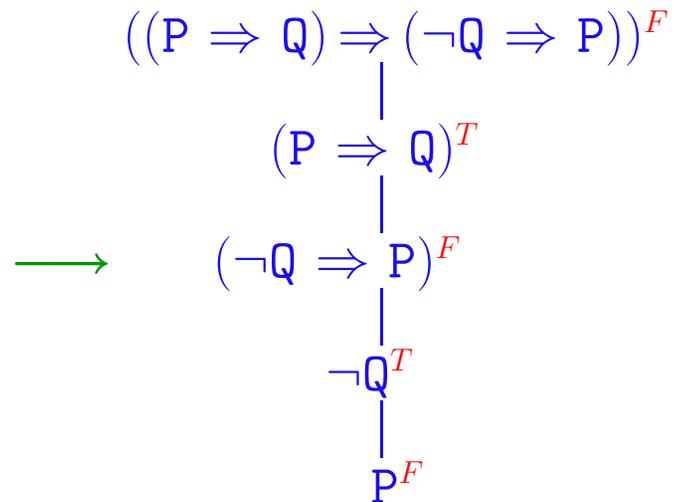
TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))^F$$

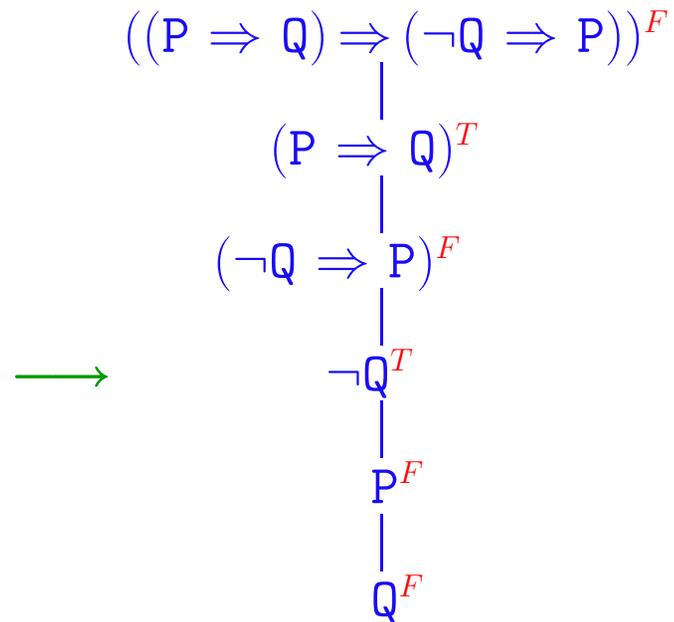
TABLEAUBEWeis FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))^F \\ | \\ (P \Rightarrow Q)^T \\ | \\ (\neg Q \Rightarrow P)^F \end{array}$$

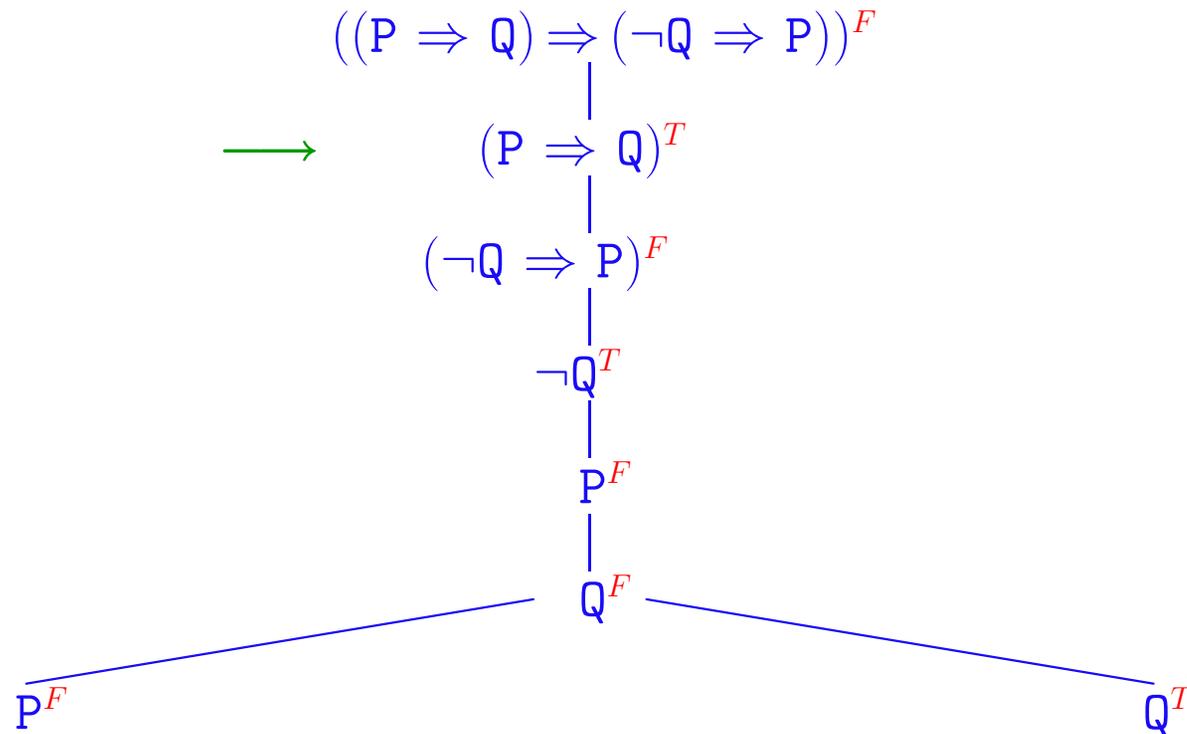
TABLEAUBEWeis FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$



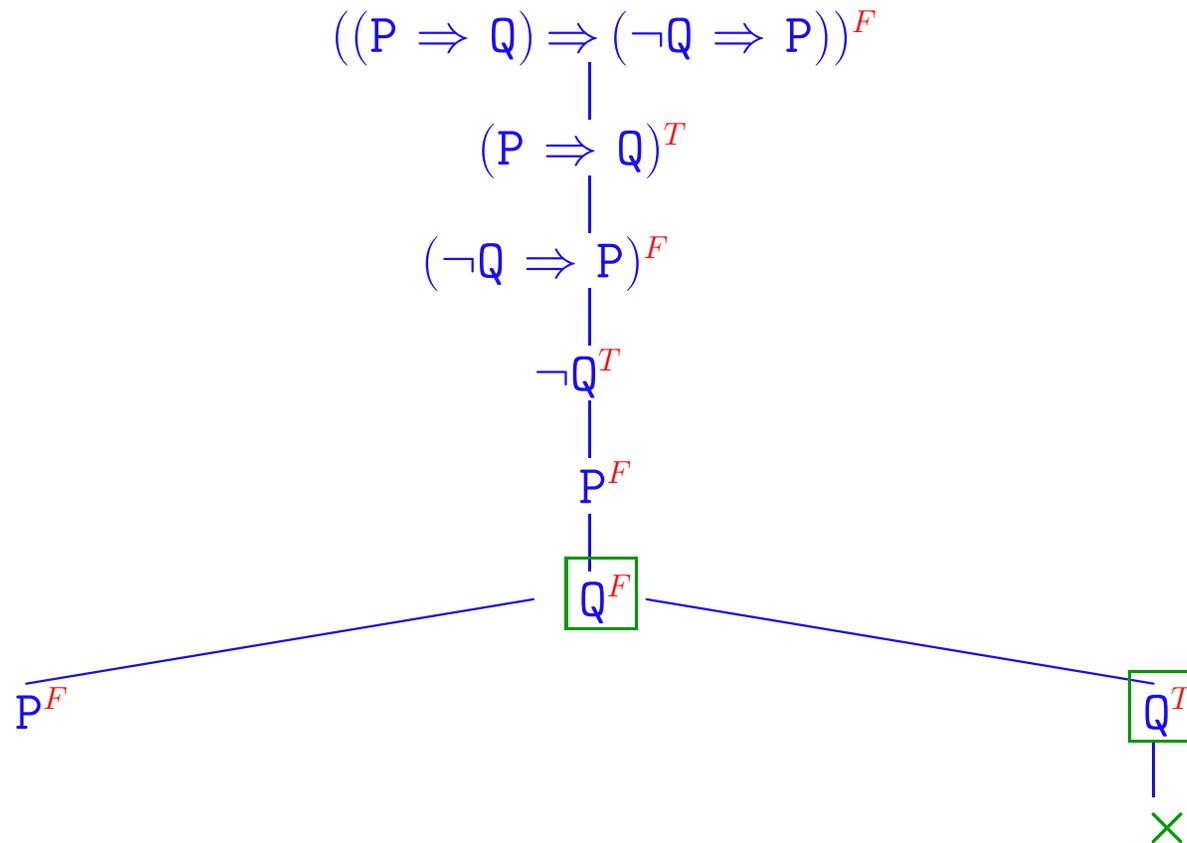
TABLEAUBEWeis FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$



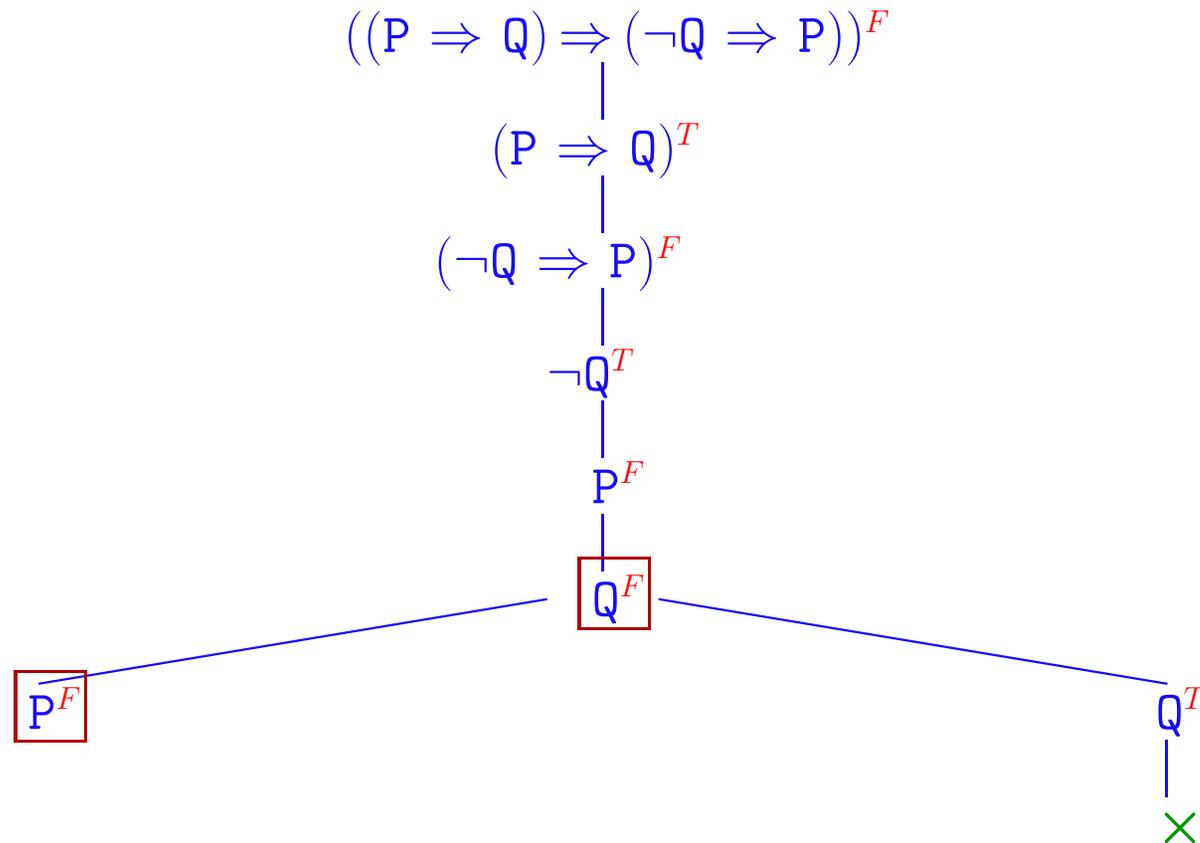
TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$



TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$



TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$



Offener Zweig liefert Gegenbeispiel P^F, Q^F

AUSSAGENLOGISCHE TABLEAUXREGELN SCHEMATISIERT

● **Typ α** (konjunktiv): Verlängerung des Beweiszweigs

- Wenn $\neg X^T$, dann X^F
- Wenn $\neg X^F$, dann X^T
- Wenn $X \wedge Y^T$, dann X^T und Y^T
- Wenn $X \vee Y^F$, dann X^F und Y^F
- Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann X^T und Y^F

α
α_1
α_2

AUSSAGENLOGISCHE TABLEAUXREGELN SCHEMATISIERT

● **Typ α** (konjunktiv): Verlängerung des Beweiszeigs

- Wenn $\neg X^T$, dann X^F
- Wenn $\neg X^F$, dann X^T
- Wenn $X \wedge Y^T$, dann X^T und Y^T
- Wenn $X \vee Y^F$, dann X^F und Y^F
- Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann X^T und Y^F

α
α_1
α_2

● **Typ β** (disjunktiv): Verzweigung des Beweises

- Wenn $X \wedge Y^F$, dann X^F oder Y^F
- Wenn $X \vee Y^T$, dann X^T oder Y^T
- Wenn $X \Rightarrow Y^T$, dann X^F oder Y^T

β
$\beta_1 \mid \beta_2$

AUSSAGENLOGISCHE TABLEAUXREGELN SCHEMATISIERT

● Typ α (konjunktiv): Verlängerung des Beweiszeigs

- Wenn $\neg X^T$, dann X^F
- Wenn $\neg X^F$, dann X^T
- Wenn $X \wedge Y^T$, dann X^T und Y^T
- Wenn $X \vee Y^F$, dann X^F und Y^F
- Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann X^T und Y^F

α
α_1
α_2

● Typ β (disjunktiv): Verzweigung des Beweises

- Wenn $X \wedge Y^F$, dann X^F oder Y^F
- Wenn $X \vee Y^T$, dann X^T oder Y^T
- Wenn $X \Rightarrow Y^T$, dann X^F oder Y^T

β
$\beta_1 \mid \beta_2$

● Teilformeln bestimmt durch Konnektiv und Polarität

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	–	–
β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$		
β_1	X^F	X^T	X^F		
β_2	Y^F	Y^T	Y^T		

PRÄDIKATENLOGISCHE TABLEAUXREGELN

- **Typ γ : Instantiierung einer Variablen**

- Wenn $\forall x A^T$, dann $A[t/x]^T$ für beliebiges t
- Wenn $\exists x A^F$, dann $A[t/x]^F$ für beliebiges t

γ
$\gamma(t)$

PRÄDIKATENLOGISCHE TABLEAUXREGELN

● Typ γ : Instantiierung einer Variablen

- Wenn $\forall x A^T$, dann $A[t/x]^T$ für beliebiges t
- Wenn $\exists x A^F$, dann $A[t/x]^F$ für beliebiges t

γ
$\gamma(t)$

● Typ δ : Deklaration einer neuen Variablen

- Wenn $\forall x A^F$, dann $A[a/x]^F$ für ein gewisses, festes a
- Wenn $\exists x A^T$, dann $A[a/x]^T$ für ein gewisses, festes a
- Da a unbekannt ist, muß eine **neue Variable** gewählt werden

δ
$\delta(a)$

PRÄDIKATENLOGISCHE TABLEAUXREGELN

- **Typ γ : Instantiierung einer Variablen**

- Wenn $\forall x A^T$, dann $A[t/x]^T$ für beliebiges t
- Wenn $\exists x A^F$, dann $A[t/x]^F$ für beliebiges t

γ
$\gamma(t)$

- **Typ δ : Deklaration einer neuen Variablen**

- Wenn $\forall x A^F$, dann $A[a/x]^F$ für ein gewisses, festes a
- Wenn $\exists x A^T$, dann $A[a/x]^T$ für ein gewisses, festes a
- Da a unbekannt ist, muß eine **neue Variable** gewählt werden

δ
$\delta(a)$

- **Teilformeln tabellarisch bestimmt**

γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$	δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$
$\gamma(t)$	$A[t/x]^T$	$A[t/x]^F$	$\delta(a)$	$A[a/x]^F$	$A[a/x]^T$

TABLEAUXBEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$

TABLEAUXBEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

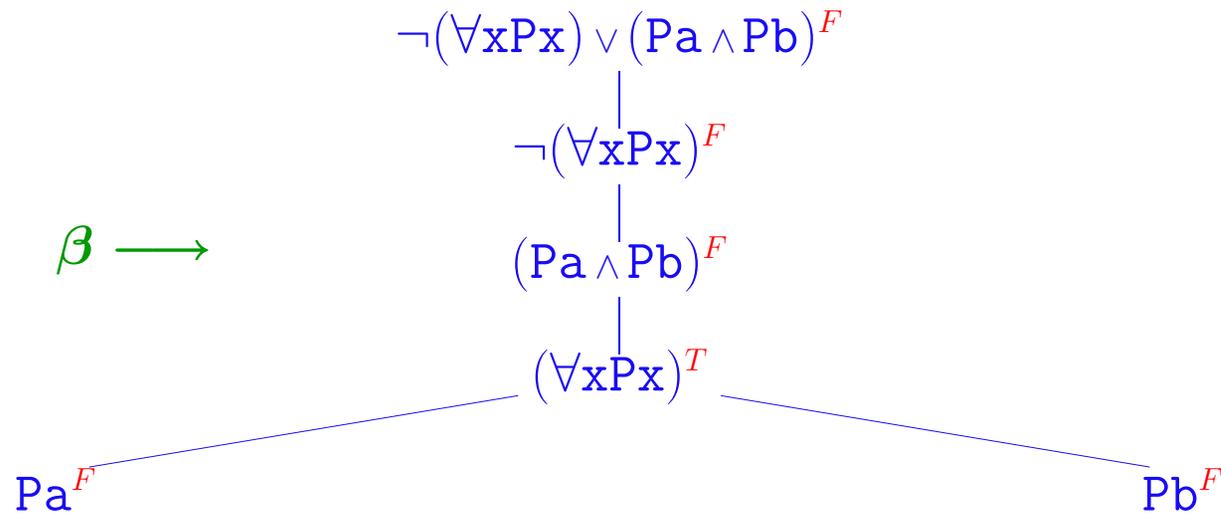
$$\alpha \longrightarrow \begin{array}{c} \neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F \\ | \\ \neg(\forall x Px)^F \\ | \\ (Pa \wedge Pb)^F \end{array}$$

TABLEAUXBEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

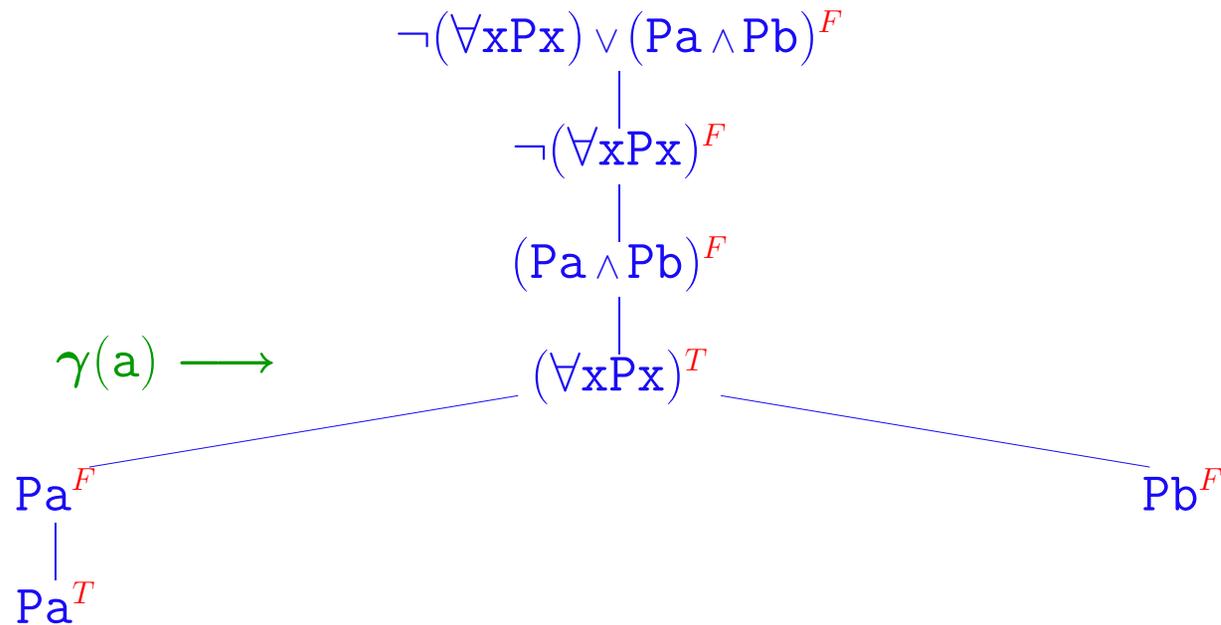
$\alpha \longrightarrow$

$$\begin{array}{c} \neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F \\ | \\ \neg(\forall x Px)^F \\ | \\ (Pa \wedge Pb)^F \\ | \\ (\forall x Px)^T \end{array}$$

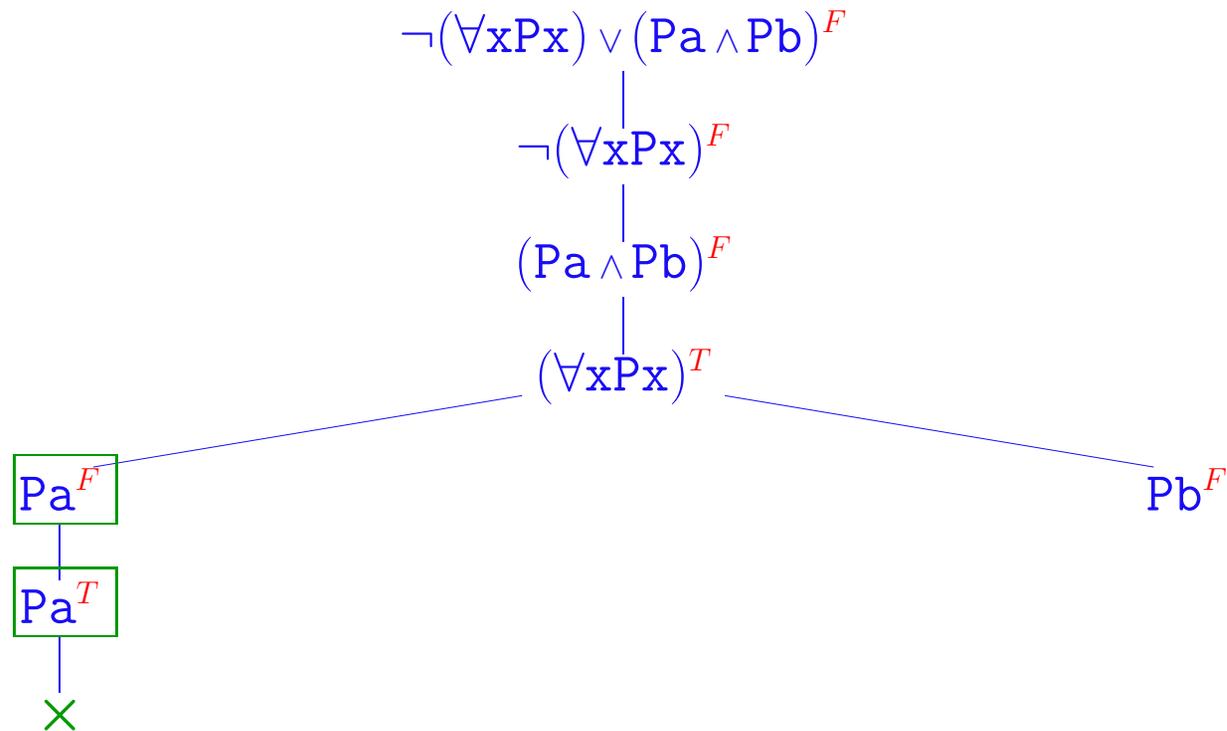
TABLEAUXBEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



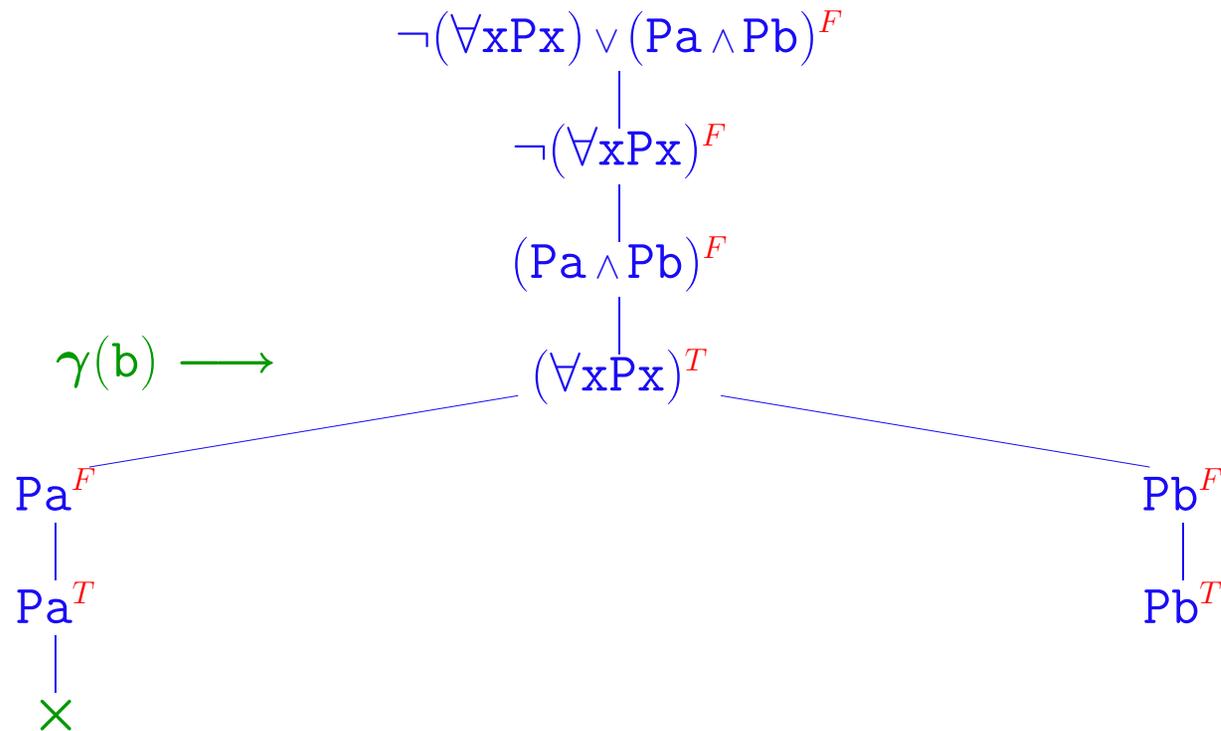
TABLEAUBEWWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



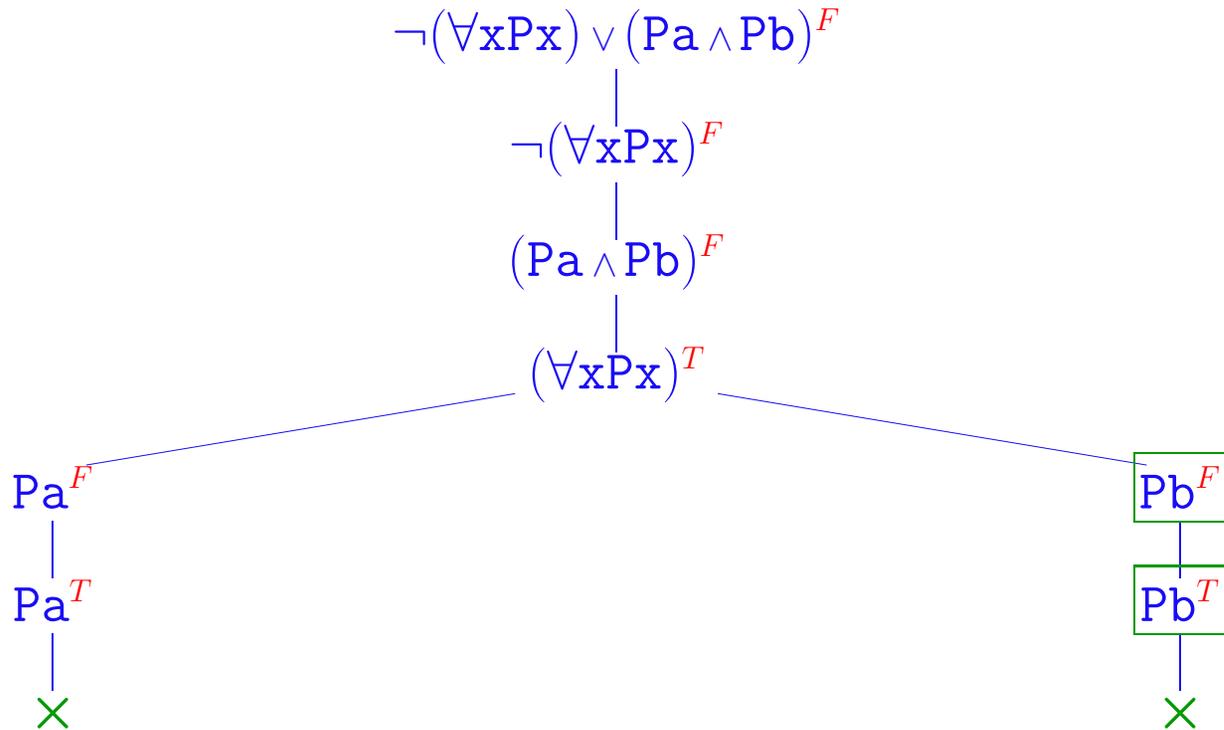
TABLEAUXBEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



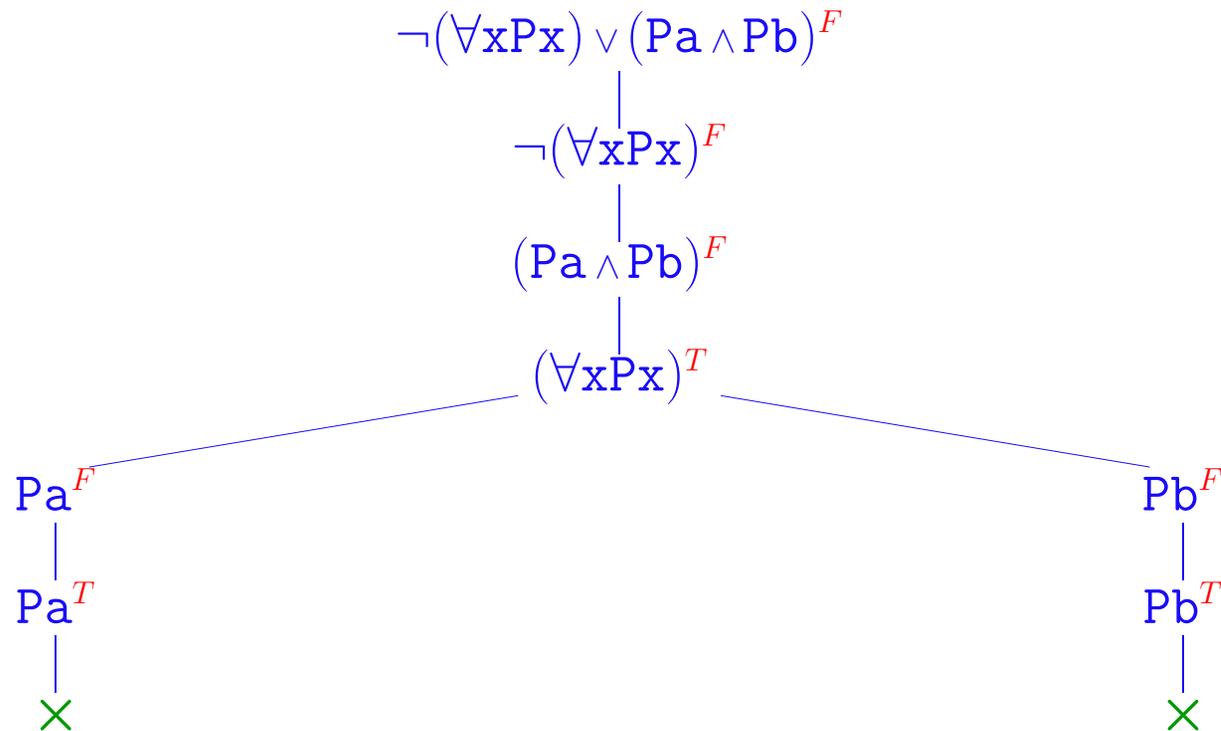
TABLEAUXBEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



TABLEAUBEWEIFÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



TABLEAUXBEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



Zwei verschiedene Instanzen derselben Formel

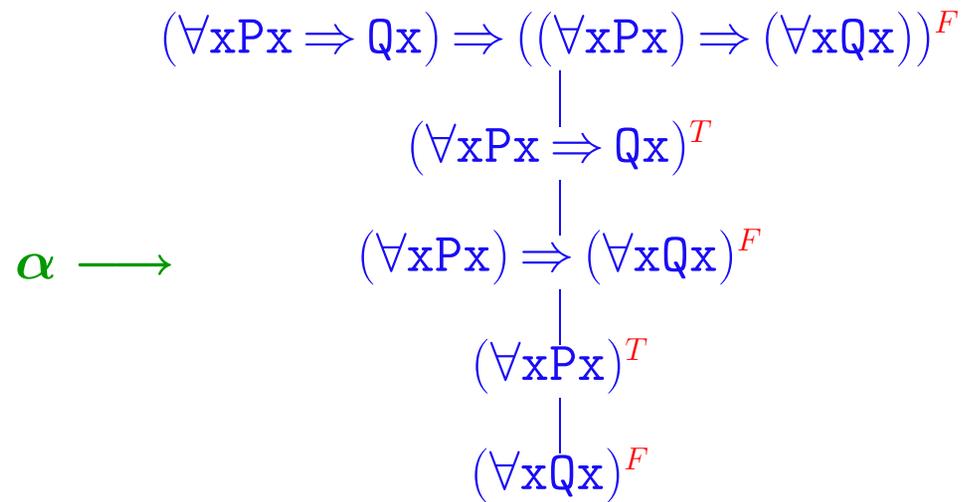
BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

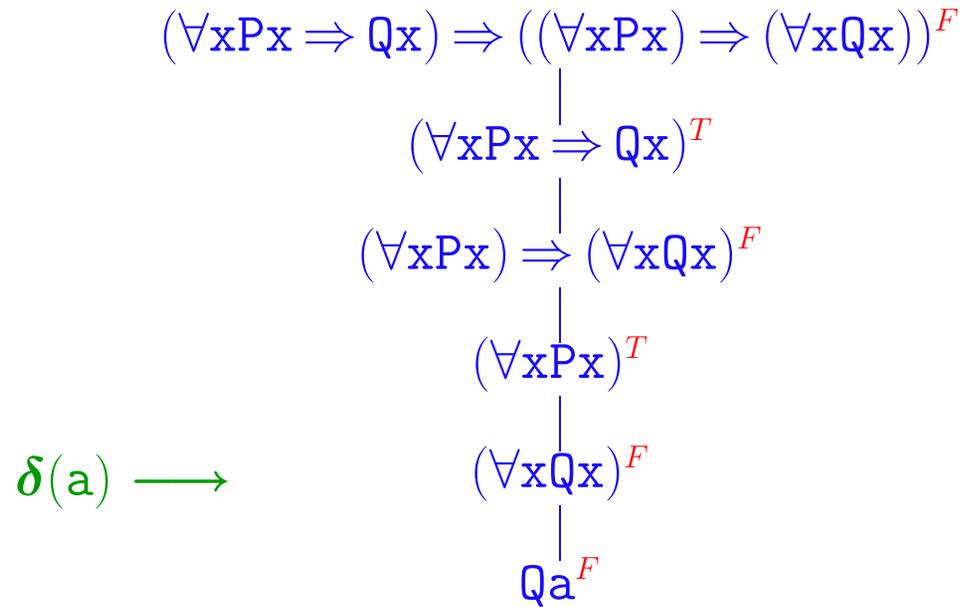
BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$\alpha \longrightarrow (\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$
$$\quad \quad \quad |$$
$$\quad \quad \quad (\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$
$$\quad \quad \quad |$$
$$\quad \quad \quad (\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

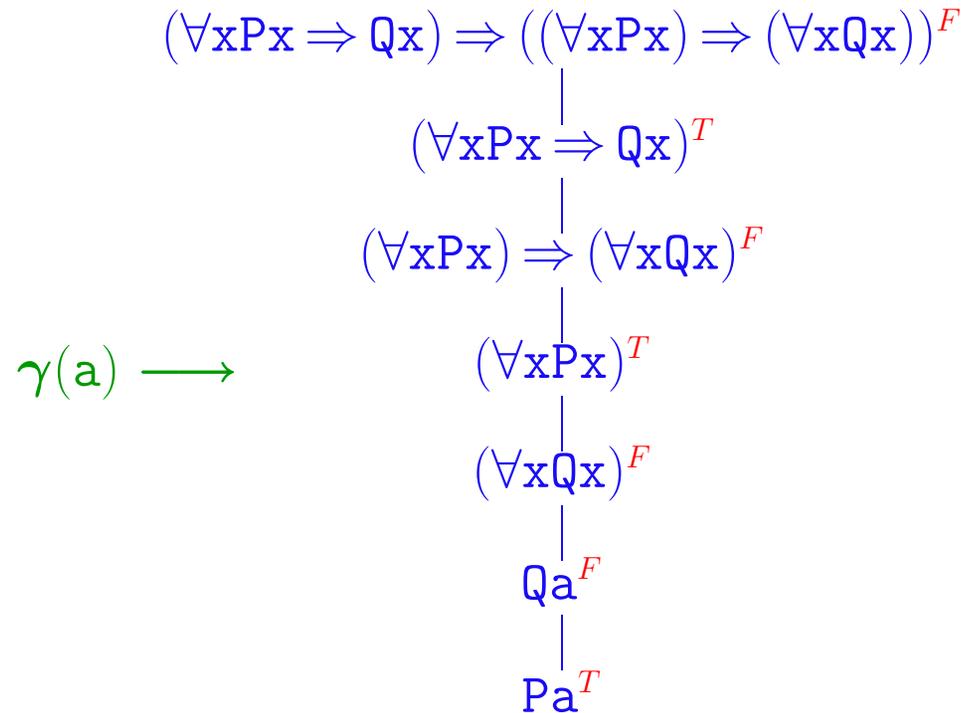
BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

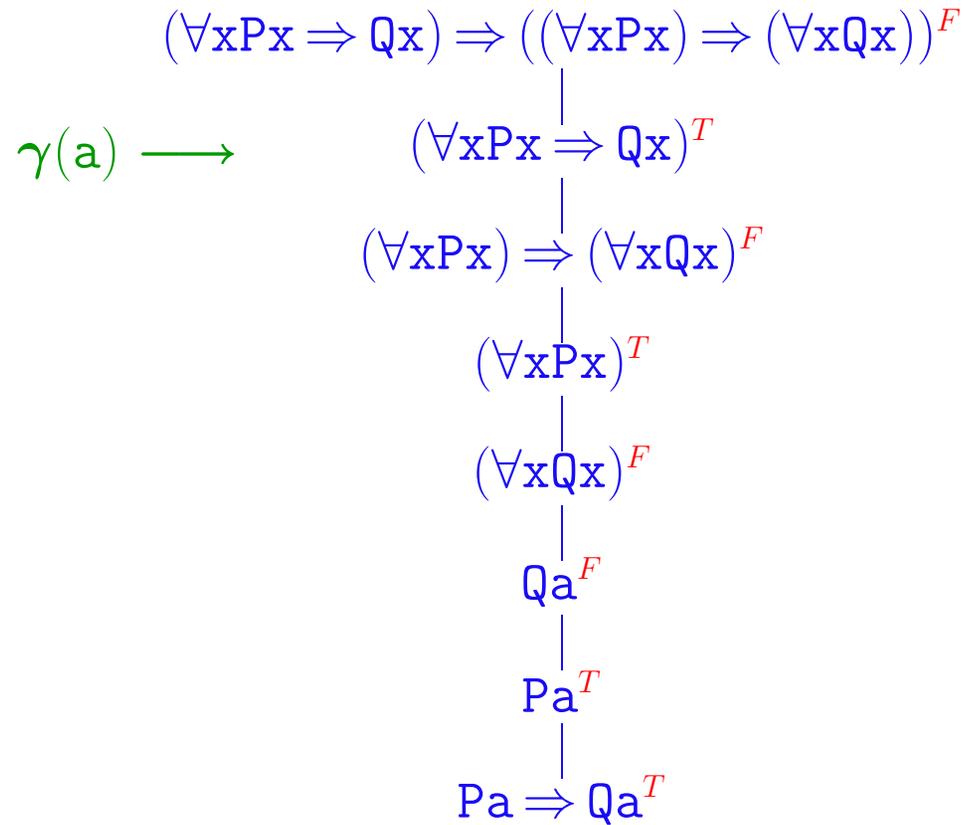


BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



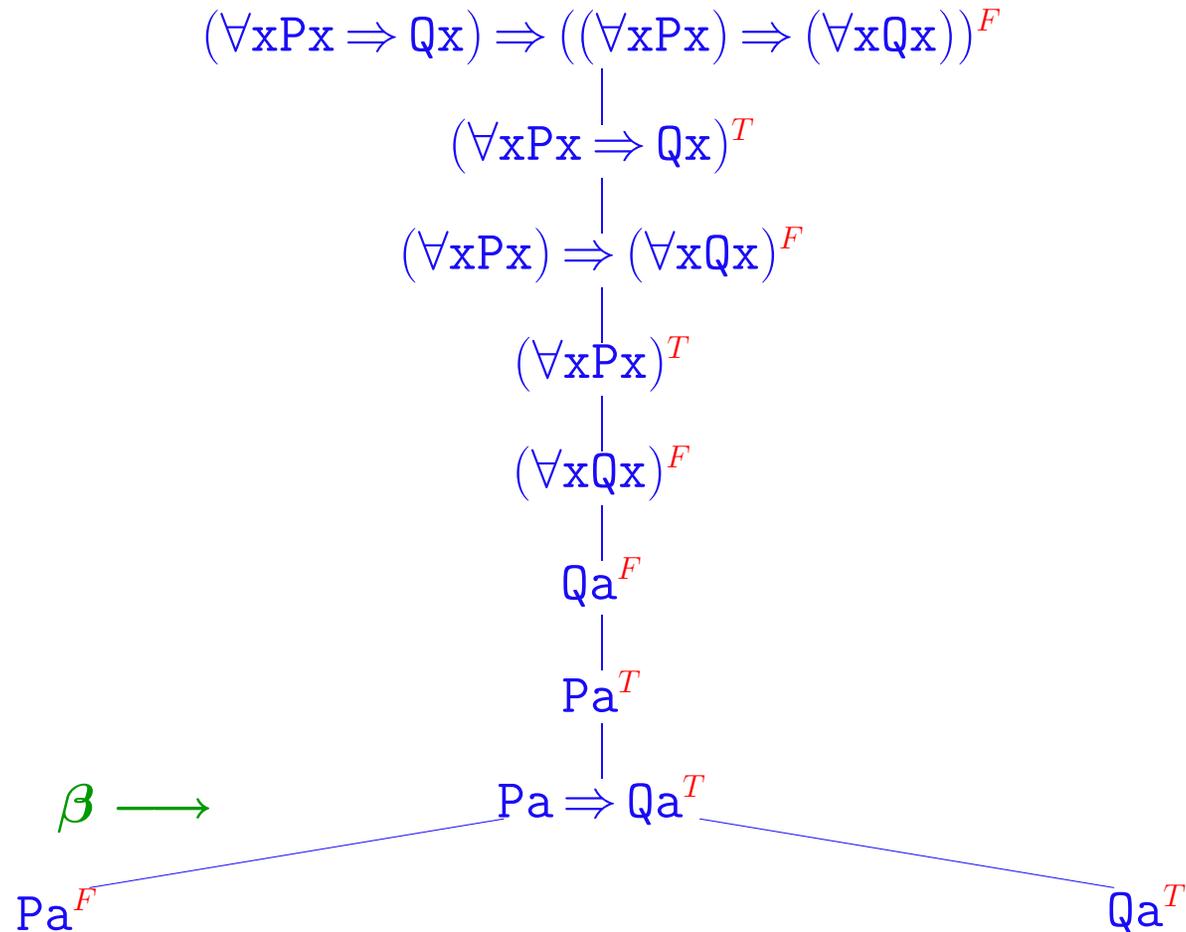
$\forall x Qx$ muß vor den γ -Knoten zerlegt werden

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



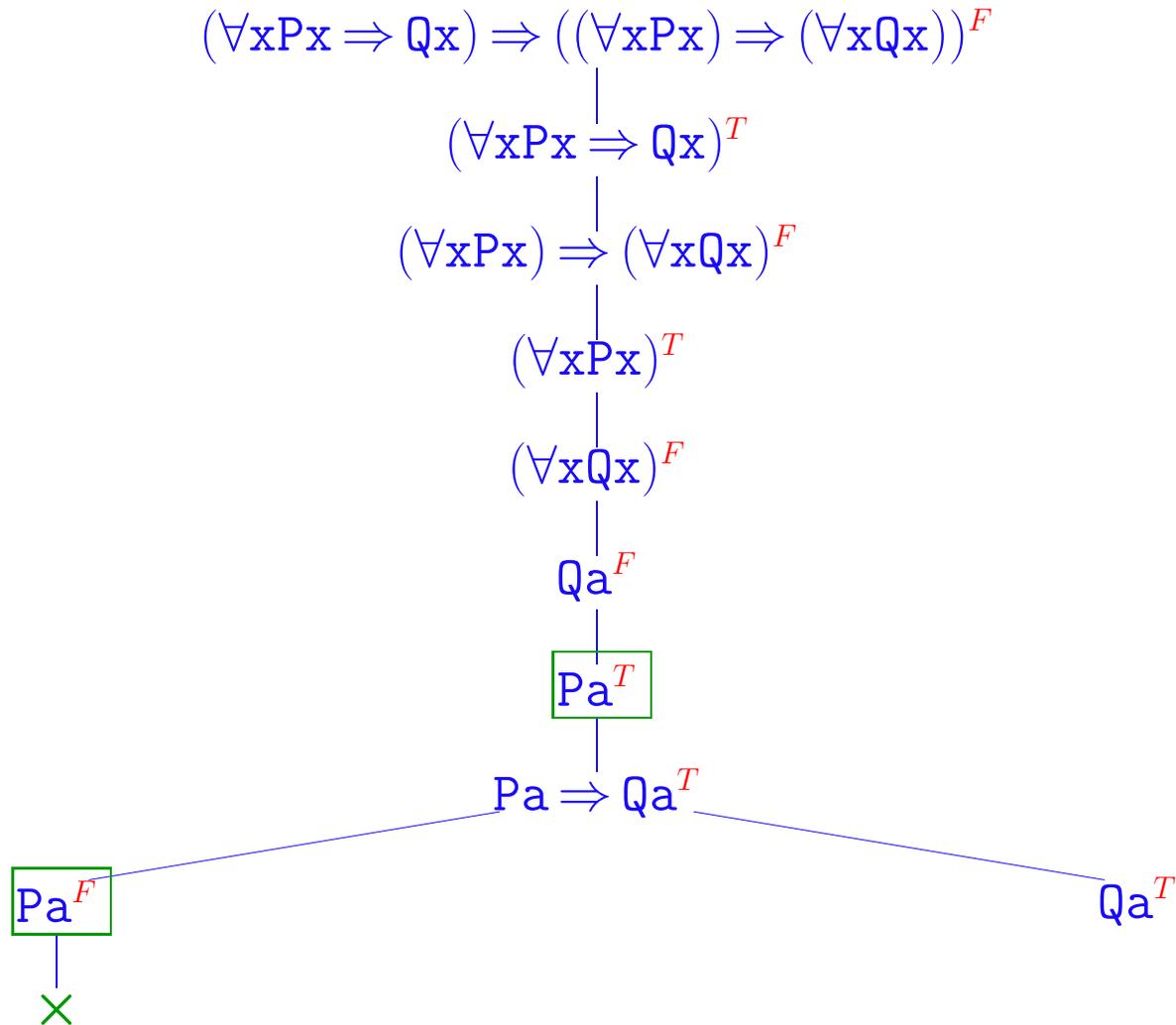
$\forall x Qx$ muß vor den γ -Knoten zerlegt werden

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



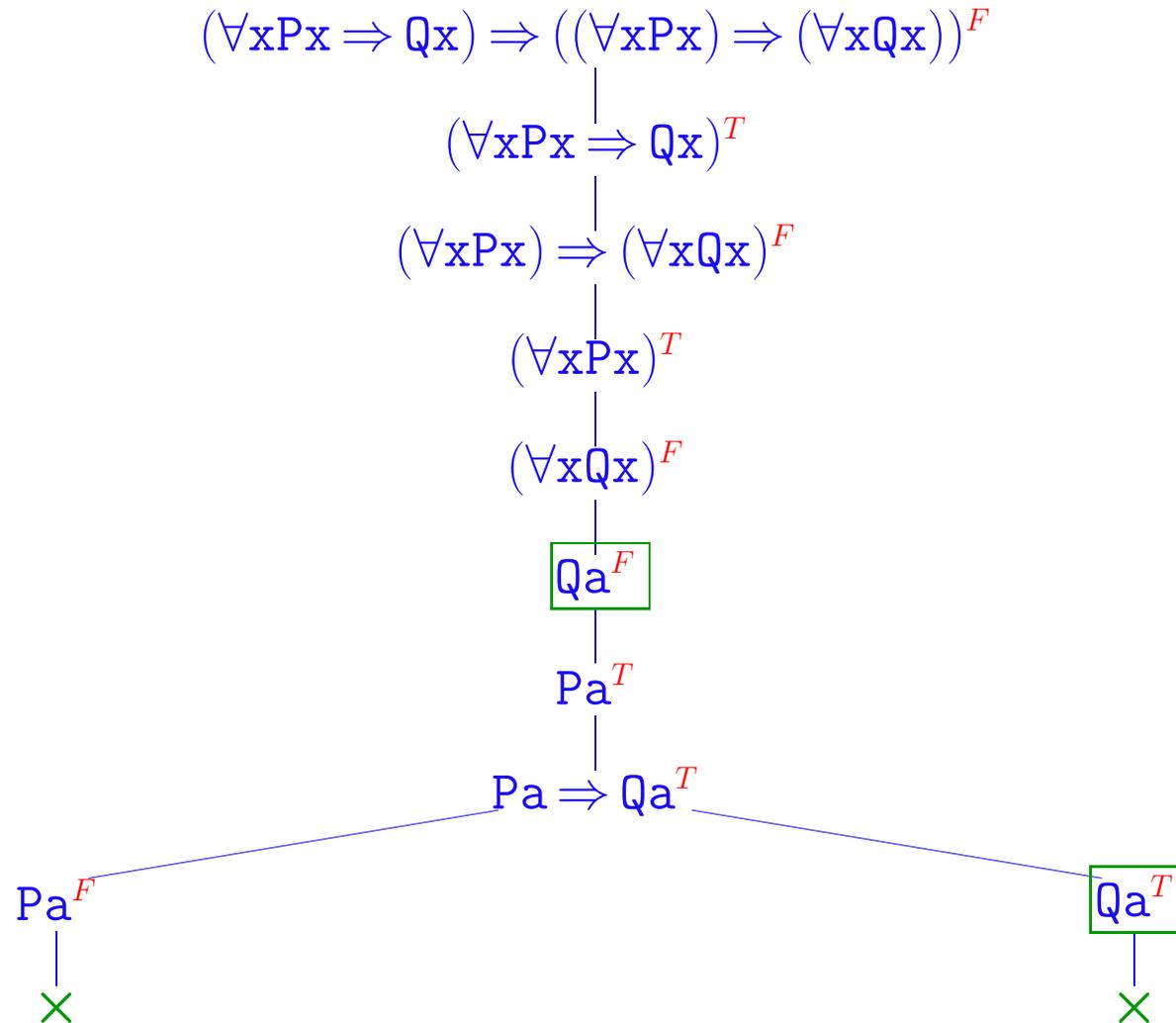
$\forall x Qx$ muß vor den γ -Knoten zerlegt werden

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



$\forall x Qx$ muß vor den γ -Knoten zerlegt werden

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



$\forall x Qx$ muß vor den γ -Knoten zerlegt werden

TABLEAUX PRÄZISIERT

- **Signierte Formel**

- Formel X mit Vorzeichen T oder F , geschrieben als X^T bzw. X^F
- Interpretation: $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- X^T und X^F sind komplementär zueinander

TABLEAUX PRÄZISIERT

- **Signierte Formel**

- Formel X mit Vorzeichen T oder F , geschrieben als X^T bzw. X^F
- Interpretation: $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- X^T und X^F sind komplementär zueinander

- **Analytisches Tableau für signierte Formel F**

- Binärer geordneter Baum \mathcal{T} mit Wurzel F
- Für jeden Knoten y mit Nachfolger z gibt es einen Vorfahren x mit
 - Ist x vom Typ α , so ist z entweder α_1 oder α_2
 - Ist x vom Typ γ , so ist $z = \gamma(t)$ für einen Term t
 - Ist x vom Typ δ , so ist $z = \delta(a)$ für eine neue Variable a .
- Für jeden Knoten y mit Nachfolgern z_1 und z_2 gibt es einen Vorfahren x vom Typ β mit $z_1 = \beta_1$ und $z_2 = \beta_2$

TABLEAUX PRÄZISIERT

- **Signierte Formel**

- Formel X mit Vorzeichen T oder F , geschrieben als X^T bzw. X^F
- Interpretation: $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- X^T und X^F sind komplementär zueinander

- **Analytisches Tableau für signierte Formel F**

- Binärer geordneter Baum \mathcal{T} mit Wurzel F
- Für jeden Knoten y mit Nachfolger z gibt es einen Vorfahren x mit
 - Ist x vom Typ α , so ist z entweder α_1 oder α_2
 - Ist x vom Typ γ , so ist $z = \gamma(t)$ für einen Term t
 - Ist x vom Typ δ , so ist $z = \delta(a)$ für eine neue Variable a .
- Für jeden Knoten y mit Nachfolgern z_1 und z_2 gibt es einen Vorfahren x vom Typ β mit $z_1 = \beta_1$ und $z_2 = \beta_2$

- **\mathcal{T}_1 direkte Erweiterung von \mathcal{T}**

- \mathcal{T}_1 entsteht aus \mathcal{T} durch Anwendung einer Regel auf einen Zweig ϑ von \mathcal{T}

TABLEAUXBEWEISE

- **Zweig $\vartheta = [F_0, F_1, \dots, F_n]$ im Tableau**

- Liste der (signierten) Formeln zwischen Wurzel F_0 und Blatt F_n

- Interpretation: $\iota(\vartheta) = \begin{cases} \text{wahr} & \iota(F) = \text{wahr für alle } F \in \vartheta \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$

TABLEAUXBEWEISE

- **Zweig $\vartheta = [F_0, F_1, \dots, F_n]$ im Tableau**

- Liste der (signierten) Formeln zwischen Wurzel F_0 und Blatt F_n
- Interpretation: $\iota(\vartheta) = \begin{cases} \text{wahr} & \iota(F) = \text{wahr für alle } F \in \vartheta \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$

- **Geschlossenes Tableau \mathcal{T}**

- Zweig ϑ ist geschlossen, wenn er ein komplementäres Formelpaar enthält
- Geschlossene Zweige sind unerfüllbar
- \mathcal{T} ist geschlossen, wenn jeder Zweig geschlossen ist

TABLEAUXBEWEISE

- **Zweig $\vartheta = [F_0, F_1, \dots, F_n]$ im Tableau**

- Liste der (signierten) Formeln zwischen Wurzel F_0 und Blatt F_n
- Interpretation: $\iota(\vartheta) = \begin{cases} \text{wahr} & \iota(F) = \text{wahr für alle } F \in \vartheta \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$

- **Geschlossenes Tableau \mathcal{T}**

- Zweig ϑ ist geschlossen, wenn er ein komplementäres Formelpaar enthält
- Geschlossene Zweige sind unerfüllbar
- \mathcal{T} ist geschlossen, wenn jeder Zweig geschlossen ist

- **Tableaubeweis für Formel X**

- Geschlossenes Tableau für X^F

KORREKTHEIT VON TABLEAUXBEWEISEN

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

$$- \iota(X^T) = \iota(X), \quad \iota(X^F) = \iota(\neg X)$$

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\neg X^T)$, dann $\iota(X^F)$
- Wenn $\iota(\neg X^F)$, dann $\iota(X^T)$
- Wenn $\iota(X \wedge Y^T)$, dann $\iota(X^T)$ und $\iota(Y^T)$
- Wenn $\iota(X \vee Y^F)$, dann $\iota(X^F)$ und $\iota(Y^F)$
- Wenn $\iota(X \Rightarrow Y^F)$, dann $\iota(X^T)$ und $\iota(Y^F)$

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\neg X^T)$, dann $\iota(X^F)$
- Wenn $\iota(\neg X^F)$, dann $\iota(X^T)$
- Wenn $\iota(X \wedge Y^T)$, dann $\iota(X^T)$ und $\iota(Y^T)$
- Wenn $\iota(X \vee Y^F)$, dann $\iota(X^F)$ und $\iota(Y^F)$
- Wenn $\iota(X \Rightarrow Y^F)$, dann $\iota(X^T)$ und $\iota(Y^F)$
- **Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$**

KORREKTHEIT VON TABLEAUXBEWEISEN

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(X \wedge Y^F)$ dann $\iota(X^F)$ oder $\iota(Y^F)$
- Wenn $\iota(X \vee Y^T)$, dann $\iota(X^T)$ oder $\iota(Y^T)$
- Wenn $\iota(X \Rightarrow Y^T)$, dann $\iota(X^F)$ oder $\iota(Y^T)$

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(X \wedge Y^F)$ dann $\iota(X^F)$ oder $\iota(Y^F)$
- Wenn $\iota(X \vee Y^T)$, dann $\iota(X^T)$ oder $\iota(Y^T)$
- Wenn $\iota(X \Rightarrow Y^T)$, dann $\iota(X^F)$ oder $\iota(Y^T)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$

KORREKTHEIT VON TABLEAUXBEWEISEN

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$
- Wenn $\iota(\forall x A^T)$, dann $\iota_x^u(A^T)$ für alle $u \in \mathcal{U}$
- Wenn $\iota(\exists x A^F)$, dann $\iota_x^u(A^F)$ für alle $u \in \mathcal{U}$

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$
- Wenn $\iota(\forall x A^T)$, dann $\iota_x^u(A^T)$ für alle $u \in \mathcal{U}$
- Wenn $\iota(\exists x A^F)$, dann $\iota_x^u(A^F)$ für alle $u \in \mathcal{U}$
- Wenn $\iota(\forall x A^T)$, dann $\iota(A[t/x]^T)$ für jeden Term t
- Wenn $\iota(\exists x A^F)$, dann $\iota(A[t/x]^F)$ für jeden Term t

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$
- Wenn $\iota(\forall x A^T)$, dann $\iota_x^u(A^T)$ für alle $u \in \mathcal{U}$
- Wenn $\iota(\exists x A^F)$, dann $\iota_x^u(A^F)$ für alle $u \in \mathcal{U}$
- Wenn $\iota(\forall x A^T)$, dann $\iota(A[t/x]^T)$ für jeden Term t
- Wenn $\iota(\exists x A^F)$, dann $\iota(A[t/x]^F)$ für jeden Term t
- **Wenn $\iota(\gamma)$, dann $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t**

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$
- Wenn $\iota(\gamma)$, dann $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$
- Wenn $\iota(\gamma)$, dann $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t
- Wenn $\iota(\exists x A^T)$, dann $\iota_x^u(A^T)$ für ein $u \in \mathcal{U}$
- Wenn $\iota(\forall x A^F)$, dann $\iota_x^u(A^F)$ für ein $u \in \mathcal{U}$

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
 - Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
 - Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$
 - Wenn $\iota(\gamma)$, dann $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t
 - Wenn $\iota(\exists x A^T)$, dann $\iota_x^u(A^T)$ für ein $u \in \mathcal{U}$
 - Wenn $\iota(\forall x A^F)$, dann $\iota_x^u(A^F)$ für ein $u \in \mathcal{U}$
 - Wenn $\iota(\exists x A^T)$, dann $\iota_a^u(A[a/x]^T)$ für eine neue Variable a
 - Wenn $\iota(\forall x A^F)$, dann $\iota_a^u(A[a/x]^F)$ für eine neue Variable a
- Da $u \in \mathcal{U}$ unbekannt ist, wird es durch eine *neue* Variable repräsentiert
 ι_a^u läßt die Interpretation der Variablen x außerhalb von A unverändert

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$
- Wenn $\iota(\gamma)$, dann $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t
- Wenn $\iota(\exists x A^T)$, dann $\iota_x^u(A^T)$ für ein $u \in \mathcal{U}$
- Wenn $\iota(\forall x A^F)$, dann $\iota_x^u(A^F)$ für ein $u \in \mathcal{U}$
- Wenn $\iota(\exists x A^T)$, dann $\iota_a^u(A[a/x]^T)$ für eine neue Variable a
- Wenn $\iota(\forall x A^F)$, dann $\iota_a^u(A[a/x]^F)$ für eine neue Variable a
Da $u \in \mathcal{U}$ unbekannt ist, wird es durch eine *neue* Variable repräsentiert
 ι_a^u läßt die Interpretation der Variablen x außerhalb von A unverändert
- Wenn $\iota(\delta)$, dann $\iota_a^u(\delta(a))$ für ein neues a und $u \in \mathcal{U}$
Wichtig: wenn a in einer Formel Y nicht vorkommt, dann ist $\iota_a^u(Y) = \iota(Y)$

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$
- Wenn $\iota(\gamma)$, dann $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t
- Wenn $\iota(\delta)$, dann $\iota_a^u(\delta(a))$ für ein neues a und $u \in \mathcal{U}$
Wichtig: wenn a in einer Formel Y nicht vorkommt, dann ist $\iota_a^u(Y) = \iota(Y)$

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$
- Wenn $\iota(\gamma)$, dann $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t
- Wenn $\iota(\delta)$, dann $\iota_a^u(\delta(a))$ für ein neues a und $u \in \mathcal{U}$
Wichtig: wenn a in einer Formel Y nicht vorkommt, dann ist $\iota_a^u(Y) = \iota(Y)$

Klassifizierung vereinfacht Tableaux-Verfahren und
Nachweis seiner Eigenschaften

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F**
 - $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F**
 - $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig
- **Zeige durch strukturelle Induktion: \mathcal{T} Tableaux für F ,**
Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in \mathcal{T} erfüllbar

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F**
 - $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig
 - **Zeige durch strukturelle Induktion: \mathcal{T} Tableaux für F ,**
 - Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in \mathcal{T} erfüllbar**
- Basisfall: Hat \mathcal{T} nur einen Knoten F , dann wähle $\vartheta = [F]$

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F**
 - $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig

- **Zeige durch strukturelle Induktion: \mathcal{T} Tableaux für F ,**
Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in \mathcal{T} erfüllbar

Basisfall: Hat \mathcal{T} nur einen Knoten F , dann wähle $\vartheta = [F]$

Schrittfall: Sei \mathcal{T}_1 direkte Erweiterung von \mathcal{T} mit Wurzel F und $\iota(F)=\text{wahr}$

Sei ϑ der Zweig in \mathcal{T} mit $\iota(\vartheta)=\text{wahr}$

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F**
 - $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig

- **Zeige durch strukturelle Induktion: \mathcal{T} Tableaux für F ,**
Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in \mathcal{T} erfüllbar

Basisfall: Hat \mathcal{T} nur einen Knoten F , dann wähle $\vartheta = [F]$

Schrittfall: Sei \mathcal{T}_1 direkte Erweiterung von \mathcal{T} mit Wurzel F und $\iota(F)=\text{wahr}$

Sei ϑ der Zweig in \mathcal{T} mit $\iota(\vartheta)=\text{wahr}$

1. Falls \mathcal{T}_1 nicht am Zweig ϑ erweitert, wähle $\vartheta_1=\vartheta$

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F**
 - $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig
- **Zeige durch strukturelle Induktion: \mathcal{T} Tableaux für F ,**
 - Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in \mathcal{T} erfüllbar**

Basisfall: Hat \mathcal{T} nur einen Knoten F , dann wähle $\vartheta = [F]$

Schrittfall: Sei \mathcal{T}_1 direkte Erweiterung von \mathcal{T} mit Wurzel F und $\iota(F)=\text{wahr}$

Sei ϑ der Zweig in \mathcal{T} mit $\iota(\vartheta)=\text{wahr}$

1. Falls \mathcal{T}_1 nicht am Zweig ϑ erweitert, wähle $\vartheta_1=\vartheta$
2. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit α_i erweitert, ist der zugehörige α -Knoten auf ϑ und damit $\iota(\alpha_i)=\text{wahr}$. Wähle $\vartheta_1=\vartheta \circ [\alpha_i]$

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F**
 - $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig
- **Zeige durch strukturelle Induktion: \mathcal{T} Tableaux für F ,**
 - Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in \mathcal{T} erfüllbar**

Basisfall: Hat \mathcal{T} nur einen Knoten F , dann wähle $\vartheta = [F]$

Schrittfall: Sei \mathcal{T}_1 direkte Erweiterung von \mathcal{T} mit Wurzel F und $\iota(F)=\text{wahr}$

Sei ϑ der Zweig in \mathcal{T} mit $\iota(\vartheta)=\text{wahr}$

1. Falls \mathcal{T}_1 nicht am Zweig ϑ erweitert, wähle $\vartheta_1=\vartheta$
2. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit α_i erweitert, ist der zugehörige α -Knoten auf ϑ und damit $\iota(\alpha_i)=\text{wahr}$. Wähle $\vartheta_1=\vartheta \circ [\alpha_i]$
3. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit β_1 und β_2 erweitert, ist $\beta \in \vartheta$ damit $\iota(\beta_1)=\text{wahr}$ oder $\iota(\beta_2)=\text{wahr}$. Wähle $\vartheta_1=\vartheta \circ [\beta_i]$ entsprechend.

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F**
 - $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig
- **Zeige durch strukturelle Induktion: \mathcal{T} Tableaux für F ,**
 - Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in \mathcal{T} erfüllbar**

Basisfall: Hat \mathcal{T} nur einen Knoten F , dann wähle $\vartheta = [F]$

Schrittfall: Sei \mathcal{T}_1 direkte Erweiterung von \mathcal{T} mit Wurzel F und $\iota(F)=\text{wahr}$

Sei ϑ der Zweig in \mathcal{T} mit $\iota(\vartheta)=\text{wahr}$

1. Falls \mathcal{T}_1 nicht am Zweig ϑ erweitert, wähle $\vartheta_1=\vartheta$
2. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit α_i erweitert, ist der zugehörige α -Knoten auf ϑ und damit $\iota(\alpha_i)=\text{wahr}$. Wähle $\vartheta_1=\vartheta \circ [\alpha_i]$
3. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit β_1 und β_2 erweitert, ist $\beta \in \vartheta$ damit $\iota(\beta_1)=\text{wahr}$ oder $\iota(\beta_2)=\text{wahr}$. Wähle $\vartheta_1=\vartheta \circ [\beta_i]$ entsprechend.
4. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit $\gamma(t)$ erweitert, ist $\gamma \in \vartheta$. Wähle $\vartheta_1=\vartheta \circ [\gamma(t)]$

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F**
 $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F
 $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen
 $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig
- **Zeige durch strukturelle Induktion: \mathcal{T} Tableaux für F ,**
Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in \mathcal{T} erfüllbar

Basisfall: Hat \mathcal{T} nur einen Knoten F , dann wähle $\vartheta = [F]$

Schrittfall: Sei \mathcal{T}_1 direkte Erweiterung von \mathcal{T} mit Wurzel F und $\iota(F)=\text{wahr}$

Sei ϑ der Zweig in \mathcal{T} mit $\iota(\vartheta)=\text{wahr}$

1. Falls \mathcal{T}_1 nicht am Zweig ϑ erweitert, wähle $\vartheta_1 = \vartheta$
2. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit α_i erweitert, ist der zugehörige α -Knoten auf ϑ und damit $\iota(\alpha_i)=\text{wahr}$. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\alpha_i]$
3. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit β_1 und β_2 erweitert, ist $\beta \in \vartheta$ damit $\iota(\beta_1)=\text{wahr}$ oder $\iota(\beta_2)=\text{wahr}$. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\beta_i]$ entsprechend.
4. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit $\gamma(t)$ erweitert, ist $\gamma \in \vartheta$. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\gamma(t)]$
5. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit $\delta(a)$ erweitert, ist $\delta \in \vartheta$, a neu und damit $\iota_a^u(\delta(a))=\text{wahr}$ für ein $u \in \mathcal{U}$. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\delta(a)]$. Dann $\iota_a^u(\vartheta_1)=\text{wahr}$.

VOLLSTÄNDIGKEIT

X gültig, dann hat X^F ein geschlossenes Tableau

VOLLSTÄNDIGKEIT

X gültig, dann hat X^F ein geschlossenes Tableau

● Betrachte **vollständige Tableaux**

- Zweig ϑ ist eine Hintikka-Folge, wenn für alle $x \in \vartheta$ gilt
 - Das Komplement \bar{x} von x ist nicht in ϑ (H0)
 - Ist x vom Typ α , so ist $\alpha_1 \in \vartheta$ und $\alpha_2 \in \vartheta$ (H1)
 - Ist x vom Typ β , so ist $\beta_1 \in \vartheta$ oder $\beta_2 \in \vartheta$ (H2)
 - Ist x vom Typ γ , so ist $\gamma(t) \in \vartheta$ für jeden Term t (H3)
 - Ist x vom Typ δ , so ist $\delta(a) \in \vartheta$ für eine Variable a (H4)
- Zweig ϑ ist **vollständig**, wenn ϑ geschlossen oder eine Hintikka-Folge
Das Tableauxverfahren kann ϑ nicht mehr um neue Formeln erweitern
- \mathcal{T} ist **vollständig**, wenn jeder Zweig von \mathcal{T} vollständig ist

VOLLSTÄNDIGKEIT

X gültig, dann hat X^F ein geschlossenes Tableau

● Betrachte vollständige Tableaux

- Zweig ϑ ist eine Hintikka-Folge, wenn für alle $x \in \vartheta$ gilt
 - Das Komplement \bar{x} von x ist nicht in ϑ (H0)
 - Ist x vom Typ α , so ist $\alpha_1 \in \vartheta$ und $\alpha_2 \in \vartheta$ (H1)
 - Ist x vom Typ β , so ist $\beta_1 \in \vartheta$ oder $\beta_2 \in \vartheta$ (H2)
 - Ist x vom Typ γ , so ist $\gamma(t) \in \vartheta$ für jeden Term t (H3)
 - Ist x vom Typ δ , so ist $\delta(a) \in \vartheta$ für eine Variable a (H4)
- Zweig ϑ ist vollständig, wenn ϑ geschlossen oder eine Hintikka-Folge
Das Tableauxverfahren kann ϑ nicht mehr um neue Formeln erweitern
- \mathcal{T} ist vollständig, wenn jeder Zweig von \mathcal{T} vollständig ist

● Indirektes Argument auf Ebene der Zweige

1. Für jede Formel X hat X^F ein vollständiges Tableau
2. Ist X gültig, dann ist jedes vollständige Tableau für X^F geschlossen
 - $\Leftarrow X^F$ erfüllbar, falls X^F vollständiges und offenes Tableau hat
 - $\Leftarrow \vartheta$ vollständiger offener Tableauxzweig, dann ϑ erfüllbar

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT I

Für jede Formel X hat X^F ein vollständiges Tableau

- **Beschreibe systematische Beweismethode**

- Kritische Bedingung ist Axiom (H3): kann \mathcal{T} nicht geschlossen werden, dann müssen *alle* Instanzen von γ -Formeln erzeugt werden

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT I

Für jede Formel X hat X^F ein vollständiges Tableau

- Beschreibe **systematische Beweismethode**

- Kritische Bedingung ist Axiom (H3): kann \mathcal{T} nicht geschlossen werden, dann müssen *alle* Instanzen von γ -Formeln erzeugt werden

Beginne mit $\mathcal{T} = X^F$ und erweitere \mathcal{T} rekursiv wie folgt

- Ist \mathcal{T} geschlossen, dann ist X gültig und die Prozedur hält

- Ansonsten wähle einen noch nicht benutzten Knoten Y minimaler Tiefe und erweitere jeden offenen Zweig ϑ mit $Y \in \vartheta$ wie folgt

- Ist Y vom Typ α , dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$

- Ist Y vom Typ β , dann verzweige ϑ in $\vartheta \cup \{\beta_1\}$ und $\vartheta \cup \{\beta_2\}$

- Ist Y vom Typ γ , dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\gamma(t), \gamma\}$, wobei t der “erste” Term ist, der noch nicht in ϑ vorkommt

- Ist Y vom Typ δ , dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\delta(a)\}$, wobei a die erste Variable ist, die nicht in ϑ vorkommt

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT I

Für jede Formel X hat X^F ein vollständiges Tableau

- **Beschreibe systematische Beweismethode**

- Kritische Bedingung ist Axiom (H3): kann \mathcal{T} nicht geschlossen werden, dann müssen *alle* Instanzen von γ -Formeln erzeugt werden

Beginne mit $\mathcal{T} = X^F$ und erweitere \mathcal{T} rekursiv wie folgt

- Ist \mathcal{T} geschlossen, dann ist X gültig und die Prozedur hält

- Ansonsten wähle einen noch nicht benutzten Knoten Y minimaler Tiefe und erweitere jeden offenen Zweig ϑ mit $Y \in \vartheta$ wie folgt

- Ist Y vom Typ α , dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$

- Ist Y vom Typ β , dann verzweige ϑ in $\vartheta \cup \{\beta_1\}$ und $\vartheta \cup \{\beta_2\}$

- Ist Y vom Typ γ , dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\gamma(t), \gamma\}$, wobei t der “erste” Term ist, der noch nicht in ϑ vorkommt

- Ist Y vom Typ δ , dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\delta(a)\}$, wobei a die erste Variable ist, die nicht in ϑ vorkommt

Vollständigkeit: γ -Formeln werden kopiert und immer wieder neu instantiiert

Verfahren erzeugt unendliches Tableau, wenn X nicht gültig ist

Verfahren ist **sehr ineffizient**, nur für theoretische Betrachtungen relevant

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

ϑ vollständig und offen $\Rightarrow \vartheta$ erfüllbar

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

ϑ vollständig und offen $\Rightarrow \vartheta$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

ϑ vollständig und offen $\Rightarrow \vartheta$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**
 - Ist vollständig und offen, dann ist ϑ eine Hintikka-Folge

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

\mathcal{V} vollständig und offen $\Rightarrow \mathcal{V}$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**

- Ist vollständig und offen, dann ist \mathcal{V} eine Hintikka-Folge
- Wähle \mathcal{U} als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
- Definiere $\iota(P)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } P(t_1, \dots, t_n)^T \in \mathcal{V} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

\mathcal{V} vollständig und offen $\Rightarrow \mathcal{V}$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**

- Ist vollständig und offen, dann ist \mathcal{V} eine Hintikka-Folge
- Wähle \mathcal{U} als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
- Definiere $\iota(P)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } P(t_1, \dots, t_n)^T \in \mathcal{V} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

\mathcal{V} vollständig und offen $\Rightarrow \mathcal{V}$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**

- Ist vollständig und offen, dann ist \mathcal{V} eine Hintikka-Folge
- Wähle \mathcal{U} als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
- Definiere $\iota(P)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } P(t_1, \dots, t_n)^T \in \mathcal{V} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0

- **Zeige $\iota(F) = \text{wahr}$ für alle $F \in \mathcal{V}$**

Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel F

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

\mathcal{V} vollständig und offen $\Rightarrow \mathcal{V}$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**

- Ist vollständig und offen, dann ist \mathcal{V} eine Hintikka-Folge
- Wähle \mathcal{U} als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
- Definiere $\iota(P)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } P(t_1, \dots, t_n)^T \in \mathcal{V} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0

- **Zeige $\iota(F) = \text{wahr}$ für alle $F \in \mathcal{V}$**

Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel F

Basisfall: F atomar, dann $\iota(F) = \text{wahr}$ per Konstruktion

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

\mathcal{V} vollständig und offen $\Rightarrow \mathcal{V}$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**

- Ist vollständig und offen, dann ist \mathcal{V} eine Hintikka-Folge
- Wähle \mathcal{U} als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
- Definiere $\iota(P)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } P(t_1, \dots, t_n)^T \in \mathcal{V} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0

- **Zeige $\iota(F)=\text{wahr}$ für alle $F \in \mathcal{V}$**

Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel F

Basisfall: F atomar, dann $\iota(F)=\text{wahr}$ per Konstruktion

Schrittfall: Es gelte $\iota(X)=\text{wahr}$ für alle Teilformeln X von F mit $X \in \mathcal{V}$

- Ist F vom Typ α , so ist $\alpha_1 \in \mathcal{V}$ und $\alpha_2 \in \mathcal{V}$ wegen Axiom H1

Nach Induktionsannahme ist $\iota(\alpha_1)=\iota(\alpha_2)=\text{wahr}$ und damit $\iota(F)=\text{wahr}$

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

\mathcal{V} vollständig und offen $\Rightarrow \mathcal{V}$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**

- Ist vollständig und offen, dann ist \mathcal{V} eine Hintikka-Folge
- Wähle \mathcal{U} als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
- Definiere $\iota(P)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } P(t_1, \dots, t_n)^T \in \mathcal{V} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0

- **Zeige $\iota(F)=\text{wahr}$ für alle $F \in \mathcal{V}$**

Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel F

Basisfall: F atomar, dann $\iota(F)=\text{wahr}$ per Konstruktion

Schrittfall: Es gelte $\iota(X)=\text{wahr}$ für alle Teilformeln X von F mit $X \in \mathcal{V}$

- Ist F vom Typ α , so ist $\alpha_1 \in \mathcal{V}$ und $\alpha_2 \in \mathcal{V}$ wegen Axiom H1

Nach Induktionsannahme ist $\iota(\alpha_1)=\iota(\alpha_2)=\text{wahr}$ und damit $\iota(F)=\text{wahr}$

- Für F vom Typ β folgt $\iota(\beta_1)=\text{wahr}$ oder $\iota(\beta_2)=\text{wahr}$, also $\iota(F)=\text{wahr}$

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

\mathcal{V} vollständig und offen $\Rightarrow \mathcal{V}$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**

- Ist vollständig und offen, dann ist \mathcal{V} eine Hintikka-Folge
- Wähle \mathcal{U} als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
- Definiere $\iota(P)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } P(t_1, \dots, t_n)^T \in \mathcal{V} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0

- **Zeige $\iota(F)=\text{wahr}$ für alle $F \in \mathcal{V}$**

Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel F

Basisfall: F atomar, dann $\iota(F)=\text{wahr}$ per Konstruktion

Schrittfall: Es gelte $\iota(X)=\text{wahr}$ für alle Teilformeln X von F mit $X \in \mathcal{V}$

- Ist F vom Typ α , so ist $\alpha_1 \in \mathcal{V}$ und $\alpha_2 \in \mathcal{V}$ wegen Axiom H1
Nach Induktionsannahme ist $\iota(\alpha_1)=\iota(\alpha_2)=\text{wahr}$ und damit $\iota(F)=\text{wahr}$
- Für F vom Typ β folgt $\iota(\beta_1)=\text{wahr}$ oder $\iota(\beta_2)=\text{wahr}$, also $\iota(F)=\text{wahr}$
- Für F vom Typ γ folgt $\iota(\gamma(t))=\text{wahr}$ für jeden Term t , also $\iota(F)=\text{wahr}$
- Für x vom Typ δ folgt $\iota(\delta(a))=\text{wahr}$ für eine Variable a , also $\iota(F)=\text{wahr}$

VARIANTEN VON TABLEAUXBEWEISEN

- **Atomar geschlossene Tableaux**
 - \mathcal{T} **atomar geschlossen**, wenn jeder Zweig ein komplementäres Paar atomarer Formeln enthält

VARIANTEN VON TABLEAUXBEWEISEN

- **Atomar geschlossene Tableaux**
 - \mathcal{T} **atomar geschlossen**, wenn jeder Zweig ein komplementäres Paar atomarer Formeln enthält
 - Ist X gültig, dann gibt es ein atomar geschlossenes Tableau für X^F
 - Es reicht, atomare Formeln (**Literale**) auf Komplementarität zu prüfen

VARIANTEN VON TABLEAUXBEWEISEN

● Atomar geschlossene Tableaux

- \mathcal{T} **atomar geschlossen**, wenn jeder Zweig ein komplementäres Paar atomarer Formeln enthält
- Ist X gültig, dann gibt es ein **atomar geschlossenes Tableau** für X^F
- Es reicht, atomare Formeln (**Literale**) auf Komplementarität zu prüfen

● Block Tableaux

- **Lokale Sicht**: Knoten im Beweis enthalten alle unverarbeiteten Formeln
- Modifizierte Beweisregeln verarbeiten Menge von signierten Formeln

$$\begin{array}{c}
 \frac{S, \alpha}{S, \alpha_1, \alpha_2} \quad \frac{S, \beta}{S, \beta_1 \mid S, \beta_2} \quad \frac{S, \gamma}{S, \gamma, \gamma(t)} \quad \frac{S, \delta}{S, \delta(a)} \quad \frac{S, X^T, X^F}{\times}
 \end{array}$$

VARIANTEN VON TABLEAUXBEWEISEN

● Atomar geschlossene Tableaux

- \mathcal{T} **atomar geschlossen**, wenn jeder Zweig ein komplementäres Paar atomarer Formeln enthält
- Ist X gültig, dann gibt es ein **atomar geschlossenes Tableau** für X^F
- Es reicht, atomare Formeln (**Literale**) auf Komplementarität zu prüfen

● Block Tableaux

- **Lokale Sicht**: Knoten im Beweis enthalten alle unverarbeiteten Formeln
- Modifizierte Beweisregeln verarbeiten Menge von signierten Formeln

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{S, \alpha}{S, \alpha_1, \alpha_2} & \frac{S, \beta}{S, \beta_1 \mid S, \beta_2} & \frac{S, \gamma}{S, \gamma, \gamma(t)} & \frac{S, \delta}{S, \delta(a)} & \frac{S, X^T, X^F}{\times}
 \end{array}$$

- **Block Tableaux** können **analytische Tableaux** simulieren und umgekehrt

VARIANTEN VON TABLEAUXBEWEISEN

● Atomar geschlossene Tableaux

- \mathcal{T} **atomar geschlossen**, wenn jeder Zweig ein komplementäres Paar atomarer Formeln enthält
- Ist X gültig, dann gibt es ein atomar geschlossenes Tableau für X^F
- Es reicht, atomare Formeln (**Literale**) auf Komplementarität zu prüfen

● Block Tableaux

- **Lokale Sicht**: Knoten im Beweis enthalten alle unverarbeiteten Formeln
- Modifizierte Beweisregeln verarbeiten Menge von signierten Formeln

$$\frac{S, \alpha}{S, \alpha_1, \alpha_2} \quad \frac{S, \beta}{S, \beta_1 \mid S, \beta_2} \quad \frac{S, \gamma}{S, \gamma, \gamma(t)} \quad \frac{S, \delta}{S, \delta(a)} \quad \frac{S, X^T, X^F}{\times}$$

- Block Tableaux können analytische Tableaux simulieren und umgekehrt
 - Block Tableaux sind isomorph zu analytischen Sequenzenbeweisen
- ↳ **Der Sequenzenkalkül ist korrekt und vollständig**

BLOCK TABLEAUX REGELN VS. SEQUENZENREGELN

T	F	$-L$	$-R$
$\frac{S, A \wedge B^T}{S, A^T, B^T}$	$\frac{S, A \wedge B^F}{S, A^F \mid S, B^F}$	$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \wedge B}{\Gamma \vdash \Phi, A \mid \Gamma \vdash \Phi, B}$
$\frac{S, A \vee B^T}{S, A^T \mid S, B^T}$	$\frac{S, A \vee B^F}{S, A^F, B^F}$	$\frac{\Gamma, A \vee B \vdash \Phi}{\Gamma, A \vdash \Phi \mid \Gamma, B \vdash \Phi}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B}{\Gamma \vdash \Phi, A, B}$
$\frac{S, A \Rightarrow B^T}{S, A^F \mid S, B^T}$	$\frac{S, A \Rightarrow B^F}{S, A^T, B^F}$	$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, A \mid \Gamma, B \vdash \Phi}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \Rightarrow B}{\Gamma, A \vdash \Phi, B}$
$\frac{S, \neg A^T}{S, A^F}$	$\frac{S, \neg A^F}{S, A^T}$	$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, A}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, \neg A}{\Gamma, A \vdash \Phi}$
$\frac{S, \forall x A^T}{S, A[t/x]^T}$	$\frac{S, \forall x A^F}{S, A[a/x]^F}$	$\frac{\Gamma, \forall x A \vdash \Phi}{\Gamma, A[t/x] \vdash \Phi}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, \forall x A}{\Gamma \vdash \Phi, A[a/x]}$
$\frac{S, \exists x A^T}{S, A[a/x]^T}$	$\frac{S, \exists x A^F}{S, A[t/x]^F}$	$\frac{\Gamma, \exists x A \vdash \Phi}{\Gamma, A[a/x] \vdash \Phi}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, \exists x A}{\Gamma \vdash \Phi, A[t/x]}$
$\frac{S, X^T, X^F}{\times}$		$\frac{\Gamma, X \vdash \Phi, X}{\times}$	

SEQUENZENKALKÜL VS. BLOCK TABLEAUX

- **Formal ineinander übersetzbar**

- Block Tableaux verwalten nur eine Menge von (signierten) Formeln
- Antezedentformel X wird zu Vorzeichen T
- Sukzedentformel X wird zu Vorzeichen F
- Logische Regeln werden identisch
- Strukturelle Regeln werden durch Verarbeitung von Mengen erfaßt

SEQUENZENKALKÜL VS. BLOCK TABLEAUX

● Formal **ineinander übersetzbar**

- Block Tableaux verwalten nur eine Menge von (signierten) Formeln
- Antezedentformel X wird zu Vorzeichen T
- Sukzedentformel X wird zu Vorzeichen F
- Logische Regeln werden identisch
- Strukturelle Regeln werden durch Verarbeitung von Mengen erfaßt

● Grundlegende **Ideen sehr verschieden**

	Tableaux – indirekter Beweis	Sequenzen – direkter Beweis
Ziel	X^F : Suche Widerlegung für X	$\vdash X$: Suche Beweis für X
α -Schritt	Widerlegung braucht α_1 <i>und</i> α_2	Beweis muß α_1 <i>oder</i> α_2 zeigen
β -Schritt	Widerlegung braucht β_1 <i>oder</i> β_2	Beweis muß β_1 <i>und</i> β_2 zeigen
Abschluß	Keine Widerlegung möglich	(Partieller) Beweis erfolgreich
Offenes Blatt	Gegenbeispiel gefunden	Kein Beweis möglich

AUTOMATISCHES BEWEISEN MIT TABLEAUX

- **Systematische Prozedur ist unpraktikabel**
 - Auswahl zu zerlegender Formeln mit Breitensuche
 - γ -Formeln werden “der Reihe nach” instantiiert
 - **Extrem lange Beweise** auch für kleine Formeln
 - Menschen gehen erheblich zielorientierter / effizienter vor

AUTOMATISCHES BEWEISEN MIT TABLEAUX

- **Systematische Prozedur ist unpraktikabel**

- Auswahl zu zerlegender Formeln mit Breitensuche
- γ -Formeln werden “der Reihe nach” instantiiert
- **Extrem lange Beweise** auch für kleine Formeln
- Menschen gehen erheblich zielorientierter / effizienter vor

- **Viele Schritte sind schematisch**

- Ziel der Regelanwendungen ist **Erzeugung eines komplementären Formelpaars**
- **Identifizierung komplementärer Formelteile** bestimmt, welche Teilformeln wann zerlegt werden und mit welchen Termen γ -Formeln instantiiert werden
- Da auf jede Formel nur eine Regel anwendbar ist, liegen alle Beweisschritte fest, sobald komplementäre Formelteile und Substitutionen bekannt sind
- Bestimmung dieser Information ist das Ziel von **Matrixmethoden**

AUTOMATISCHES BEWEISEN MIT TABLEAUX

- **Systematische Prozedur ist unpraktikabel**
 - Auswahl zu zerlegender Formeln mit Breitensuche
 - γ -Formeln werden “der Reihe nach” instantiiert
 - **Extrem lange Beweise** auch für kleine Formeln
 - Menschen gehen erheblich zielorientierter / effizienter vor
- **Viele Schritte sind schematisch**
 - Ziel der Regelanwendungen ist **Erzeugung eines komplementären Formelpaars**
 - **Identifizierung komplementärer Formelteile** bestimmt, welche Teilformeln wann zerlegt werden und mit welchen Termen γ -Formeln instantiiert werden
 - Da auf jede Formel nur eine Regel anwendbar ist, liegen alle Beweisschritte fest, sobald komplementäre Formelteile und Substitutionen bekannt sind
 - Bestimmung dieser Information ist das Ziel von **Matrixmethoden**
- **Alternativ: Analytische Tableaux mit freien Variablen**
 - Formeln werden bis zu Literalen zerlegt
 - γ -Formeln werden mit freien Variablen instantiiert
 - **Substitution** für freie Variablen **wird im Komplementaritätstest bestimmt**