Inferenzmethoden

Einheit 2

Verdichtung des logischen Schließens I
Tableauxkalküle

1. Verdichtung als Entwicklungsprinzip
2. Tableauxbeweise
3. Korrektheit und Vollständigkeit
4. Zusammenhang zu Sequenzenkalkülen

Sequenzenkalküle sind ineffizient

- **Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur**

$$\begin{array}{lll} \texttt{orL}\ i & \Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C & \qquad \Gamma \vdash A \wedge B \quad \texttt{andR} \\ & \qquad \Gamma, A, \Delta \vdash C & \qquad \quad \Gamma \vdash A \\ & \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash C & \qquad \quad \Gamma \vdash B \end{array}$$

  – Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen

- **Sequenzenbeweise enthalten viel Redundanz**
  – Jeder Knoten enthält alle gültigen Annahmen und die Konklusion
  – Regeln zerlegen und kopieren Syntaxbaum von Formeln
  – Kalkül sollte direkt auf Syntaxbaum operieren

- **Beweissuche erfordert Vorausschau**
  – Inferenzregeln basieren auf Konnektiven und Quantoren
    · Welche Hypothese soll zerlegt werden?
    · Welcher Teil einer Disjunktion soll gezeigt werden?
    · Welche Substitution soll bei Quantorenzerlegung benutzt werden?
  – Auswahl hat Anwendbarkeit der Regel `hypothesis` zum Ziel
  – Beweisuche sollte auf möglichem Abschluß von Beweisästen basieren

Verdichtung von Beweismethoden

Entferne Redundanz aus mathematischen Beweisen

- **Formale Logik** ✓
  - Repräsentation mathematischer Aussagen in präziser Sprache
- **Kalküle des natürlichen Schließens** ✓
  - Schematische Inferenzfiguren für logische Konnektive
- **Sequenzenkalküle** ✓
  - Lokale Verwaltung von Annahmen vereinfacht Anwendung von Regeln
  - Analytische Formulierung unterstützt Beweissuche
- **Tableaux-Kalküle**
  - Zusammenfassung strukturell gleichartiger Inferenzregeln in Klassen
- **Matrix-Kalküle**
  - Kompakte Beweisrepräsentation durch Beweisführung im Formelbaum
  - Gezielte Auswahl beweisrelevanter Teilformeln durch Konnektionen
  - Gezielte Instantiierung von Quantoren durch Unifikation

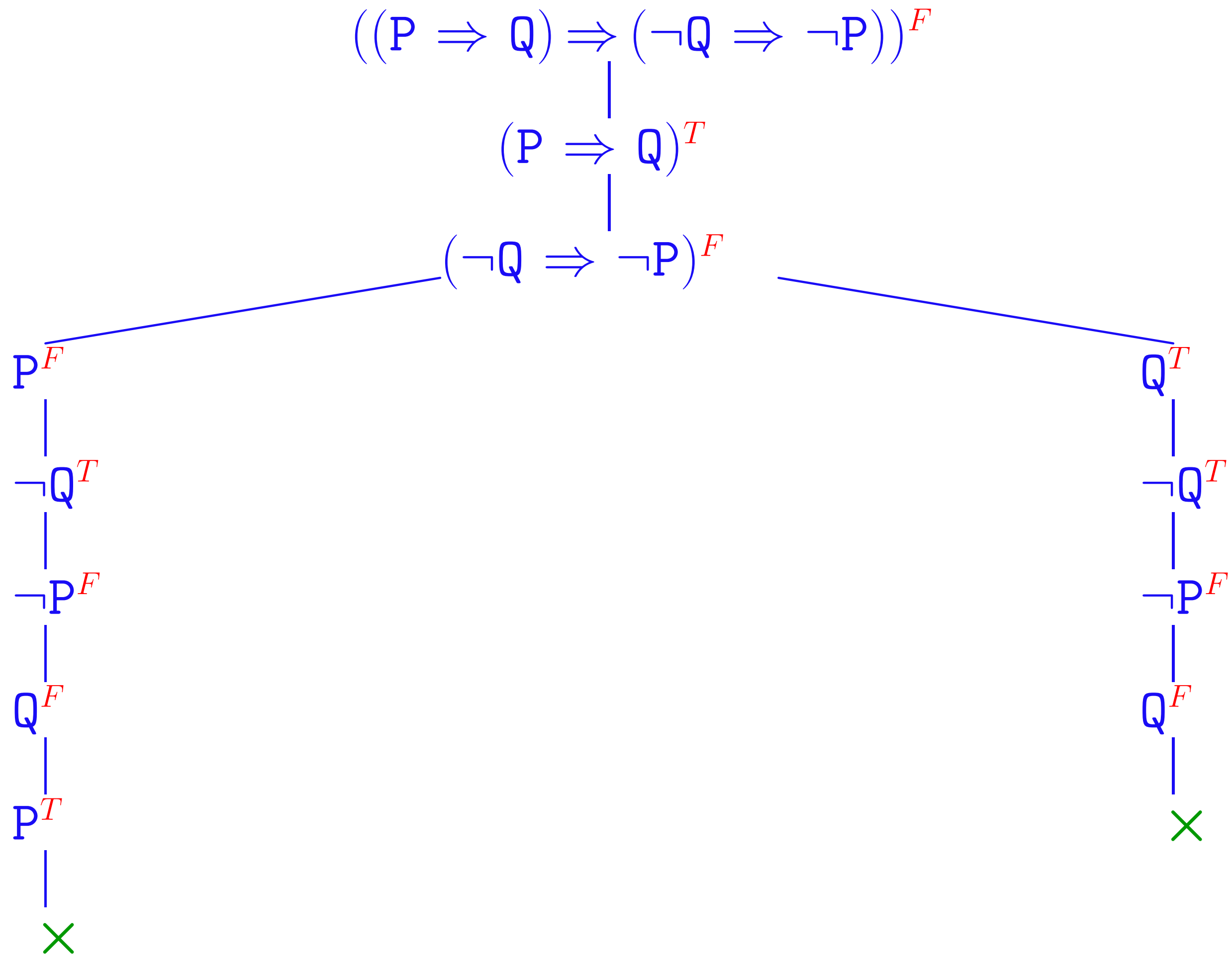
Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen repräsentieren Sequenzen**
  - **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
  - Keine strukturellen Regeln erforderlich
- **Regeln gruppiert in Klassen ähnlicher Struktur**
  - `andL` und `orR`: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ α**
  - `andR` und `orL`: Dekomposition verzweigt Beweis **Typ β**
  - `allL` und `exR`: Dekomposition instantiiert Variable mit Term **Typ γ**
  - `allR` und `exL`: Dekomposition deklariert neue Variable **Typ δ**
- **Komplementarität ersetzt `hypothesis` Regel**
  - Gleiche Formeln mit verschiedener Polarität schließen Beweisast ab
- **Effizientere Beweisführung**
  - Weniger Regeln – Komplementaritätstest etwas schwerer für Menschen

Unabhängig vom Sequenzenkalkül entstanden

- **Begründung über indirekte Beweisführung**
  - Statt $\vdash F$ beweise, daß $\neg F$ nicht gelten kann
  - Zeige, daß alle möglichen Konsequenzen von $\neg F$ zum Widerspruch führen
- **Regeln beschreiben logische Gesetze**
  - Wenn $\neg X^T$, dann X^F
  - Wenn $\neg X^F$, dann X^T
  - Wenn $X \wedge Y^T$, dann X^T und Y^T
  - Wenn $X \vee Y^F$, dann X^F und Y^F
  - Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann X^T und Y^F
  - Wenn $X \wedge Y^F$, dann X^F oder Y^F
  - Wenn $X \vee Y^T$, dann X^T oder Y^T
  - Wenn $X \Rightarrow Y^T$, dann X^F oder Y^T
- **Polarität verkürzt Schreibweise**
  - $X^T \mathrel{\hat{=}} X$ ist wahr, $X^F \mathrel{\hat{=}} X$ ist falsch

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$



Alle Zweige widersprüchlich, Originalformel gültig

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$

$$\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P)\big)^F$$

$$(P \Rightarrow Q)^T$$

$$(\neg Q \Rightarrow P)^F$$

$$\neg Q^T$$

$$P^F$$

$$Q^F$$

$$P^F \qquad\qquad\qquad Q^T$$

$$\times$$

Offener Zweig liefert Gegenbeispiel P^F, Q^F

Aussagenlogische Tableauxregeln schematisiert

- **Typ α (konjunktiv): Verlängerung des Beweiszweigs**
  - Wenn $\neg X^T$, dann X^F
  - Wenn $\neg X^F$, dann X^T
  - Wenn $X \wedge Y^T$, dann X^T und Y^T
  - Wenn $X \vee Y^F$, dann X^F und Y^F
  - Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann X^T und Y^F

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

- **Typ β (disjunktiv): Verzweigung des Beweises**
  - Wenn $X \wedge Y^F$, dann X^F oder Y^F
  - Wenn $X \vee Y^T$, dann X^T oder Y^T
  - Wenn $X \Rightarrow Y^T$, dann X^F oder Y^T

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

- **Teilformeln bestimmt durch Konnektiv und Polarität**

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	–	–
β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$		
β_1	X^F	X^T	X^F		
β_2	Y^F	Y^T	Y^T		

Prädikatenlogische Tableauxregeln

- **Typ γ: Instantiierung einer Variablen**
  – Wenn $\forall x A^T$, dann $A[t/x]^T$ für beliebiges t
  – Wenn $\exists x A^F$, dann $A[t/x]^F$ für beliebiges t

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{t})}$$

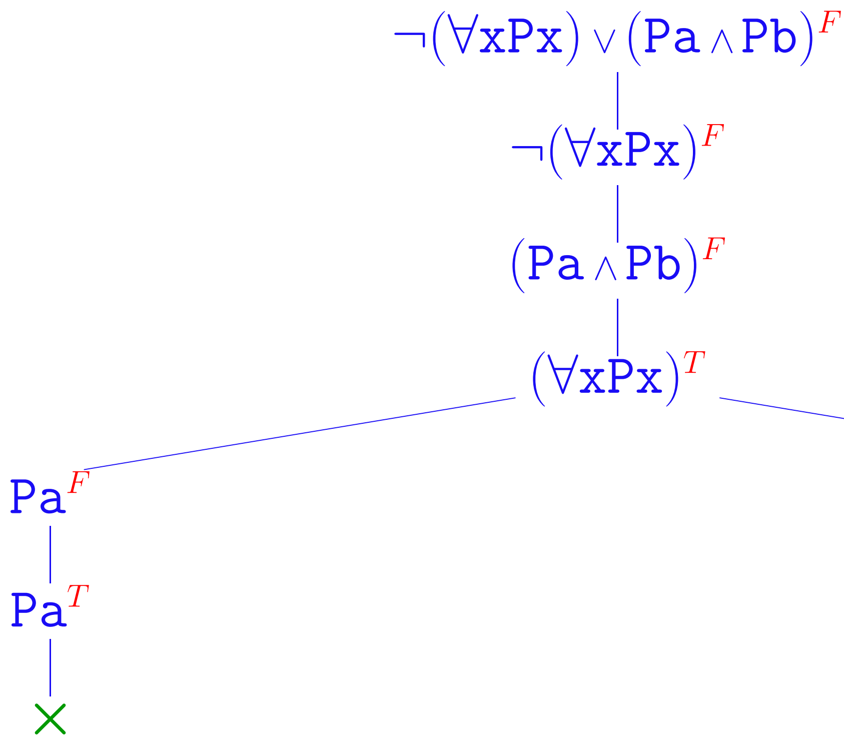
- **Typ δ: Deklaration einer neuen Variablen**
  – Wenn $\forall x A^F$, dann $A[a/x]^F$ für ein gewisses, festes a
  – Wenn $\exists x A^T$, dann $A[a/x]^T$ für ein gewisses, festes a
  – Da a unbekannt ist, muß eine neue Variable gewählt werden

$$\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{a})}$$

- **Teilformeln tabellarisch bestimmt**

γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$	δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$
$\gamma(t)$	$A[t/x]^T$	$A[t/x]^F$	$\delta(a)$	$A[a/x]^F$	$A[a/x]^T$

Tableauxbeweis für $\neg(\forall x\ Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



Zwei verschiedene Instanzen derselben Formel

Beweis für $(\forall x\ Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x\ Px) \Rightarrow (\forall x\ Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

$$Pa^T$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$\begin{array}{ccc} Pa^F & \qquad\qquad & Qa^T \\ \times & & \times \end{array}$$

$\forall x\ Qx$ **muß vor den γ-Knoten zerlegt werden**

Tableaux präzisiert

- **Signierte Formel**
  - Formel X mit Vorzeichen T oder F, geschrieben als $\mathrm{X}^{\boldsymbol{T}}$ bzw. $\mathrm{X}^{\boldsymbol{F}}$
  - Interpretation: $\boldsymbol{\iota(X^T)} = \iota(X)$, $\boldsymbol{\iota(X^F)} = \iota(\neg X)$
  - X^T und X^F sind komplementär zueinander
- **Analytisches Tableau für signierte Formel $\boldsymbol{F}$**
  - Binärer geordneter Baum $\mathcal{T}$ mit Wurzel F
  - Für jeden Knoten y mit Nachfolger z gibt es einen Vorfahren x mit
    - · Ist x vom Typ α, so ist z entweder α_1 oder α_2
    - · Ist x vom Typ γ, so ist $z = \gamma(t)$ für einen Term t
    - · Ist x vom Typ δ, so ist $z = \delta(a)$ für eine neue Variable a.
  - Für jeden Knoten y mit Nachfolgern z_1 und z_2 gibt es einen Vorfahren x vom Typ β mit $z_1 = \beta_1$ und $z_2 = \beta_2$
- **$\boldsymbol{\mathcal{T}_1}$ direkte Erweiterung von $\boldsymbol{\mathcal{T}}$**
  - $\mathcal{T}_1$ entsteht aus $\mathcal{T}$ durch Anwendung einer Regel auf einen Zweig ϑ von $\mathcal{T}$

- **Zweig ϑ=[F_0,F_1...,F_n] im Tableau**
  - Liste der (signierten) Formeln zwischen Wurzel F_0 und Blatt F_n
  - Interpretation: $\iota(\vartheta) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \iota(F)=\textsf{wahr} \text{ für alle } F \in \vartheta \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- **Geschlossenes Tableau $\mathcal{T}$**
  - Zweig ϑ ist geschlossen, wenn er ein komplementäres Formelpaar enthält
  - Geschlossene Zweige sind unerfüllbar
  - $\mathcal{T}$ ist geschlossen, wenn jeder Zweig geschlossen ist
- **Tableauxbeweis für Formel X**
  - Geschlossenes Tableau für X^F

Korrektheit von Tableauxbeweisen

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X), \quad \iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- **Wenn** $\iota(\alpha)$, **dann** $\iota(\alpha_1)$ **und** $\iota(\alpha_2)$
- **Wenn** $\iota(\beta)$, **dann** $\iota(\beta_1)$ **oder** $\iota(\beta_2)$
- **Wenn** $\iota(\gamma)$, **dann** $\iota(\gamma(t))$ **für jeden Term** t
- **Wenn** $\iota(\delta)$, **dann** $\iota_a^u(\delta(a))$ **für ein neues** a **und** $u \in \mathcal{U}$
  Wichtig: wenn a in einer Formel Y nicht vorkommt, dann ist $\iota_a^u(Y) = \iota(Y)$

Klassifizierung vereinfacht Tableaux-Verfahren und Nachweis seiner Eigenschaften

Nachweis der Korrektheit

- **Zu zeigen: X gültig, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für $\mathbf{X}^F$**

  $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für X^F

  $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen

  $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig

- **Zeige durch strukturelle Induktion: $\mathcal{T}$ Tableaux für F,**
  Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in $\mathcal{T}$ erfüllbar

  Basisfall: Hat $\mathcal{T}$ nur einen Knoten F, dann wähle $\vartheta = [F]$

  Schrittfall: Sei $\mathcal{T}_1$ direkte Erweiterung von $\mathcal{T}$ mit Wurzel F und $\iota(F)$=wahr

  Sei ϑ der Zweig in $\mathcal{T}$ mit $\iota(\vartheta)$=wahr

  1. Falls $\mathcal{T}_1$ nicht am Zweig ϑ erweitert, wähle $\vartheta_1 = \vartheta$
  2. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig ϑ mit α_i erweitert, ist der zugehörige α-Knoten auf ϑ und damit $\iota(\alpha_i)$=wahr. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\alpha_i]$
  3. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig ϑ mit β_1 und β_2 erweitert, ist $\beta \in \vartheta$ damit $\iota(\beta_1)$=wahr oder $\iota(\beta_2)$=wahr. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\beta_i]$ entsprechend.
  4. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig ϑ mit $\gamma(t)$ erweitert, ist $\gamma \in \vartheta$. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\gamma(t)]$
  5. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig ϑ mit $\delta(a)$ erweitert, ist $\delta \in \vartheta$, a neu und damit $\iota_a^u(\delta(a))$=wahr für ein $u \in \mathcal{U}$. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\delta(a)]$. Dann $\iota_a^u(\vartheta_1)$=wahr.

Vollständigkeit

X gültig, dann hat $\mathbf{X}^F$ ein geschlossenes Tableau

- **Betrachte vollständige Tableaux**
  - Zweig ϑ ist eine Hintikka-Folge, wenn für alle $x \in \vartheta$ gilt
    - Das Komplement $\bar{x}$ von x ist nicht in ϑ (H0)
    - Ist x vom Typ α, so ist $\alpha_1 \in \vartheta$ und $\alpha_2 \in \vartheta$ (H1)
    - Ist x vom Typ β, so ist $\beta_1 \in \vartheta$ oder $\beta_2 \in \vartheta$ (H2)
    - Ist x vom Typ γ, so ist $\gamma(t) \in \vartheta$ für jeden Term t (H3)
    - Ist x vom Typ δ, so ist $\delta(a) \in \vartheta$ für eine Variable a (H4)
  - Zweig ϑ ist vollständig, wenn ϑ geschlossen oder eine Hintikka-Folge
    Das Tableauxverfahren kann ϑ nicht mehr um neue Formeln erweitern
  - $\mathcal{T}$ ist vollständig, wenn jeder Zweig von $\mathcal{T}$ vollständig ist
- **Indirektes Argument auf Ebene der Zweige**
  1. **Für jede Formel X hat $\mathbf{X}^F$ ein vollständiges Tableau**
  2. Ist X gültig, dann ist jedes vollständige Tableau für X^F geschlossen

     $\Leftarrow$ X^F erfüllbar, falls X^F vollständiges und offenes Tableau hat

     $\Leftarrow$ **ϑ vollständiger offener Tableauzweig, dann ϑ erfüllbar**

Nachweis der Vollständigkeit I

Für jede Formel X hat X^F ein vollständiges Tableau

- **Beschreibe systematische Beweismethode**
  – Kritische Bedingung ist Axiom (H3): kann $\mathcal{T}$ nicht geschlossen werden, dann müssen *alle* Instanzen von γ-Formeln müssen erzeugt werden

Beginne mit $\mathcal{T} = X^F$ und erweitere $\mathcal{T}$ rekursiv wie folgt

– Ist $\mathcal{T}$ geschlossen, dann ist X gültig und die Prozedur hält

– Ansonsten wähle einen noch nicht benutzten Knoten Y minimaler Tiefe und erweitere jeden offenen Zweig ϑ mit $Y \in \vartheta$ wie folgt

- Ist Y vom Typ α, dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$
- Ist Y vom Typ β, dann verzweige ϑ in $\vartheta \cup \{\beta_1\}$ und $\vartheta \cup \{\beta_2\}$
- Ist Y vom Typ γ, dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\gamma(t), \gamma\}$, wobei t der "erste" Term ist, der noch nicht in ϑ vorkommt
- Ist Y vom Typ δ, dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\delta(a)\}$, wobei a die erste Variable ist, die nicht in ϑ vorkommt

Vollständigkeit: γ-Formeln werden kopiert und immer wieder neu instantiiert

Verfahren erzeugt unendliches Tableau, wenn X nicht gültig ist

Verfahren ist sehr ineffizient, nur für theoretische Betrachtungen relevant

Nachweis der Vollständigkeit II

ϑ vollständig und offen $\Rightarrow$ ϑ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**
  - Ist vollständig und offen, dann ist ϑ eine Hintikka-Folge
  - Wähle $\mathcal{U}$ als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
  - Definiere $\iota(P)(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls } P(t_1, ..., t_n)^T \in \vartheta \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
  - ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0
- **Zeige $\iota(F)$=wahr für alle $F \in \vartheta$**

  Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel F

  Basisfall: F atomar, dann $\iota(F)$=wahr per Konstruktion

  Schrittfall: Es gelte $\iota(X)$=wahr für alle Teilformeln X von F mit $X \in \vartheta$
  - Ist F vom Typ α, so ist $\alpha_1 \in \vartheta$ und $\alpha_2 \in \vartheta$ wegen Axiom H1

    Nach Induktionsannahme ist $\iota(\alpha_1)=\iota(\alpha_2)$=wahr und damit $\iota(F)$=wahr
  - Für F vom Typ β folgt $\iota(\beta_1)$=wahr oder $\iota(\beta_2)$=wahr, also $\iota(F)$=wahr
  - Für F vom Typ γ folgt $\iota(\gamma(t))$=wahr für jeden Term t, also $\iota(F)$=wahr
  - Für x vom Typ δ folgt $\iota(\delta(a))$=wahr für eine Variable a, also $\iota(F)$=wahr

Varianten von Tableauxbeweisen

- **Atomar geschlossene Tableaux**
  - $\mathcal{T}$ atomar geschlossen, wenn jeder Zweig ein komplementäres Paar atomarer Formeln enthält
  - Ist X gültig, dann gibt es ein atomar geschlossenes Tableau für X^F
  - Es reicht, atomare Formeln (Literale) auf Komplementarität zu prüfen
- **Block Tableaux**
  - Lokale Sicht: Knoten im Beweis enthalten alle unverarbeiteten Formeln
  - Modifizierte Beweisregeln verarbeiten Menge von signierten Formeln

$$\frac{S,\alpha}{S,\alpha_1,\alpha_2} \qquad \frac{S,\beta}{S,\beta_1 \mid S,\beta_2} \qquad \frac{S,\gamma}{S,\gamma,\gamma(t)} \qquad \frac{S,\delta}{S,\delta(a)} \qquad \frac{S,X^T,X^F}{\times}$$

  - Block Tableaux können analytische Tableaux simulieren und umgekehrt
  - Block Tableaux sind isomorph zu analytischen Sequenzenbeweisen

$\mapsto$ **Der Sequenzenkalkül ist korrekt und vollständig**

Block Tableaux Regeln vs. Sequenzenregeln

T	F	$\vdash L$	$\vdash R$
$\dfrac{S, A \wedge B^T}{S, A^T, B^T}$	$\dfrac{S, A \wedge B^F}{S, A^F \mid S, B^F}$	$\dfrac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \wedge B}{\Gamma \vdash \Phi, A \mid \Gamma \vdash \Phi, B}$
$\dfrac{S, A \vee B^T}{S, A^T \mid S, B^T}$	$\dfrac{S, A \vee B^F}{S, A^F, B^F}$	$\dfrac{\Gamma, A \vee B \vdash \Phi}{\Gamma, A \vdash \Phi \mid \Gamma, B \vdash \Phi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B}{\Gamma \vdash \Phi, A, B}$
$\dfrac{S, A \Rightarrow B^T}{S, A^F \mid S, B^T}$	$\dfrac{S, A \Rightarrow B^F}{S, A^T, B^F}$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, A \mid \Gamma, B \vdash \Phi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \Rightarrow B}{\Gamma, A \vdash \Phi, B}$
$\dfrac{S, \neg A^T}{S, A^F}$	$\dfrac{S, \neg A^F}{S, A^T}$	$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \neg A}{\Gamma, A \vdash \Phi}$
$\dfrac{S, \forall x\ A^T}{S, A[t/x]^T}$	$\dfrac{S, \forall x\ A^F}{S, A[a/x]^F}$	$\dfrac{\Gamma, \forall x A \vdash \Phi}{\Gamma, A[t/x] \vdash \Phi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \forall x A}{\Gamma \vdash \Phi, A[a/x]}$
$\dfrac{S, \exists x\ A^T}{S, A[a/x]^T}$	$\dfrac{S, \exists x\ A^F}{S, A[t/x]^F}$	$\dfrac{\Gamma, \exists x A \vdash \Phi}{\Gamma, A[a/x] \vdash \Phi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \exists x A}{\Gamma \vdash \Phi, A[t/x]}$
$\dfrac{S, X^T, X^F}{\times}$		$\dfrac{\Gamma, X \vdash \Phi, X}{\times}$	

Sequenzenkalkül vs. Block Tableaux

- **Formal ineinander übersetzbar**
  - Block Tableaux verwalten nur eine Menge von (signierten) Formeln
  - Antezedentformel X wird zu Vorzeichen T
  - Sukzedentformel X wird zu Vorzeichen F
  - Logische Regeln werden identisch
  - Strukturelle Regeln werden durch Verarbeitung von Mengen erfaßt

- **Grundlegende Ideen sehr verschieden**

	Tableaux – indirekter Beweis	Sequenzen – direkter Beweis
Ziel	X^F: Suche Widerlegung für X	$\vdash X$: Suche Beweis für X
α-Schritt	Widerlegung braucht α_1 *und* α_2	Beweis muß α_1 *oder* α_2 zeigen
β-Schritt	Widerlegung braucht β_1 *oder* β_2	Beweis muß β_1 *und* β_2 zeigen
Abschluß	Keine Widerlegung möglich	(Partieller) Beweis erfolgreich
Offenes Blatt	Gegenbeispiel gefunden	Kein Beweis möglich

Automatisches Beweisen mit Tableaux

- **Systematische Prozedur ist unpraktikabel**
  - Auswahl zu zerlegender Formeln mit Breitensuche
  - γ-Formeln werden "der Reihe nach" instantiiert
  - Extrem lange Beweise auch für kleine Formeln
  - Menschen gehen erheblich zielorienterter / effizienter vor
- **Viele Schritte sind schematisch**
  - Ziel der Regelanwendungen ist Erzeugung eines komplementären Formelpaars
  - Identifizierung komplementärer Formelteile bestimmt, welche Teilformeln wann zerlegt werden und mit welchen Termen γ-Formeln instantiiert werden
  - Da auf jede Formel nur eine Regel anwendbar ist, liegen alle Beweisschritte fest, sobald komplementäre Formelteile und Substitutionen bekannt sind
  - Bestimmung dieser Information ist das Ziel von Matrixmethoden
- **Alternativ: Analytische Tableaux mit freien Variablen**
  - Formeln werden bis zu Literalen zerlegt
  - γ-Formeln werden mit freien Variablen instantiiert
  - Substitution für freie Variablen wird im Komplementaritätstest bestimmt