

Inferenzmethoden



Einheit 3



Verdichtung des logischen Schließens II Matrix-Beweise

1. Verdichtung von Tableauxbeweisen
2. Der Matrixkalkül
3. Zweidimensionale Repräsentation

- **Bestimme relevante Beweisinformation**

- Welche komplementären Teilformeln schließen einen Beweisweig ab?
- Welche Terme sind für γ -Variablen einzusetzen?
- In welcher Reihenfolge sind Beweisregeln anzuwenden?

Information reicht, um Tableauxbeweis ohne Suche zu konstruieren

● Bestimme relevante Beweisinformation

- Welche komplementären Teilformeln schließen einen Beweisweig ab?
- Welche Terme sind für γ -Variablen einzusetzen?
- In welcher Reihenfolge sind Beweisregeln anzuwenden?

Information reicht, um Tableauxbeweis ohne Suche zu konstruieren

● Kompakte Beweisrepräsentation

- Nur atomare Teilformeln (**Literale**) sind beweisrelevant
- Beweisweige repräsentierbar durch “**Pfade**” im Formelbaum
- Beweisführung im Formelbaum vermeidet Erzeugung von Formelkopien

● Bestimme relevante Beweisinformation

- Welche komplementären Teilformeln schließen einen Beweisweig ab?
- Welche Terme sind für γ -Variablen einzusetzen?
- In welcher Reihenfolge sind Beweisregeln anzuwenden?

Information reicht, um Tableauxbeweis ohne Suche zu konstruieren

● Kompakte Beweisrepräsentation

- Nur atomare Teilformeln (**Literale**) sind beweisrelevant
- Beweisweige repräsentierbar durch “**Pfade**” im Formelbaum
- Beweisführung im Formelbaum vermeidet Erzeugung von Formelkopien

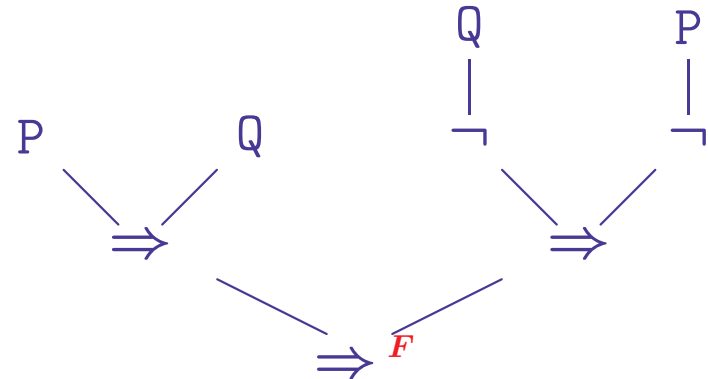
● Zielorientiertes Vorgehen

- Verfolge **Konnektionen** bei Suche nach komplementären Literalen
- Gezielte Instantiierung von Quantoren durch **Unifikation**
- **Reduktionsordnung** bestimmt durch Baumordnung und Substitution

MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$



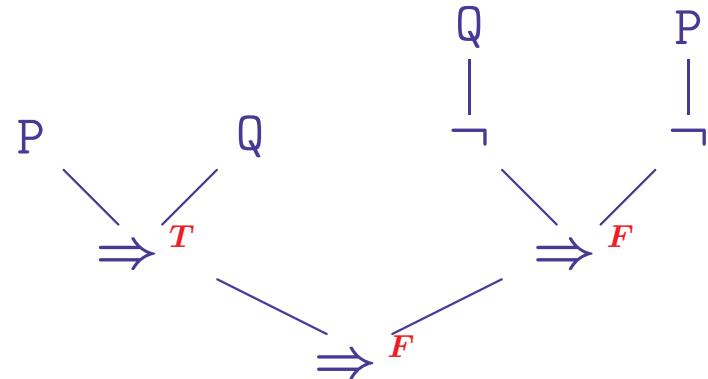
MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis

→ $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

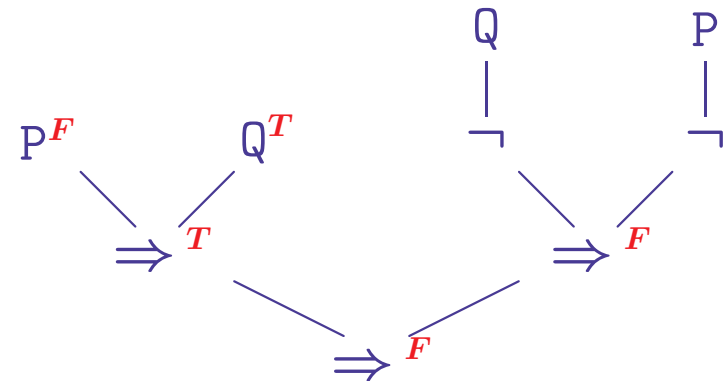
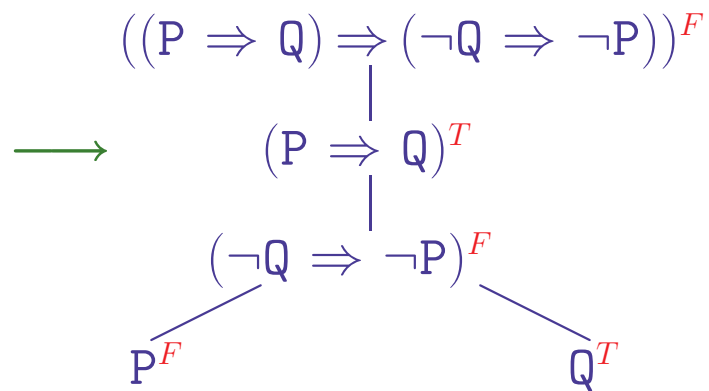
$(P \Rightarrow Q)^T$

$(\neg Q \Rightarrow \neg P)^F$



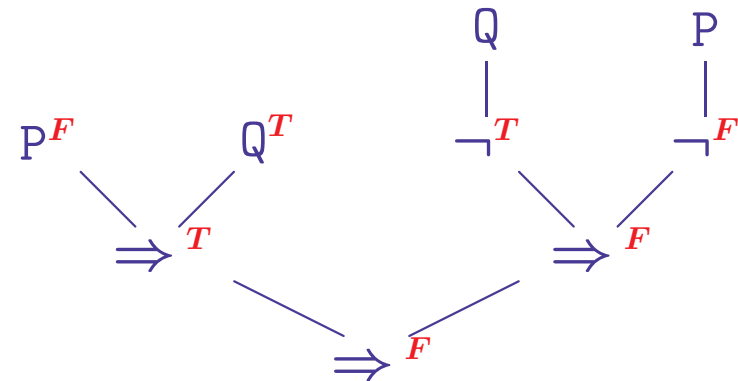
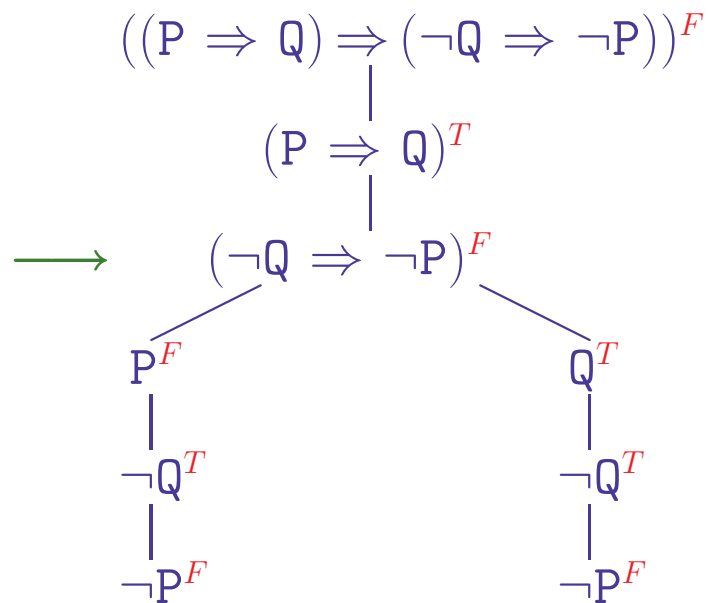
MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis



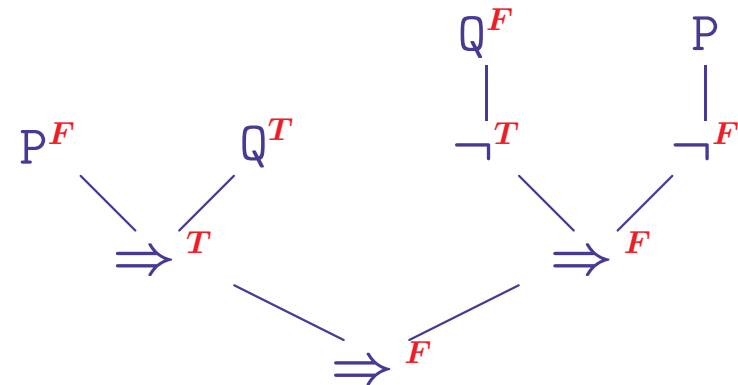
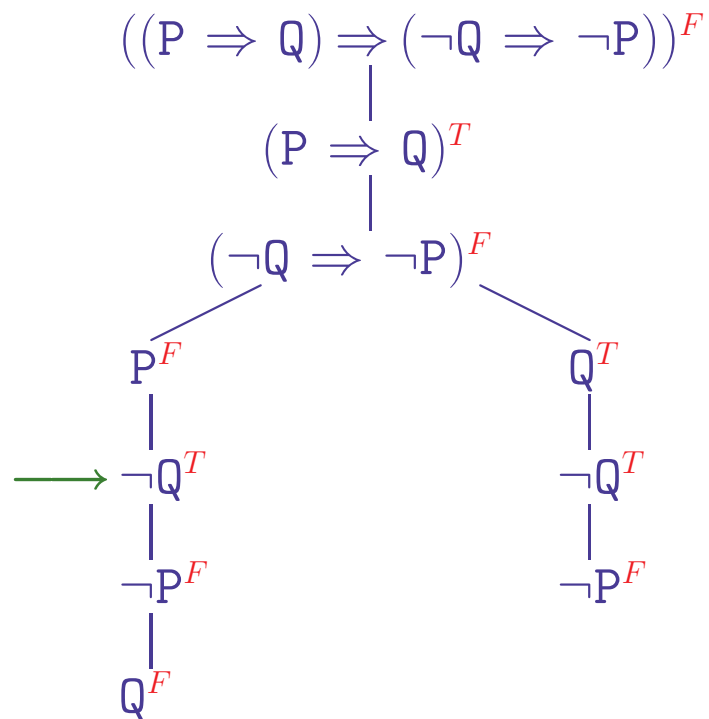
MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis



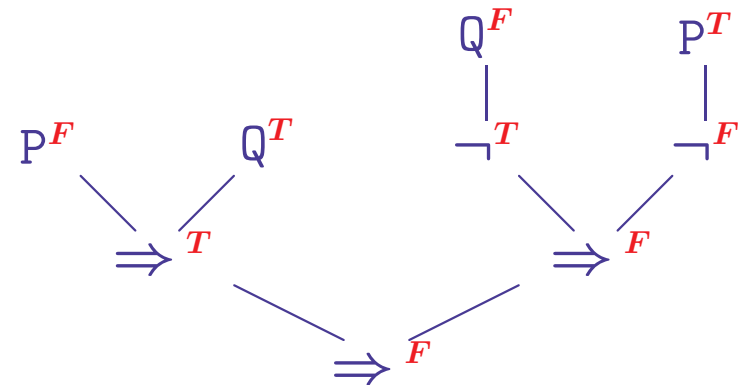
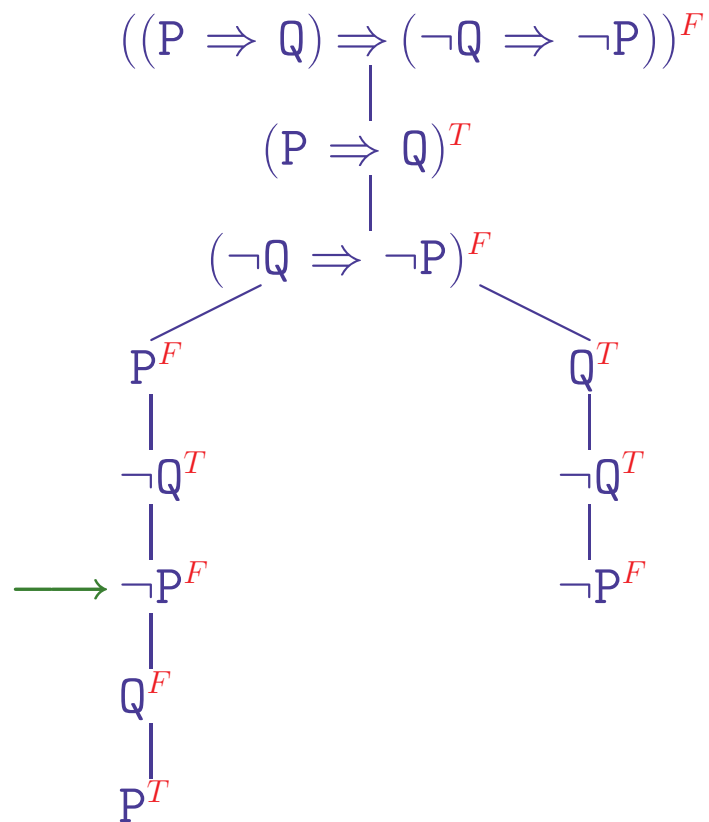
MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis



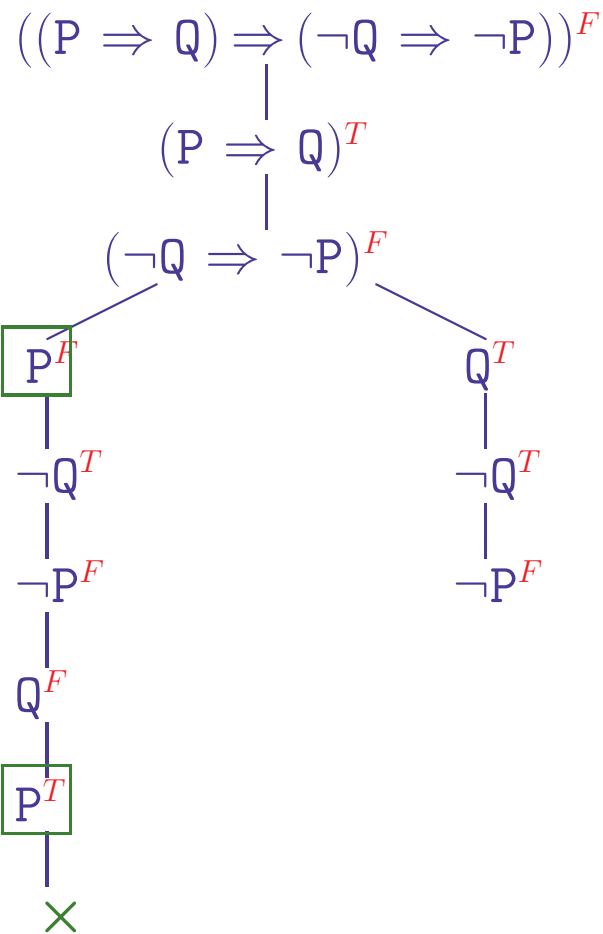
MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis

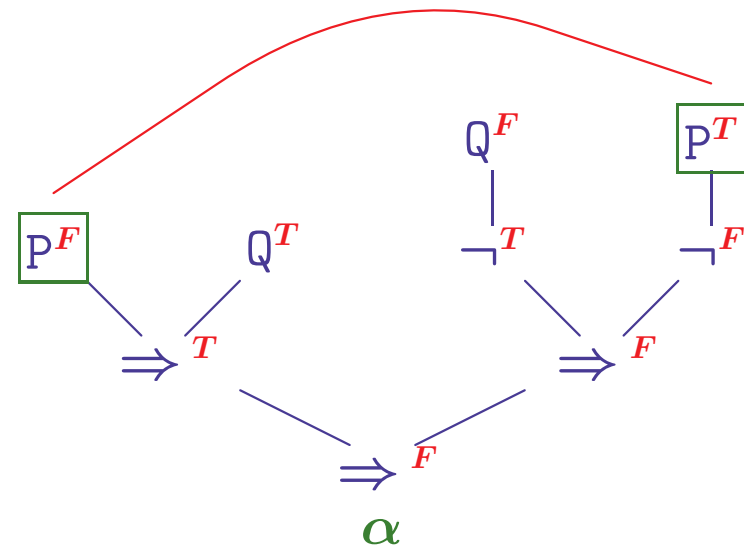


MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis



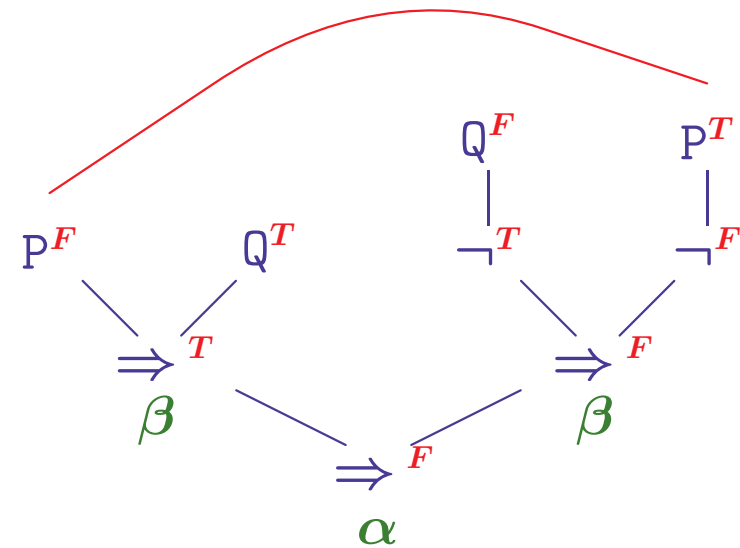
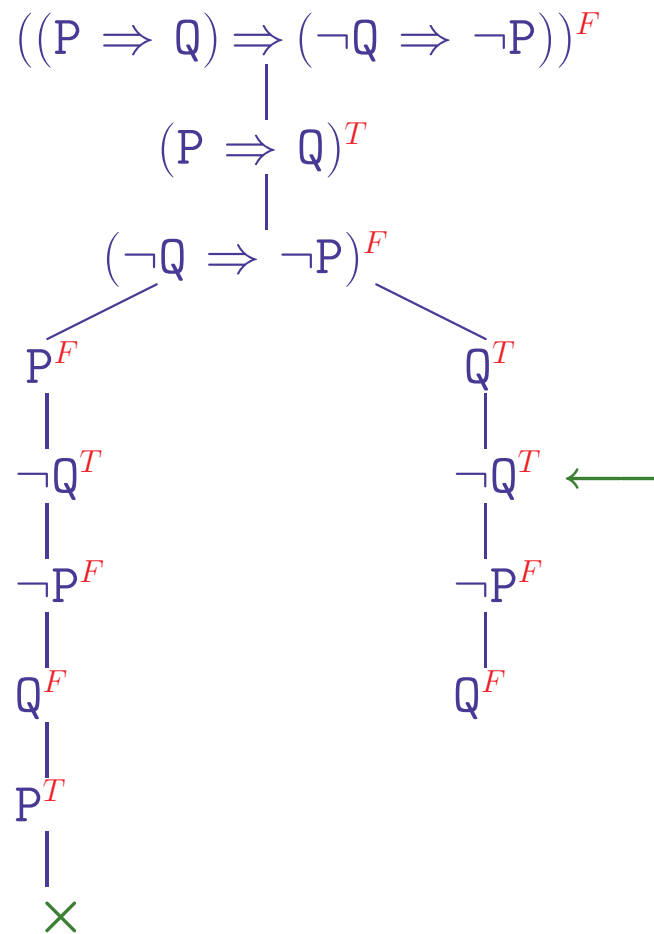
Zweig geschlossen



Komplementäre Literale
in α -Beziehung

MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

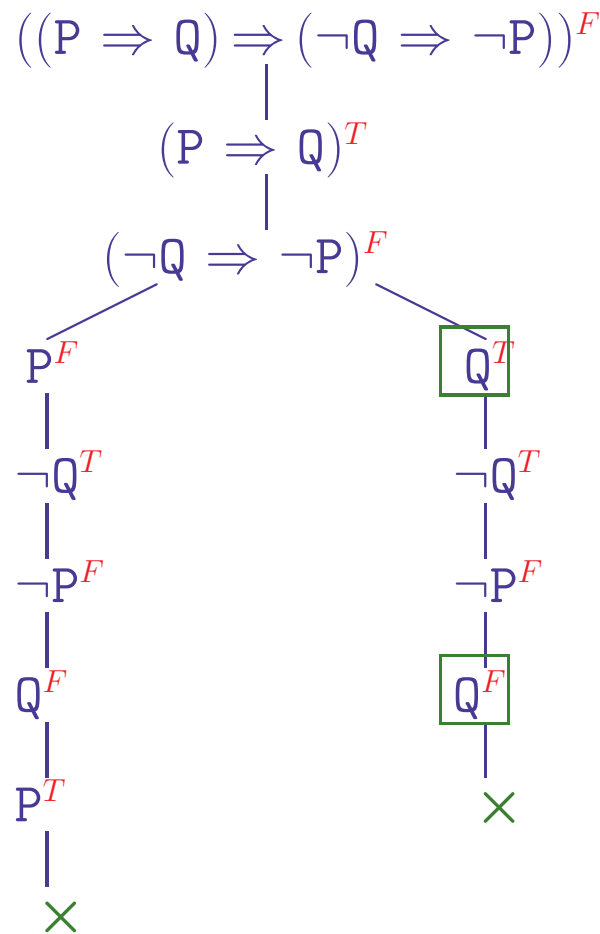
Tableauxbeweis



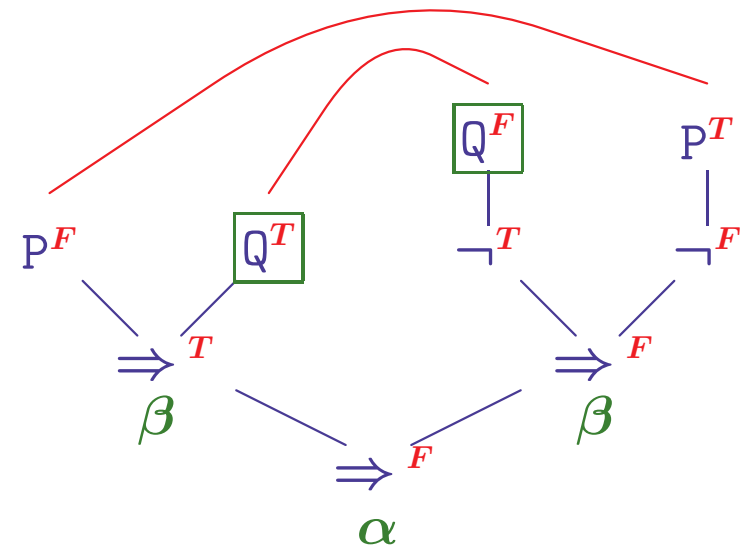
Zweiter Beweisweig
zu betrachten

MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis



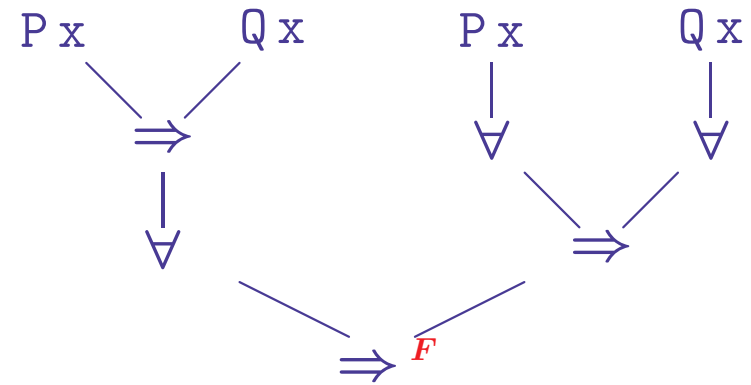
Zweig geschlossen



Komplementäre Literale
in α -Beziehung

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

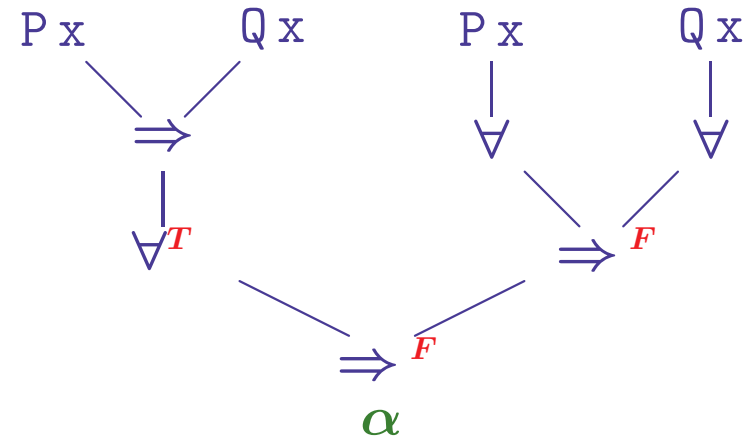
$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$$



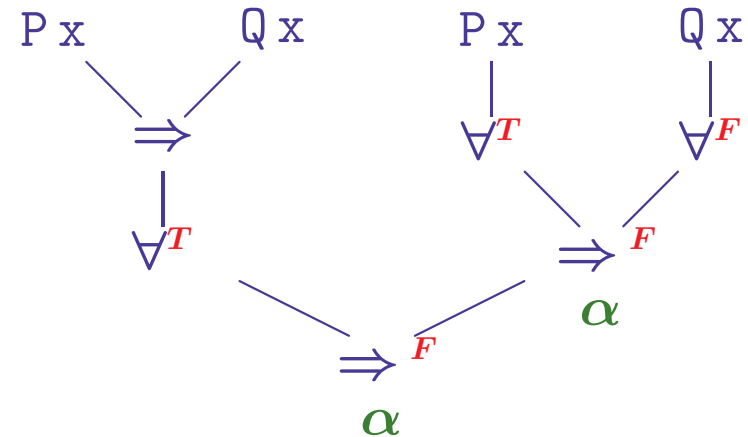
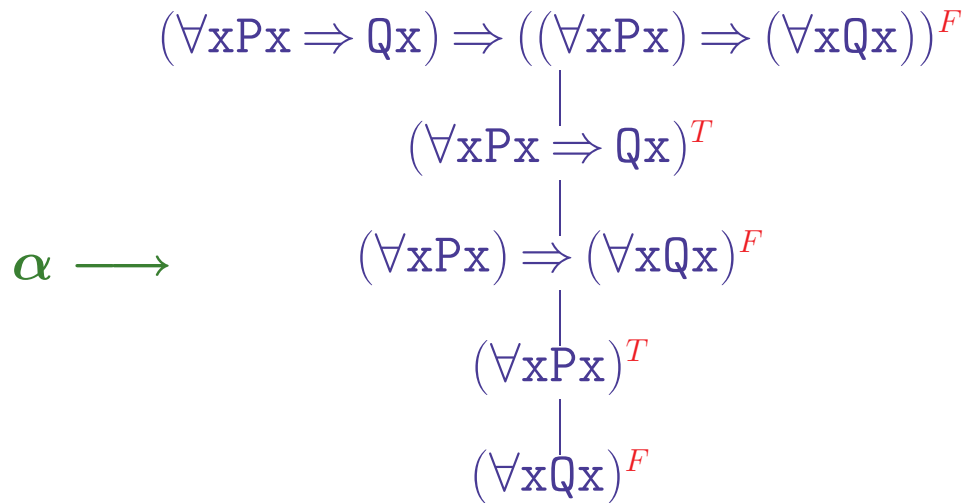
BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$\alpha \longrightarrow (\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$ ^F

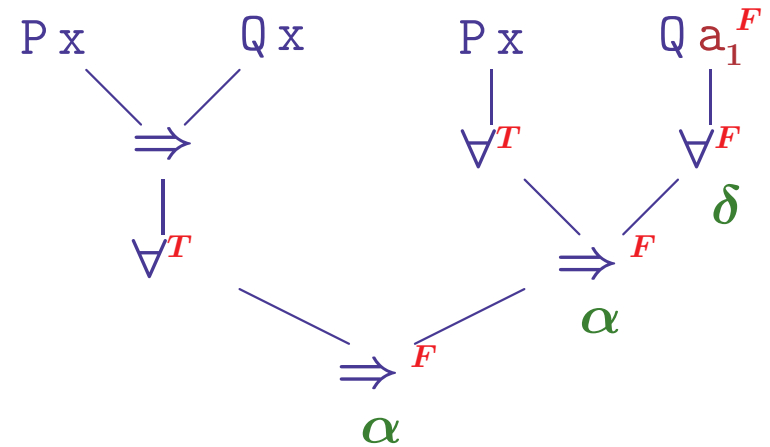
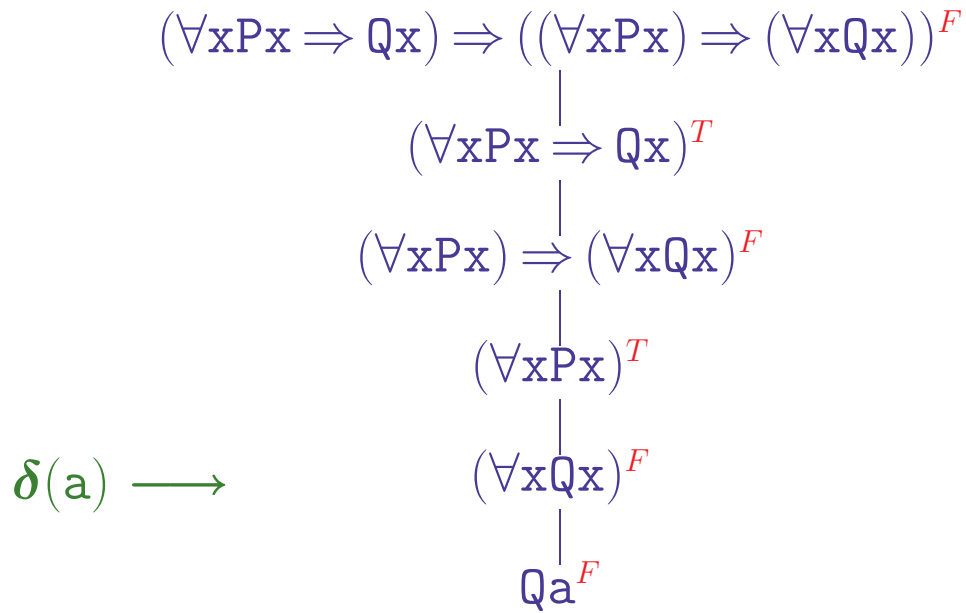
$(\forall x Px \Rightarrow Qx)$ ^T
 $(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)$ ^F



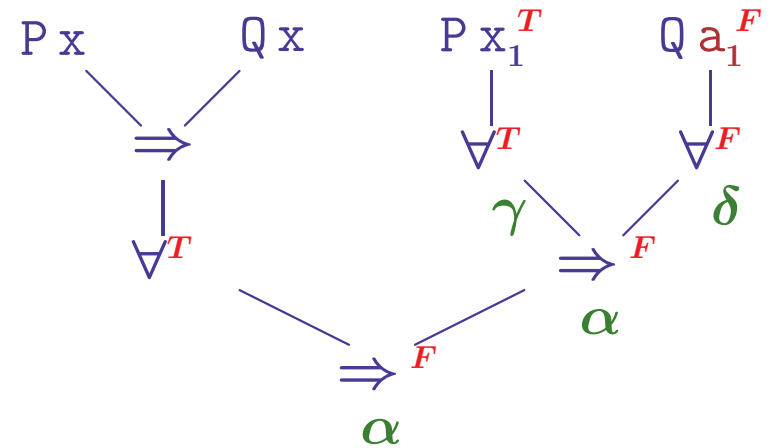
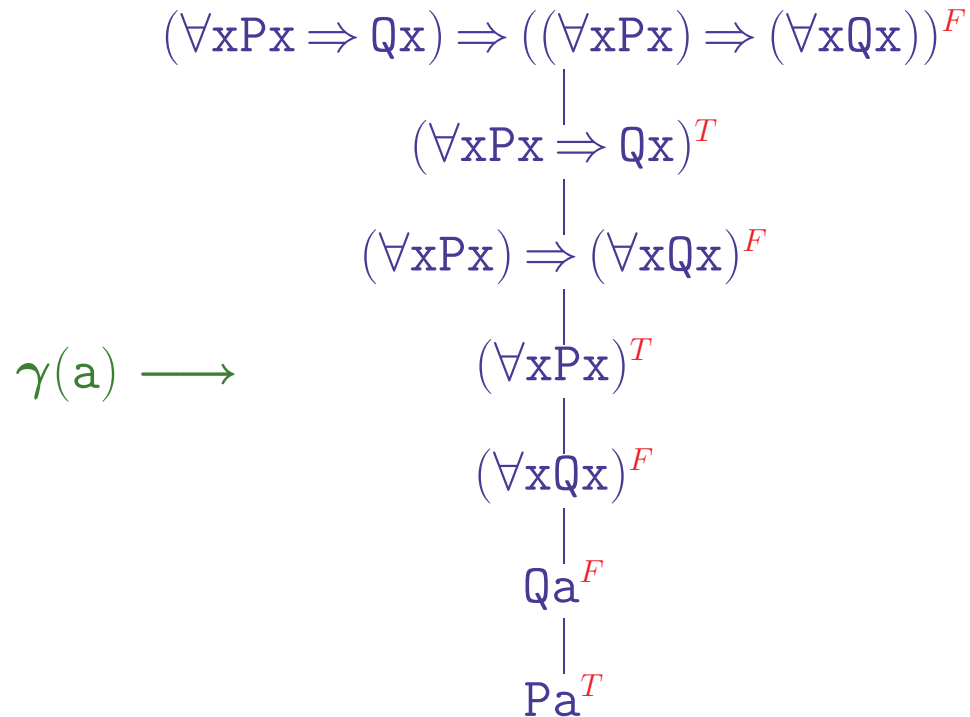
BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



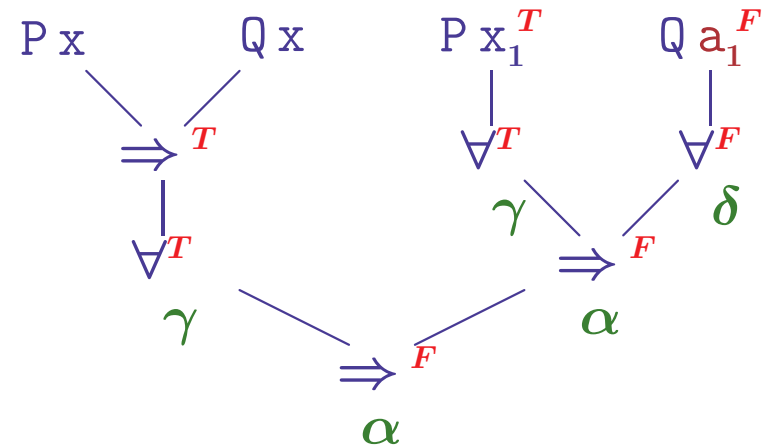
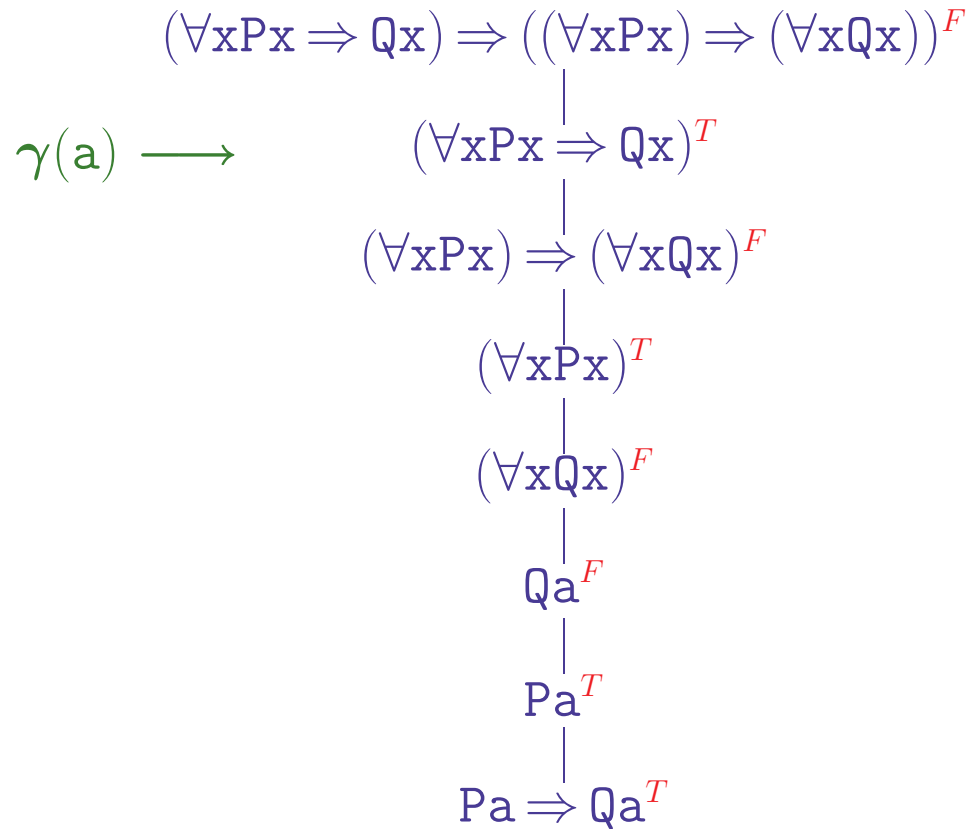
BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

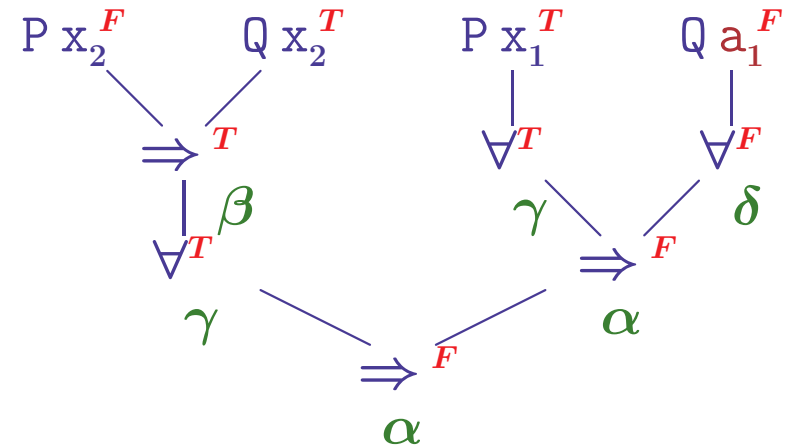
$$Pa^T$$

$\beta \longrightarrow$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$Pa^F$$

$$Qa^T$$



BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

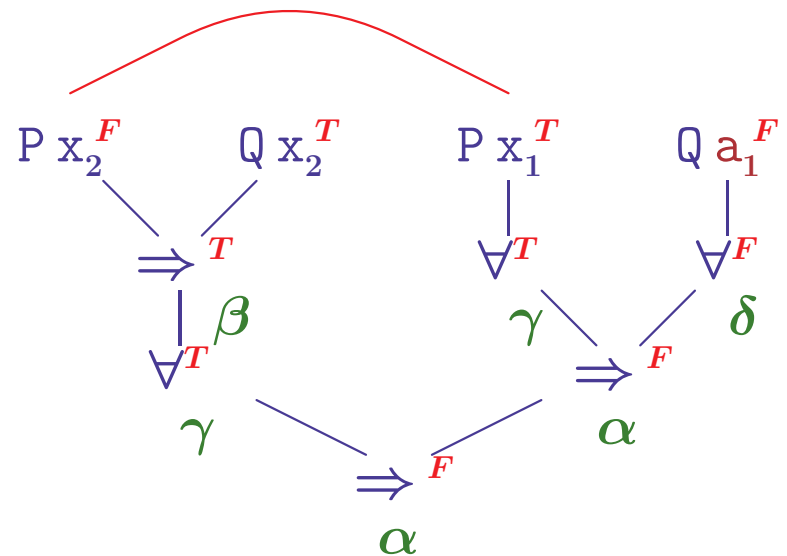
$$Pa^T$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$Pa^F$$

$$Qa^T$$

×



x_1 muß gleich x_2 sein

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$\boxed{Qa^F}$$

$$Pa^T$$

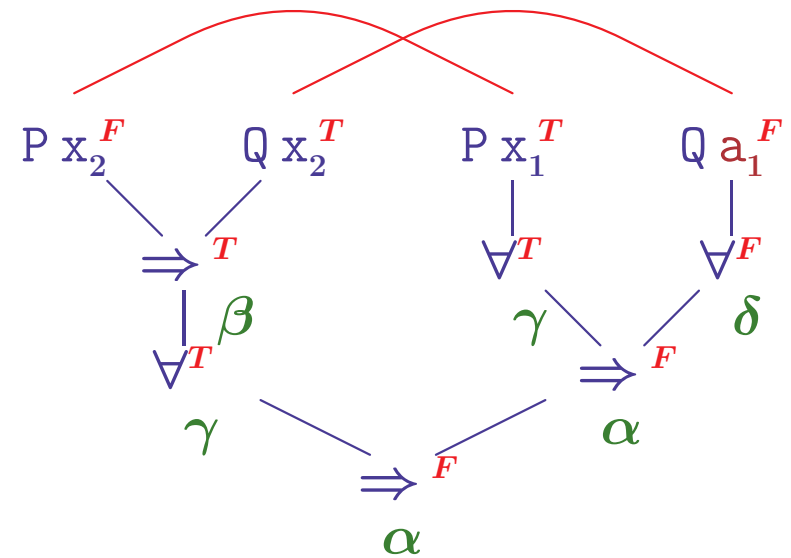
$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$Pa^F$$

×

$$\boxed{Qa^T}$$

×



x_1 muß gleich x_2 sein
 x_2 muß gleich a_1 sein
 Instantiiere $x_1 := x_2 := a_1$

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

$$Pa^T$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

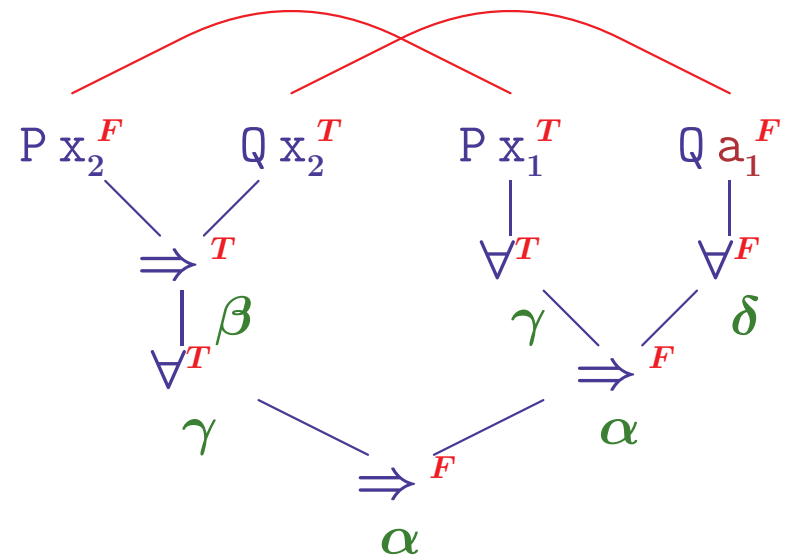
$$Pa^F$$

×

$$Qa^T$$

×

$\forall x Qx$ muß vor den γ -Knoten zerlegt werden

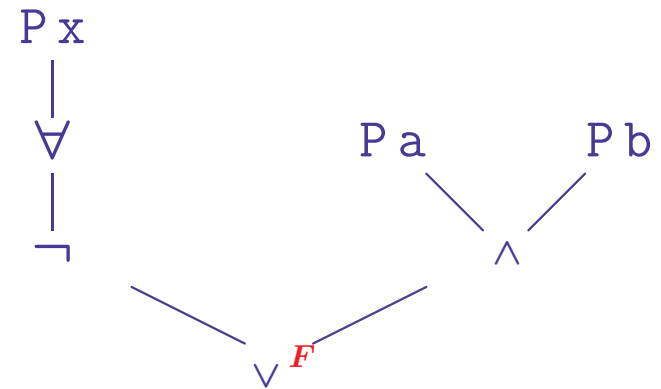


x_1 muß gleich x_2 sein
 x_2 muß gleich a_1 sein
 Instantiiere $x_1 := x_2 := a_1$

a_1 muß vor x_1/x_2
 freigegeben werden

BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$

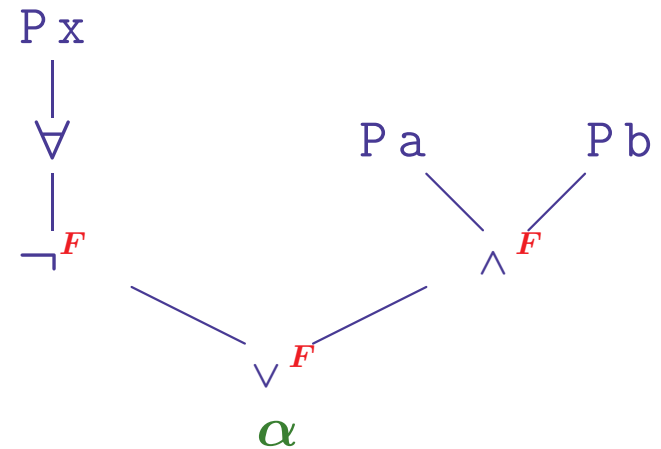


BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\alpha \longrightarrow \neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$

$$\quad \quad \quad \neg(\forall x Px)^F$$

$$\quad \quad \quad (Pa \wedge Pb)^F$$



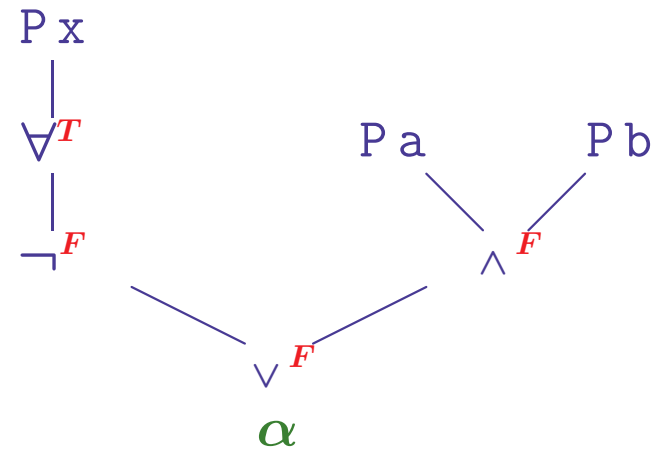
BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\alpha \longrightarrow \neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$

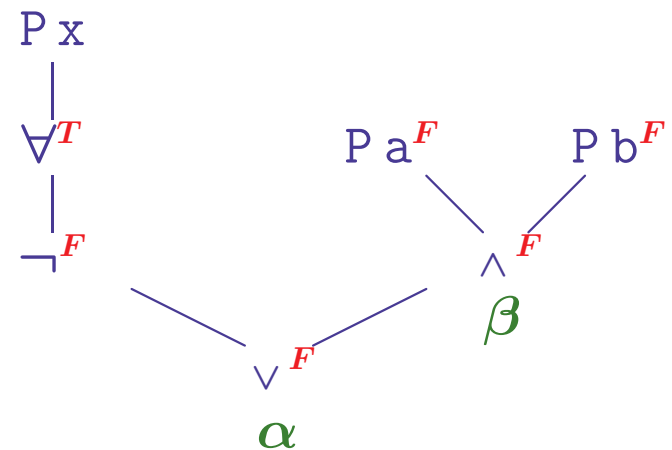
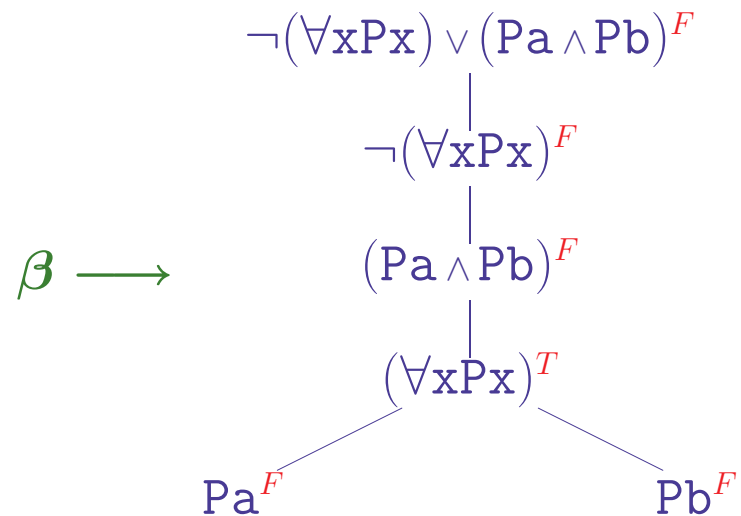
$$\neg(\forall x Px)^F$$

$$(Pa \wedge Pb)^F$$

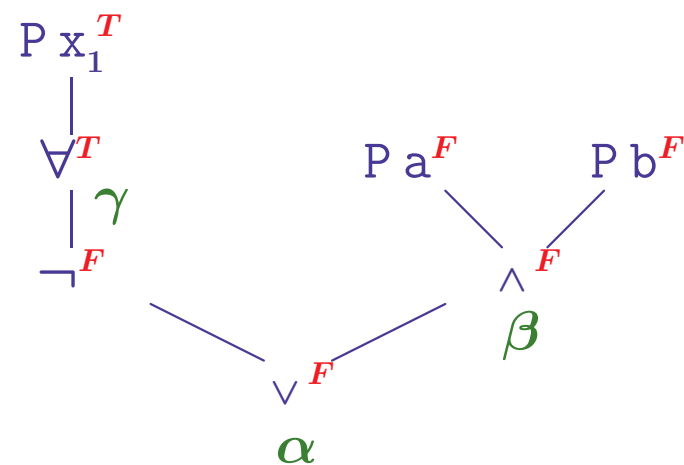
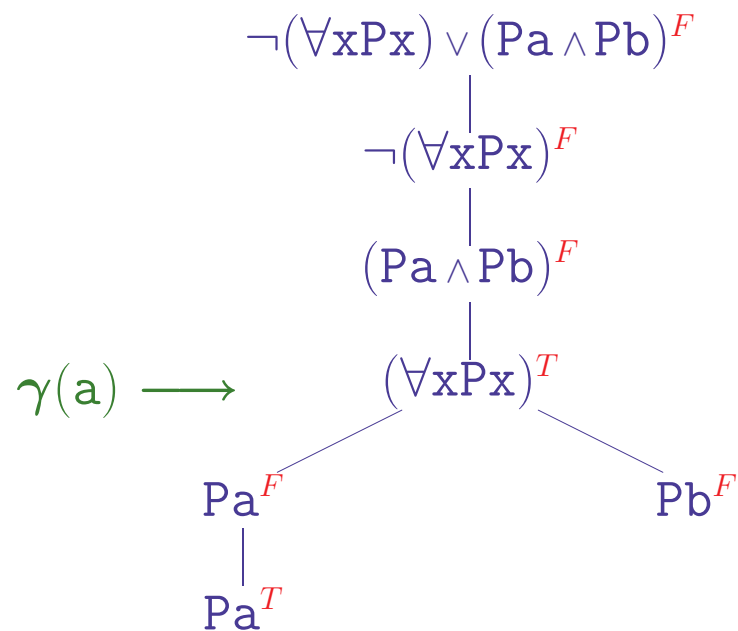
$$(\forall x Px)^T$$



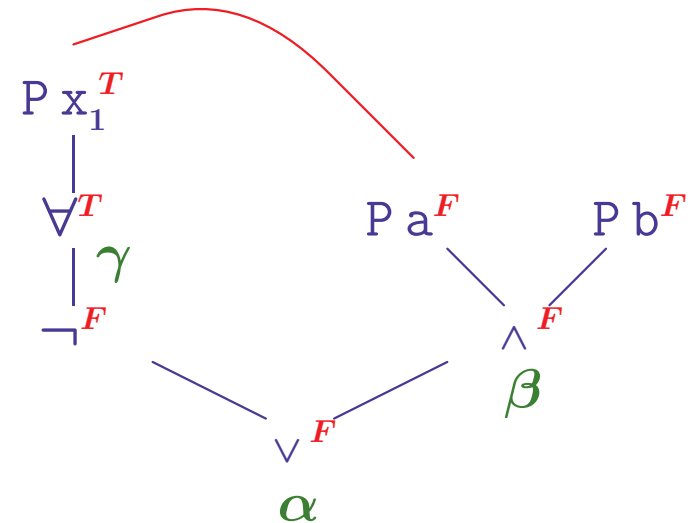
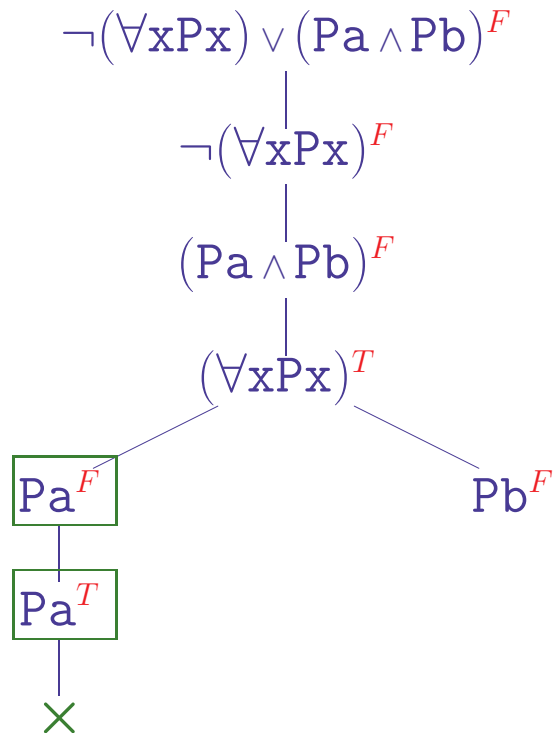
BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

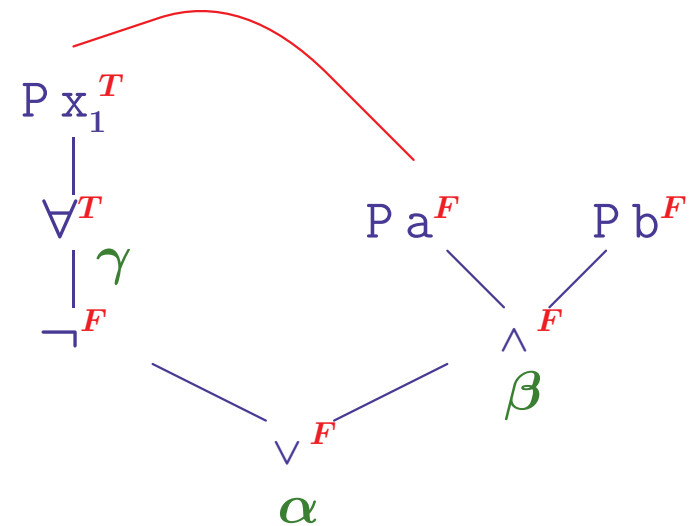
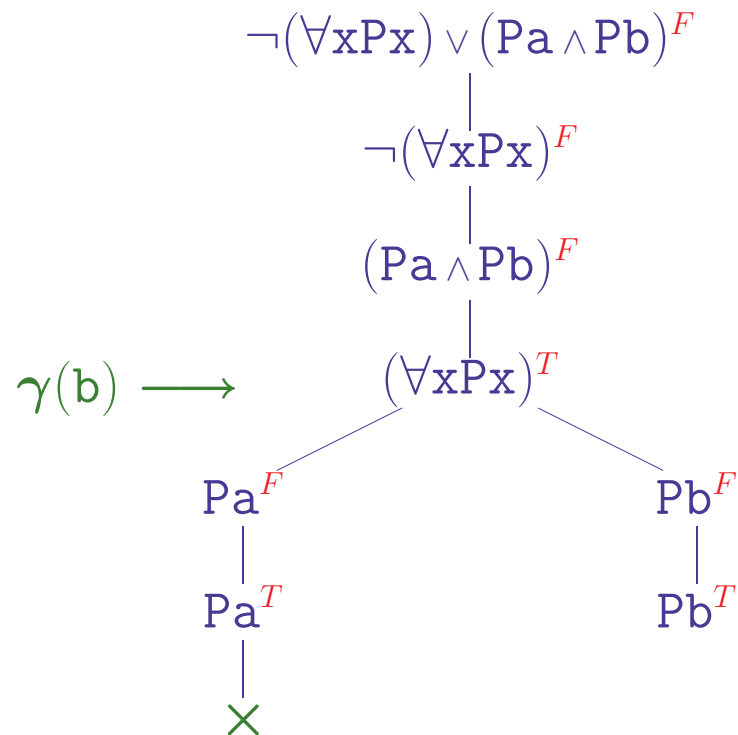


BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

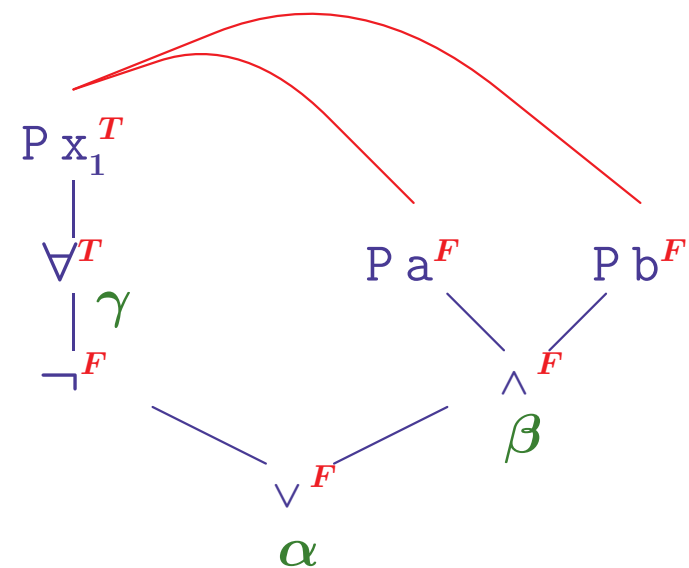
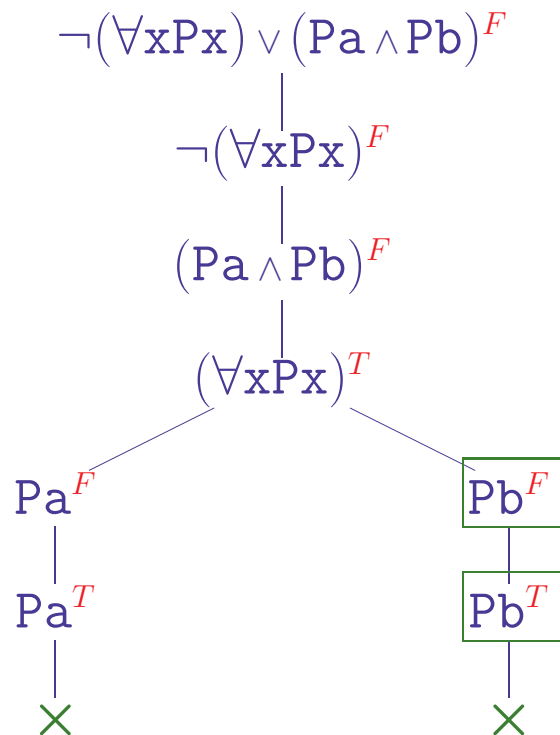


x_1 muß gleich a sein

BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

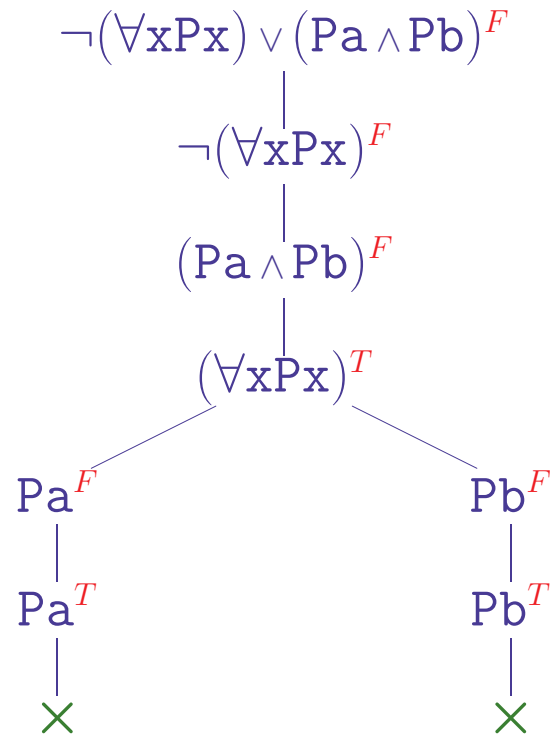


BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

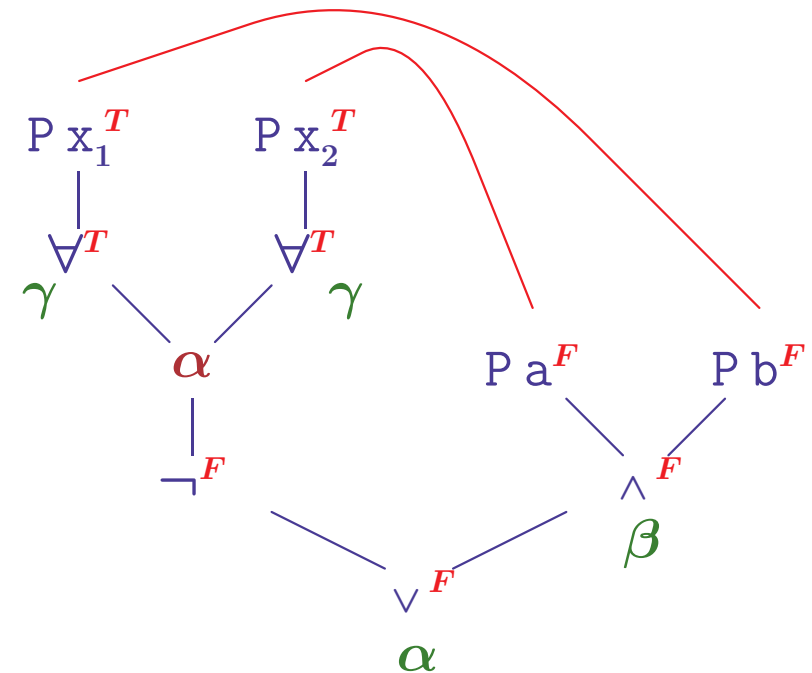


x_1 muß gleich a
und gleich b sein

BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



Zwei Instanzen derselben Formel



γ -Formel hat Multiplizität 2
Instantiiere $x_1 := b, x_2 := a$

MATRIXBEWEISE: FUNDAMENTALE EINSICHTEN

- **Formelbaum enthält alle Teilformeln eines Beweises**
 - Es reicht, Knoten um **Tableaux**typen und **Polaritäten** zu ergänzen
 - Beide hängen nur vom Konnektiv und bisheriger Polarität ab

MATRIXBEWEISE: FUNDAMENTALE EINSICHTEN

- **Formelbaum enthält alle Teilformeln eines Beweises**
 - Es reicht, Knoten um **Tableaux**typen und **Polaritäten** zu ergänzen
 - Beide hängen nur vom Konnektiv und bisheriger Polarität ab
- **Beweiszweige durch α -Knoten beschreibbar**
 - Nur β -Knoten erzeugen Verzweigungen
 - Knoten mit α -Knoten als gemeinsamen Vorfahr gehören zum selben Zweig

MATRIXBEWEISE: FUNDAMENTALE EINSICHTEN

- **Formelbaum enthält alle Teilformeln eines Beweises**
 - Es reicht, Knoten um **Tableaux**typen und **Polaritäten** zu ergänzen
 - Beide hängen nur vom Konnektiv und bisheriger Polarität ab
- **Beweiszweige durch α -Knoten beschreibbar**
 - Nur β -Knoten erzeugen Verzweigungen
 - Knoten mit α -Knoten als gemeinsamen Vorfahr gehören zum selben Zweig
- **Komplementaritätstests reichen aus**
 - Alle Zweige müssen komplementäre Literale enthalten
 - Komplementarität kann durch Substitution erzeugt werden
 - γ -Knoten dürfen dupliziert werden

MATRIXBEWEISE: FUNDAMENTALE EINSICHTEN

- **Formelbaum enthält alle Teilformeln eines Beweises**
 - Es reicht, Knoten um **Tableaux**typen und **Polaritäten** zu ergänzen
 - Beide hängen nur vom Konnektiv und bisheriger Polarität ab
- **Beweiszweige durch α -Knoten beschreibbar**
 - Nur β -Knoten erzeugen Verzweigungen
 - Knoten mit α -Knoten als gemeinsamen Vorfahr gehören zum selben Zweig
- **Komplementaritätstests reichen aus**
 - Alle Zweige müssen komplementäre Literale enthalten
 - Komplementarität kann durch Substitution erzeugt werden
 - γ -Knoten dürfen dupliziert werden
- **Substitutionen bestimmen Reduktionsordnung**
 - Tableauxbeweis muß **Ordnung** des Formelbaums berücksichtigen
 - Tableauxbeweis muß **Variablen** in Termen, die für γ -Variablen eingesetzt werden, bereits freigelegt haben

● (Annotierter) Formelbaum

- Syntaxbaum der Formel, in der jeder Knoten markiert ist mit
 - **Position**: ein eindeutiger Name $a_0, a_1, \dots$, mit dem Knoten identifiziert
 - **Label**: ein logisches Konnektiv oder atomare Formel
 - **Polarität**: T oder F
 - **Typ**: α, β, γ , oder δ
- Knoten mit atomaren Formeln als Label heißen **Atome** (atomare Positionen)
- Die **Baumordnung** $<$ ist die partielle Ordnung der Knoten im Baum

- **(Annotierter) Formelbaum**

- Syntaxbaum der Formel, in der jeder Knoten markiert ist mit
 - **Position**: ein eindeutiger Name $a_0, a_1, \dots$, mit dem Knoten identifiziert
 - **Label**: ein logisches Konnektiv oder atomare Formel
 - **Polarität**: T oder F
 - **Typ**: α, β, γ , oder δ
- Knoten mit atomaren Formeln als Label heißen **Atome** (**atomare Positionen**)
- Die **Baumordnung** $<$ ist die partielle Ordnung der Knoten im Baum

- **Multiplizität $\mu(a_i)$ eines γ -Knotens a_i**

- Anzahl der Kopien des Knotens im Baum ($\hat{=}$ Instanzen des zugehörigen Quantors)

MATRIXKALKÜLE PRÄZISIERT: FORMELBAUM

• (Annotierter) Formelbaum

- Syntaxbaum der Formel, in der jeder Knoten markiert ist mit
 - **Position**: ein eindeutiger Name $a_0, a_1, \dots$, mit dem Knoten identifiziert
 - **Label**: ein logisches Konnektiv oder atomare Formel
 - **Polarität**: T oder F
 - **Typ**: α, β, γ , oder δ
- Knoten mit atomaren Formeln als Label heißen **Atome** (atomare Positionen)
- Die **Baumordnung** $<$ ist die partielle Ordnung der Knoten im Baum

• Multiplizität $\mu(a_i)$ eines γ -Knotens a_i

- Anzahl der Kopien des Knotens im Baum ($\hat{=}$ Instanzen des zugehörigen Quantors)

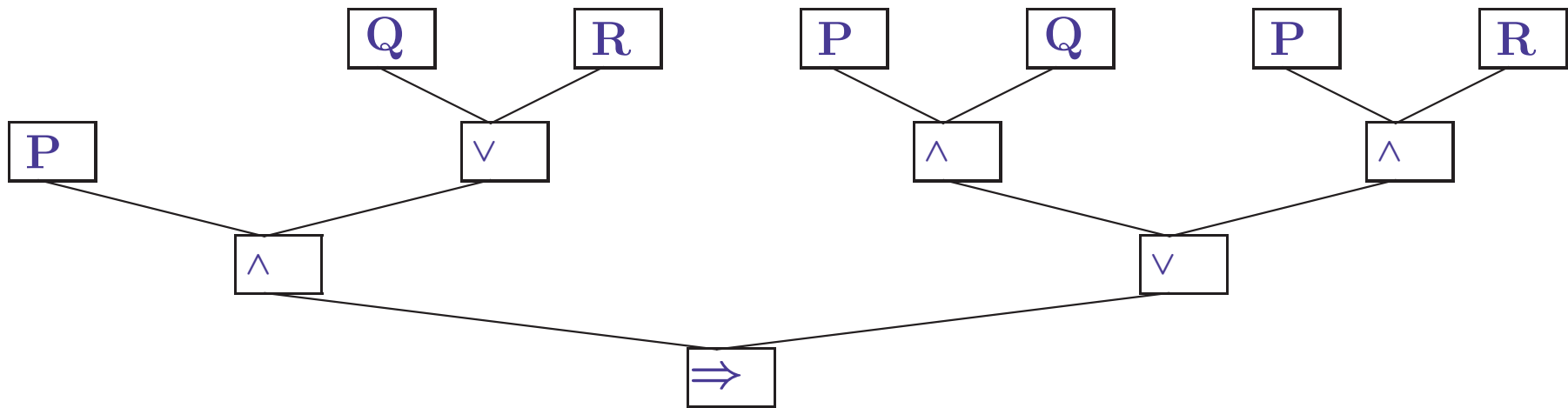
• Systematische Zuordnung von Polarität und Typ

- Die **Wurzel** a_0 hat Polarität F
- Typ und Nachfolgerpolarität einer Position a_i werden tabellarisch bestimmt

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	–	–	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(a_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

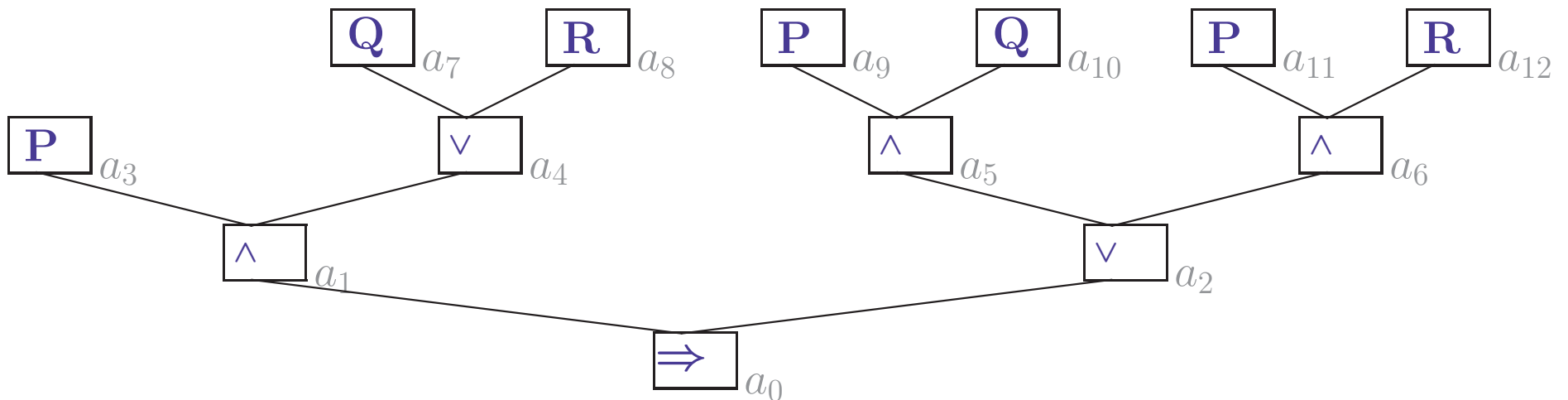
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Parsen der Formel erzeugt Syntaxbaum der Formel

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

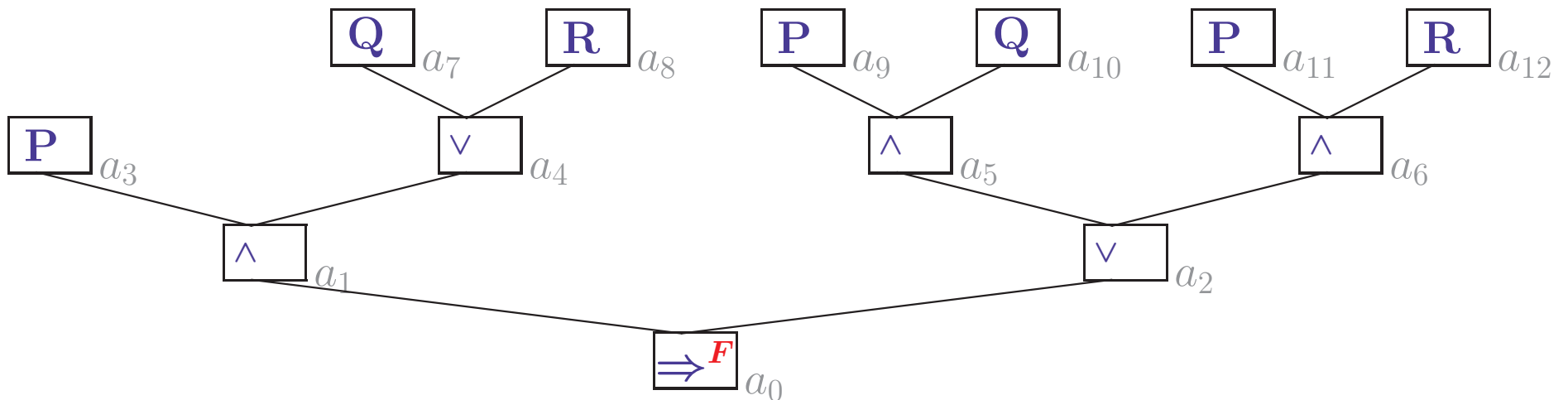
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Ergänzung der Positionen

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

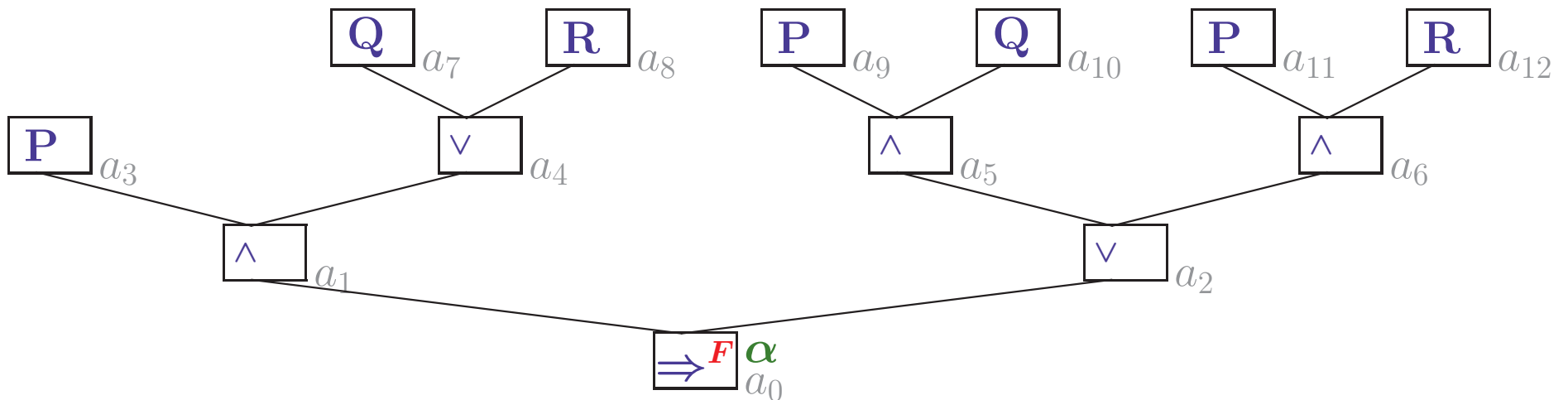
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Polarität der Wurzel

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

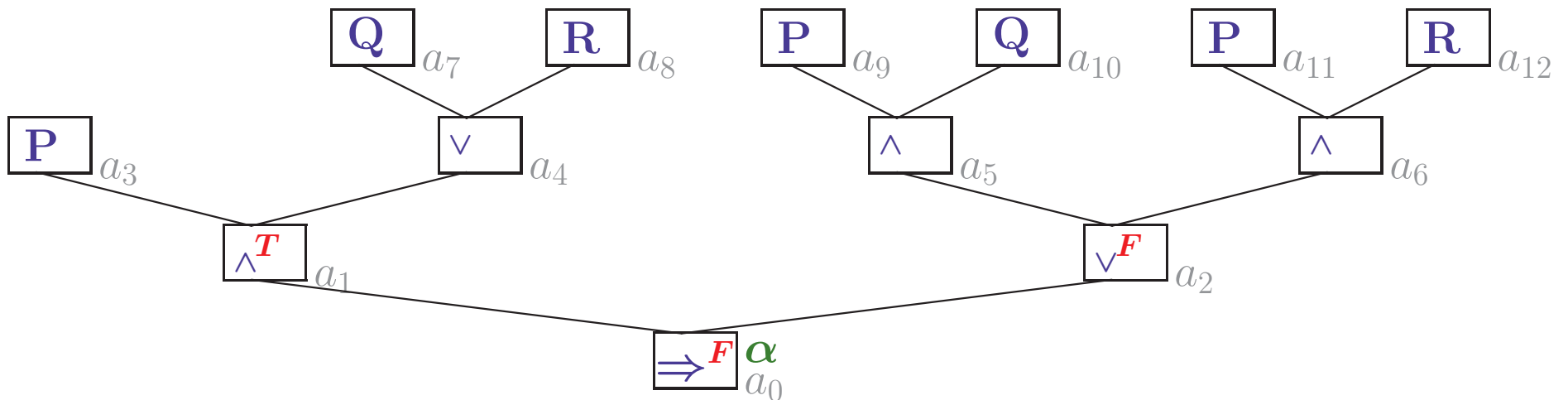
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Typ der Wurzel

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

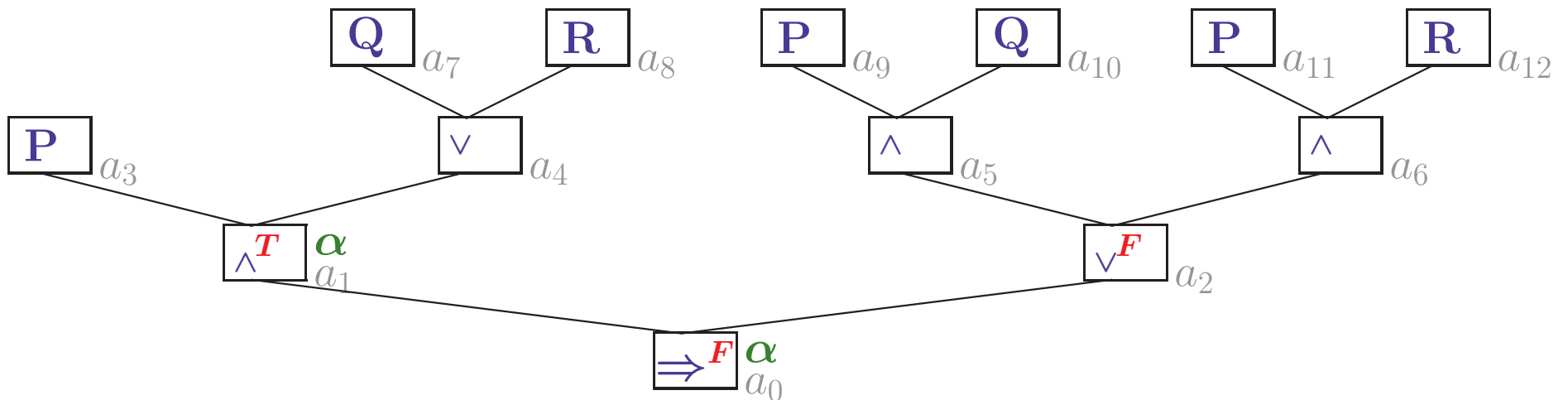
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Polaritäten der Nachfolger

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

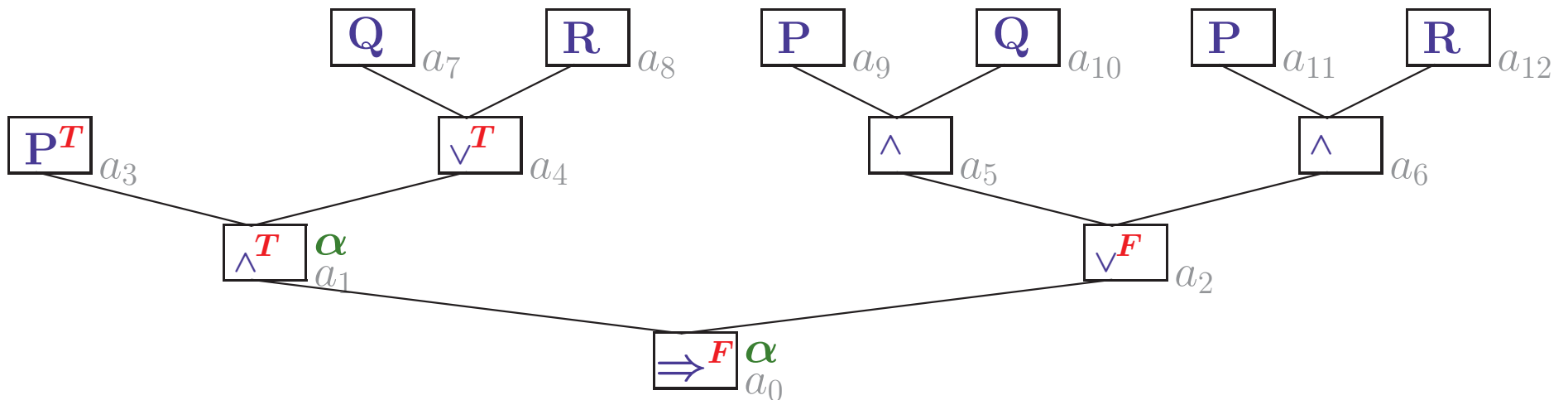
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Typ des linken Nachfolgers

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

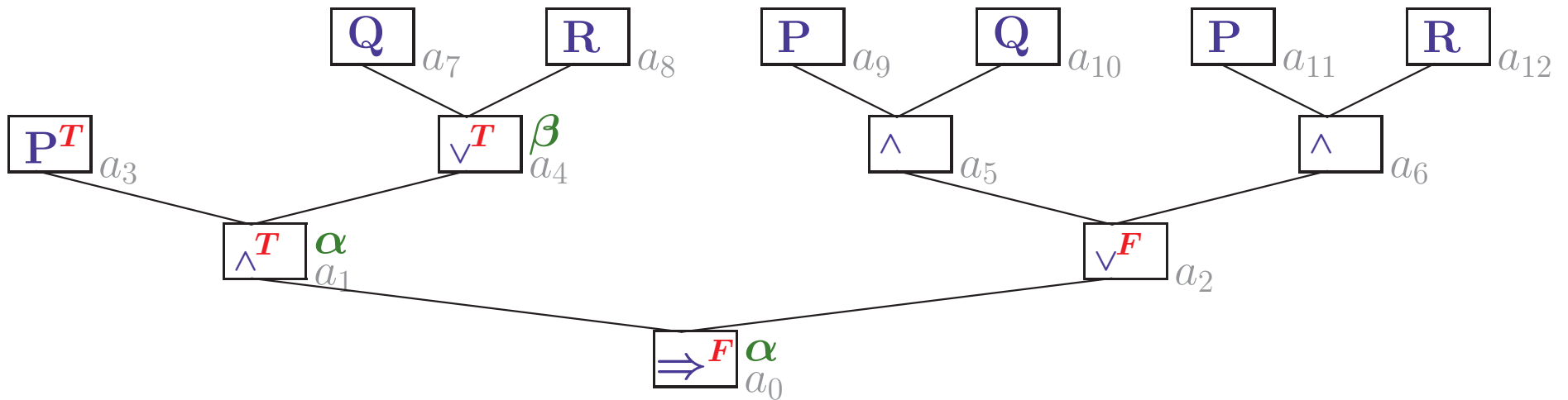
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Polaritäten

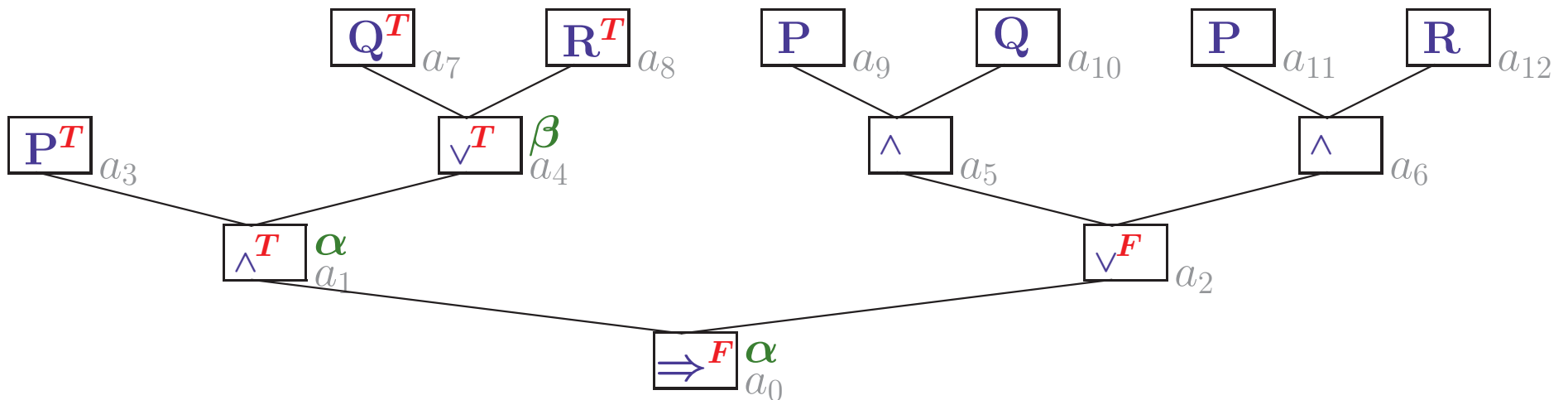
AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



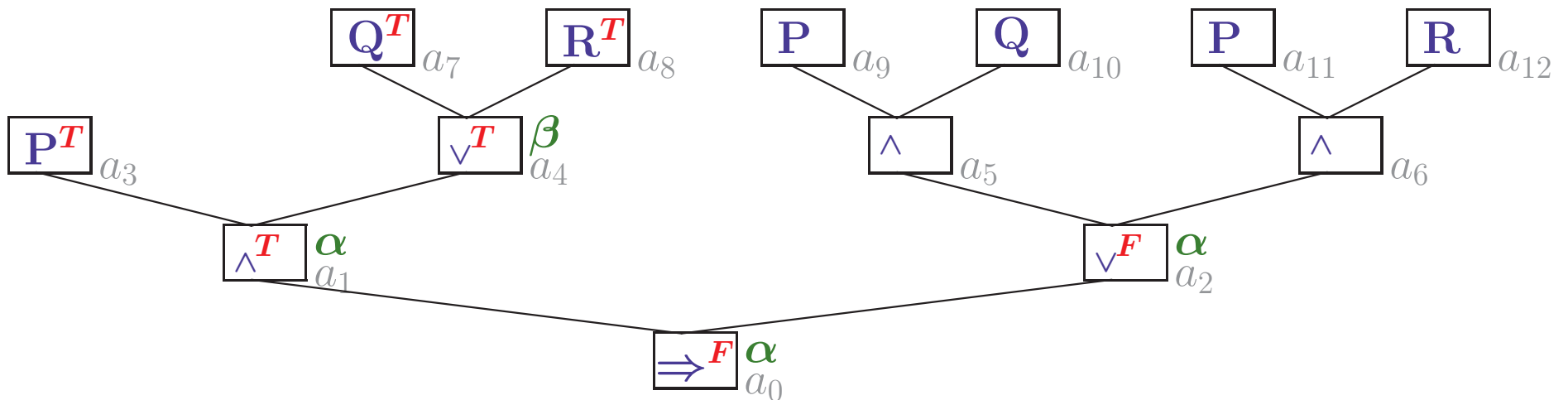
AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



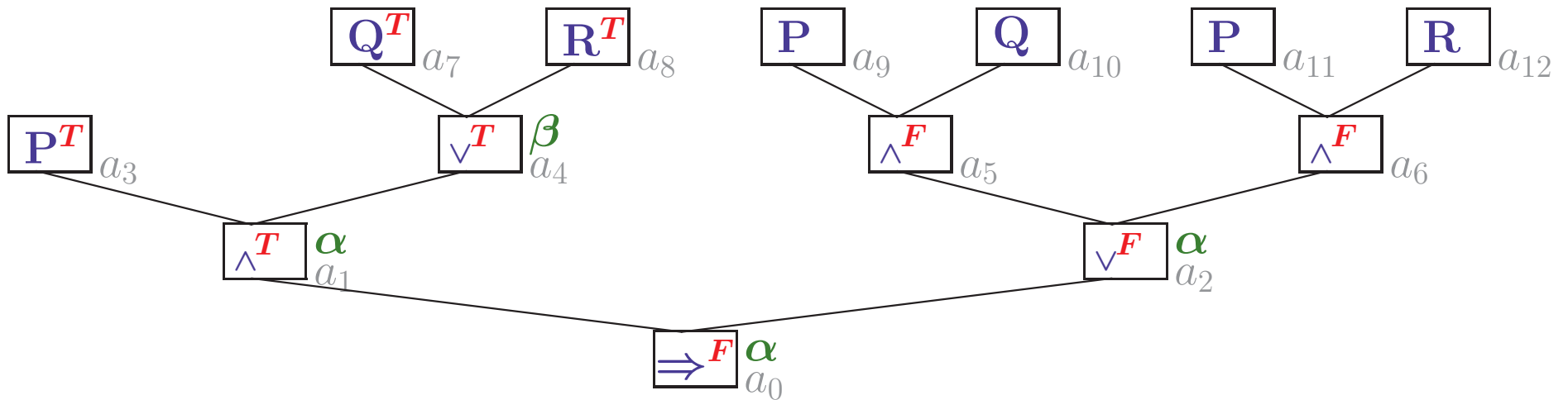
AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



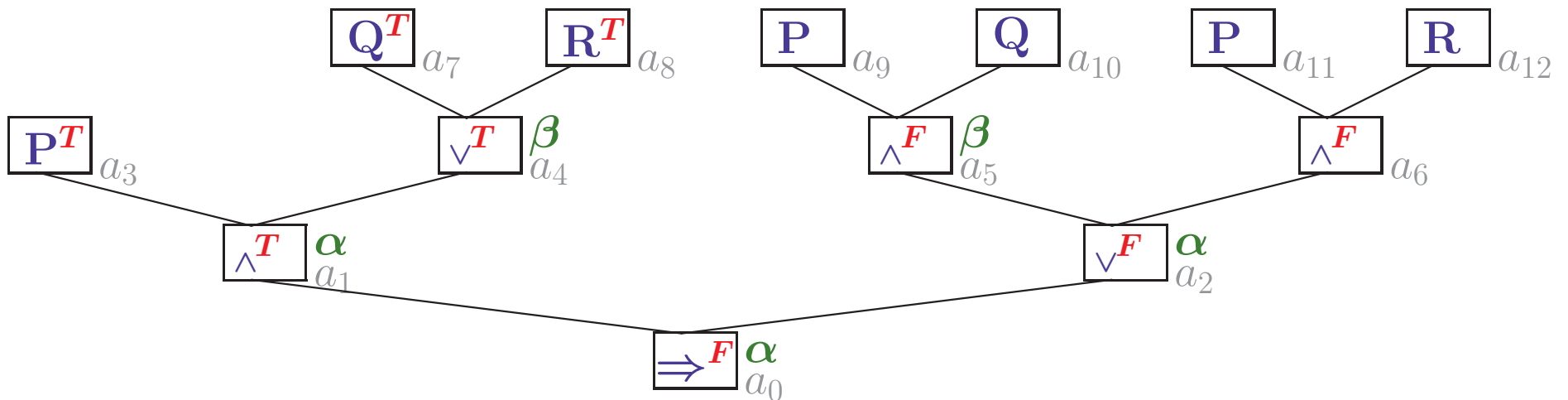
AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



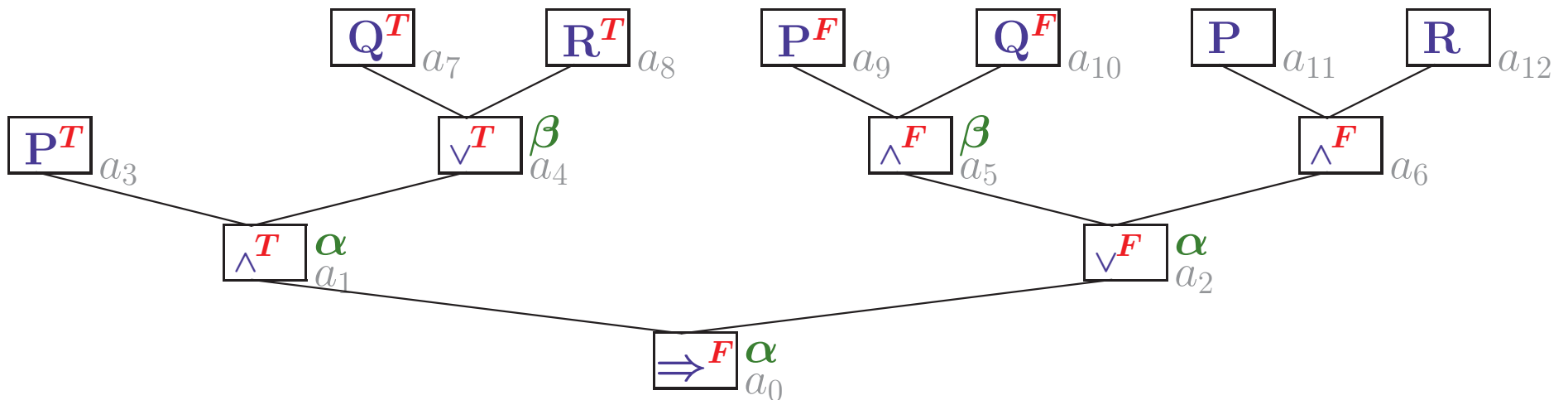
AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



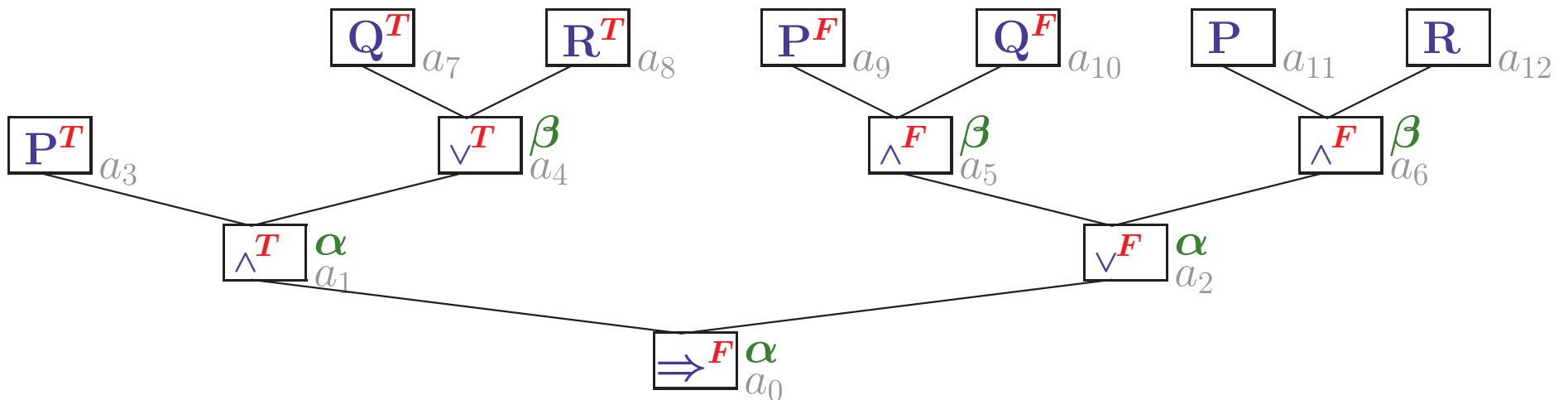
AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



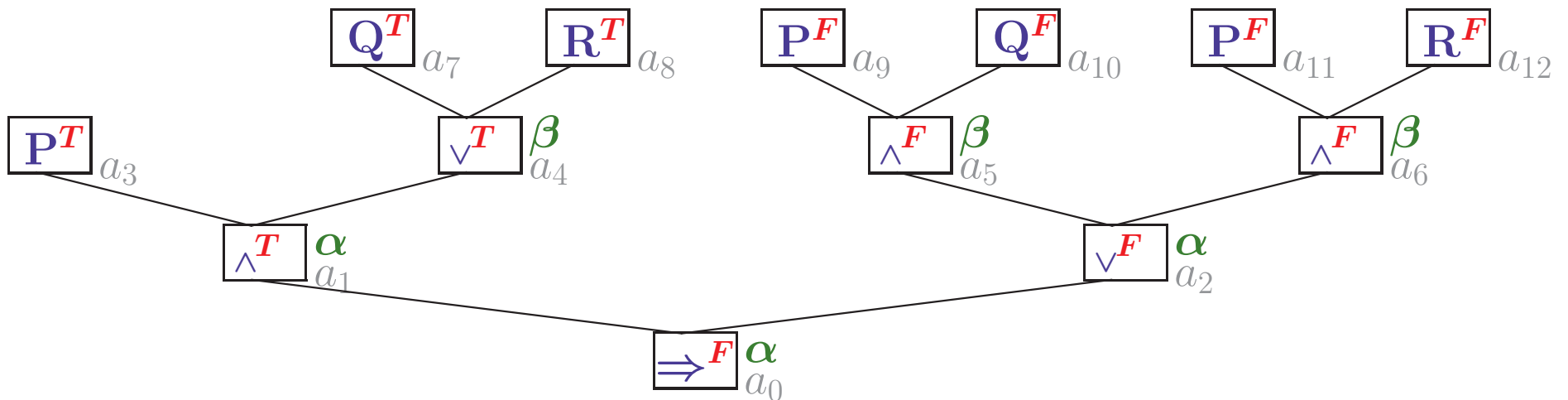
AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



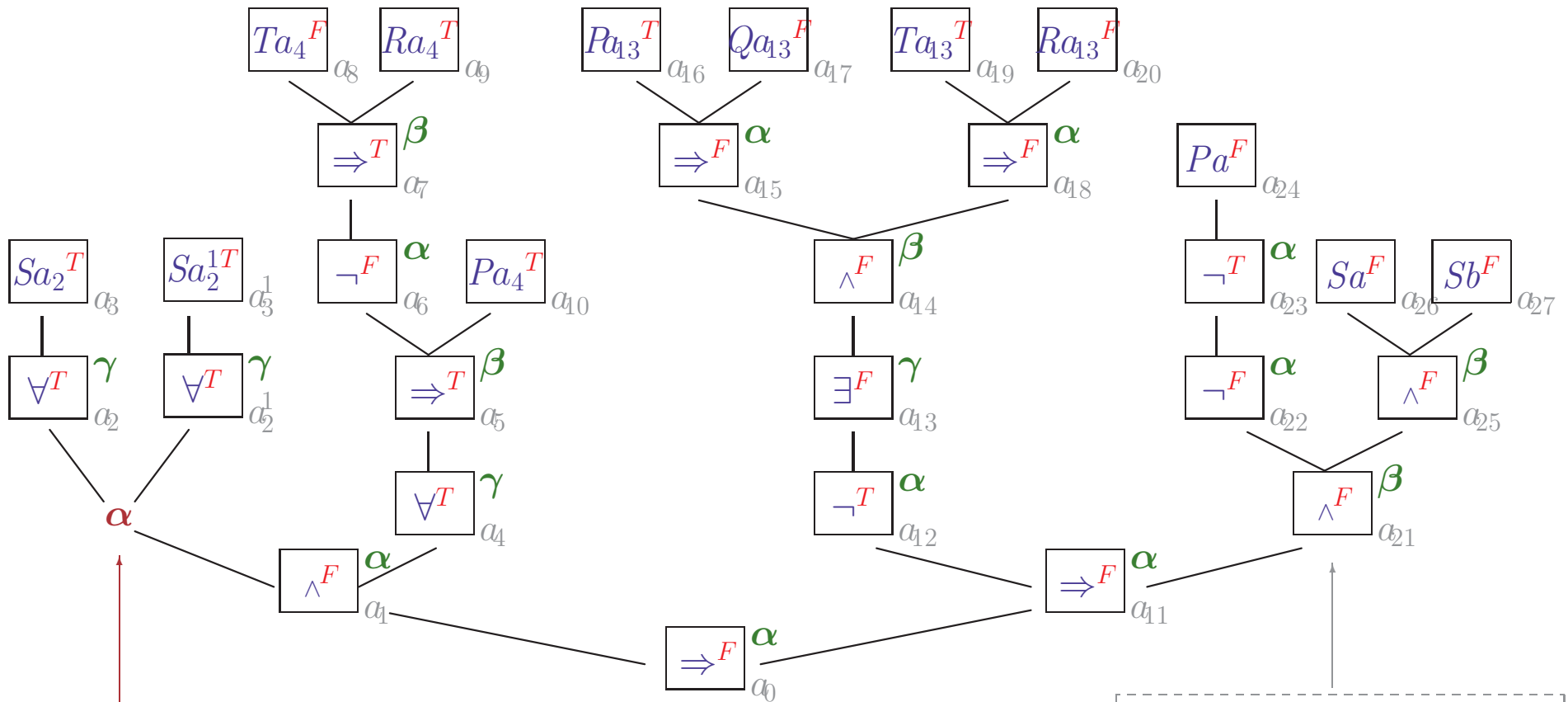
AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



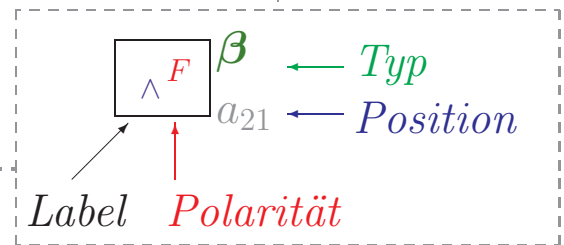
FORMELBAUM MIT MULTIPLIZITÄT

$$(\forall x Sx) \wedge (\forall y \neg(Ty \Rightarrow Ry) \Rightarrow Py) \Rightarrow \neg(\exists z(Pz \Rightarrow Qz) \wedge (Tz \Rightarrow Rz)) \Rightarrow \neg\neg Pa \wedge Sa \wedge Sb$$



$$\mu(a_2)=2$$

Positionen werden als Variablennamen benutzt



- α/β -Beziehung zwischen atomaren Positionen
 - $u \sim_{\alpha} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ α
 - $u \sim_{\beta} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ β

- **α/β -Beziehung** zwischen atomaren Positionen
 - $u \sim_{\alpha} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ α
 - $u \sim_{\beta} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ β
- **Pfad**
 - (Maximale) Menge von Atomen in gegenseitiger α -Beziehung

- **α/β -Beziehung** zwischen atomaren Positionen
 - $u \sim_{\alpha} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ α
 - $u \sim_{\beta} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ β
- **Pfad**
 - (Maximale) Menge von Atomen in gegenseitiger α -Beziehung
- **Konnektion**
 - Paar $\{u, v\}$ von Knoten mit gleichem Label, unterschiedlicher Polarität

- **α/β -Beziehung** zwischen atomaren Positionen

- $u \sim_{\alpha} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ α
- $u \sim_{\beta} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ β

- **Pfad**

- (Maximale) Menge von Atomen in gegenseitiger α -Beziehung

- **Konnektion**

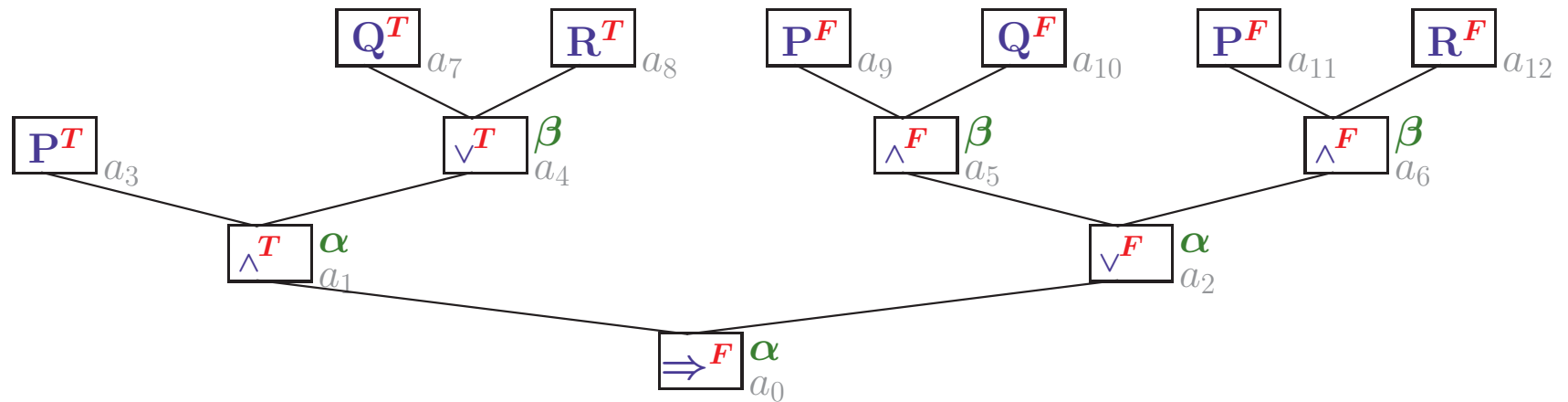
- Paar $\{u, v\}$ von Knoten mit gleichem Label, unterschiedlicher Polarität

- **σ -komplementäre Konnektion**

- Konnektion $\{u, v\}$ deren Label mit der Substitution σ unifizierbar sind

- **α/β -Beziehung** zwischen atomaren Positionen
 - $u \sim_{\alpha} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ α
 - $u \sim_{\beta} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ β
- **Pfad**
 - (Maximale) Menge von Atomen in gegenseitiger α -Beziehung
- **Konnektion**
 - Paar $\{u, v\}$ von Knoten mit gleichem Label, unterschiedlicher Polarität
- **σ -komplementäre Konnektion**
 - Konnektion $\{u, v\}$ deren Label mit der Substitution σ unifizierbar sind
- **Aufspannende Paarung** für eine Formel
 - Paarung: Menge von σ -komplementären Konnektionen,
 - Aufspannend: jeder Pfad durch die Formel enthält eine der Konnektionen

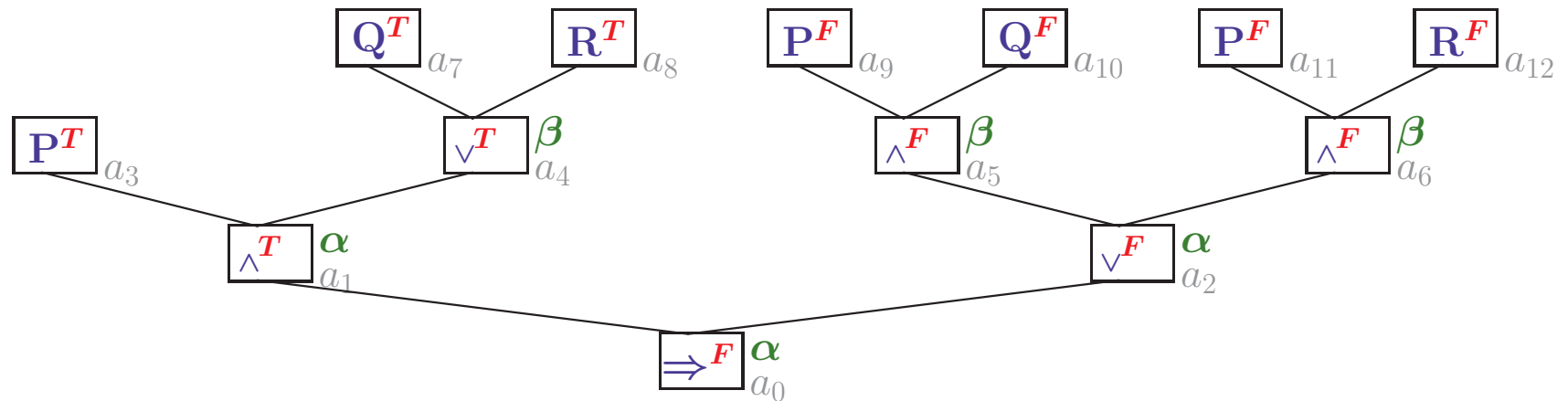
PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



• α/β -Beziehungen zwischen atomaren Formeln

- $a_7 \sim_\beta a_8$, $a_9 \sim_\beta a_{10}$, $a_{11} \sim_\beta a_{12}$
- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_\alpha a_j$

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



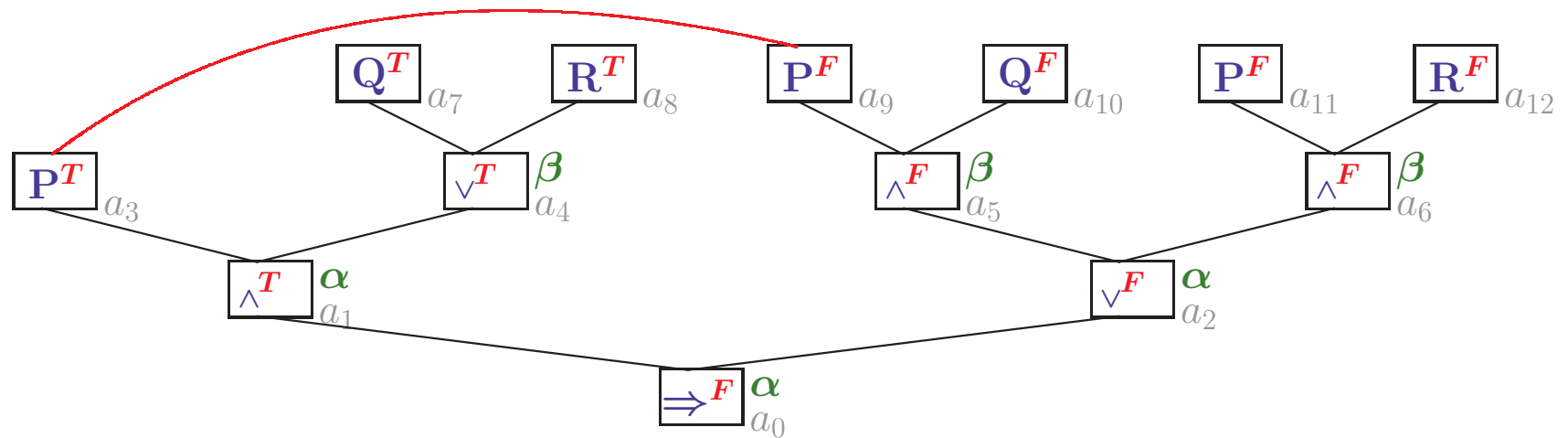
- α/β -Beziehungen zwischen atomaren Formeln

- $a_7 \sim_\beta a_8$, $a_9 \sim_\beta a_{10}$, $a_{11} \sim_\beta a_{12}$
- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_\alpha a_j$

- 3 β -Beziehungen liefern 8 Pfade:

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,
 $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



- α/β -Beziehungen zwischen atomaren Formeln

- $a_7 \sim_\beta a_8$, $a_9 \sim_\beta a_{10}$, $a_{11} \sim_\beta a_{12}$
- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_\alpha a_j$

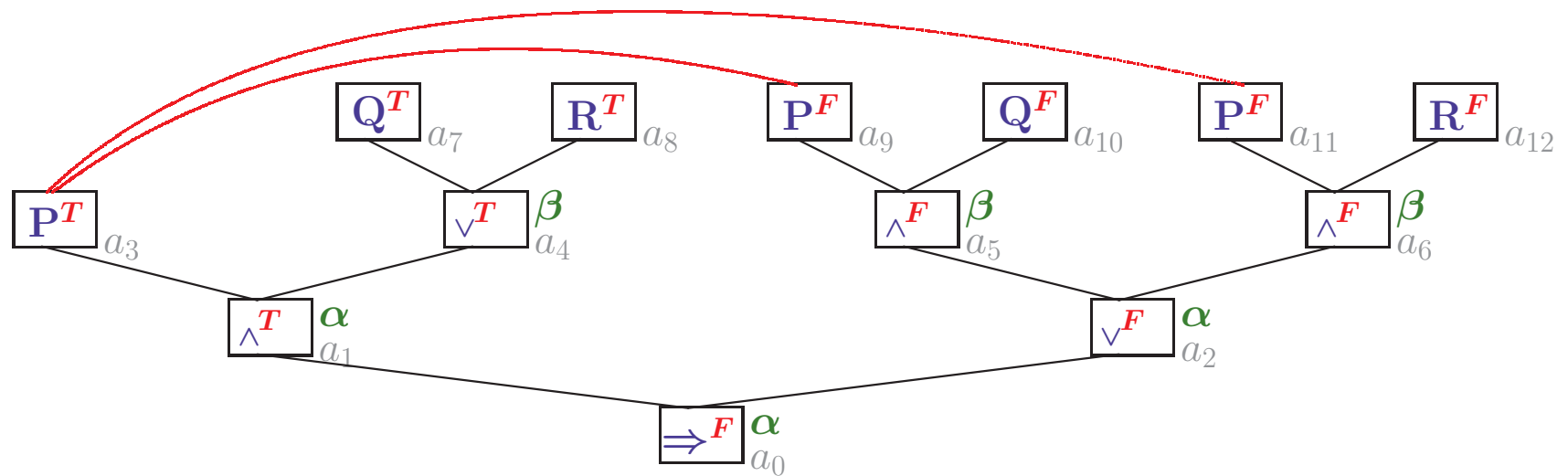
- 3 β -Beziehungen liefern 8 Pfade:

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,
 $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

- 4 Konnektionen

- $a_3 a_9$,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



- α/β -Beziehungen zwischen atomaren Formeln

- $a_7 \sim_\beta a_8$, $a_9 \sim_\beta a_{10}$, $a_{11} \sim_\beta a_{12}$
- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_\alpha a_j$

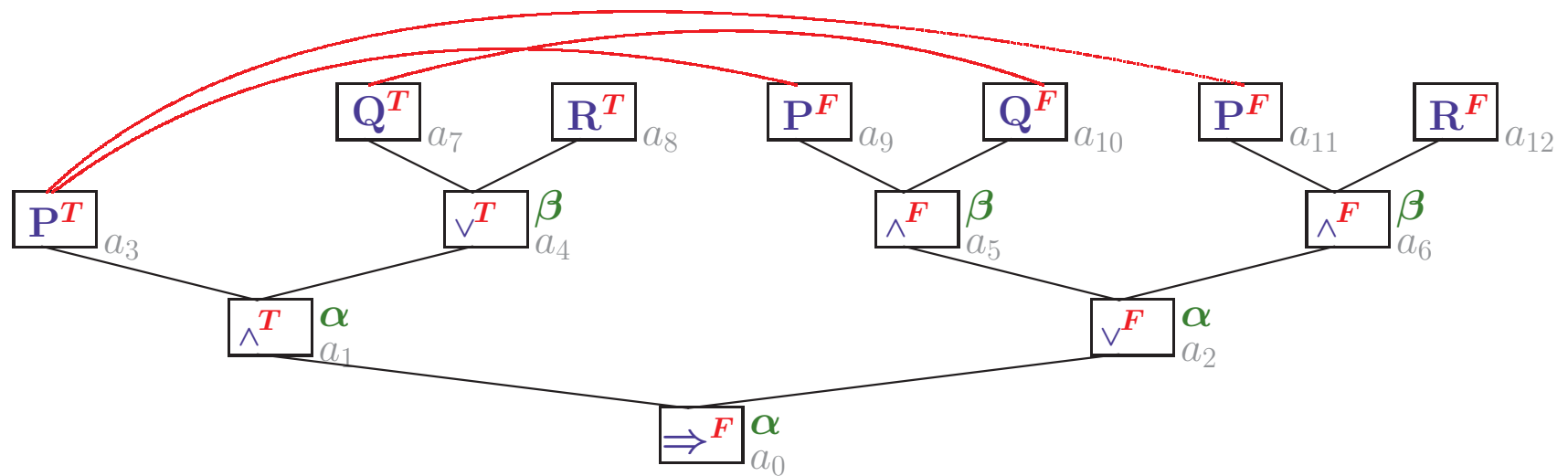
- 3 β -Beziehungen liefern 8 Pfade:

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,
 $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

- 4 Konnektionen

- $a_3 a_9$, $a_3 a_{11}$,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



- α/β -Beziehungen zwischen atomaren Formeln

- $a_7 \sim_\beta a_8$, $a_9 \sim_\beta a_{10}$, $a_{11} \sim_\beta a_{12}$
- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_\alpha a_j$

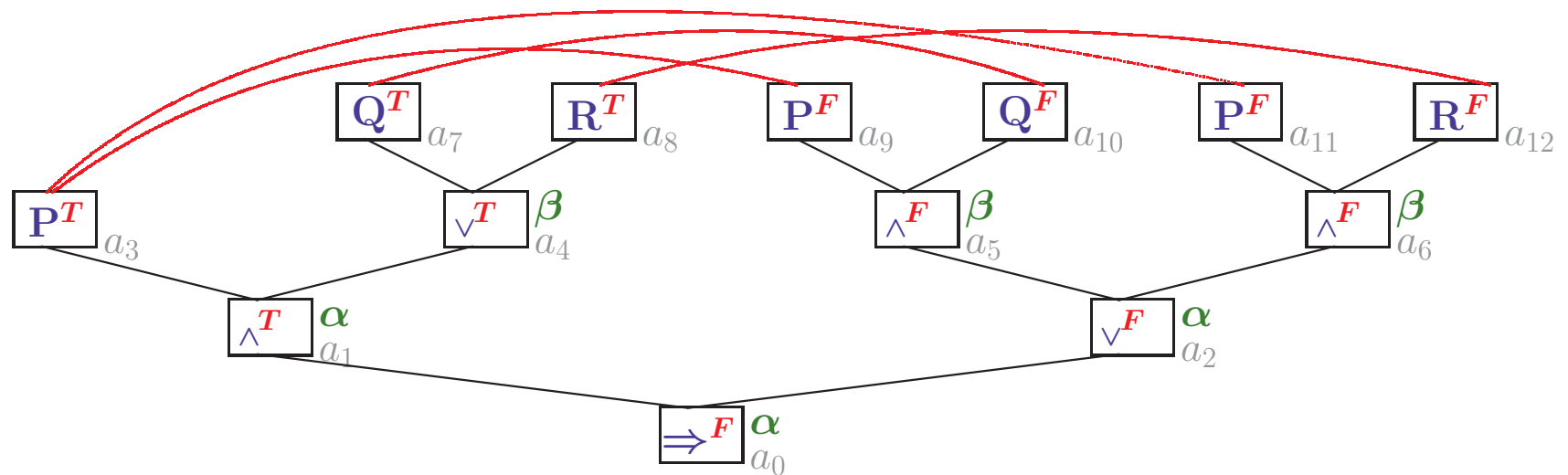
- 3 β -Beziehungen liefern 8 Pfade:

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,
 $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

- 4 Konnektionen

- $a_3 a_9$, $a_3 a_{11}$, $a_7 a_{10}$,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



- α/β -Beziehungen zwischen atomaren Formeln

- $a_7 \sim_\beta a_8$, $a_9 \sim_\beta a_{10}$, $a_{11} \sim_\beta a_{12}$
- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_\alpha a_j$

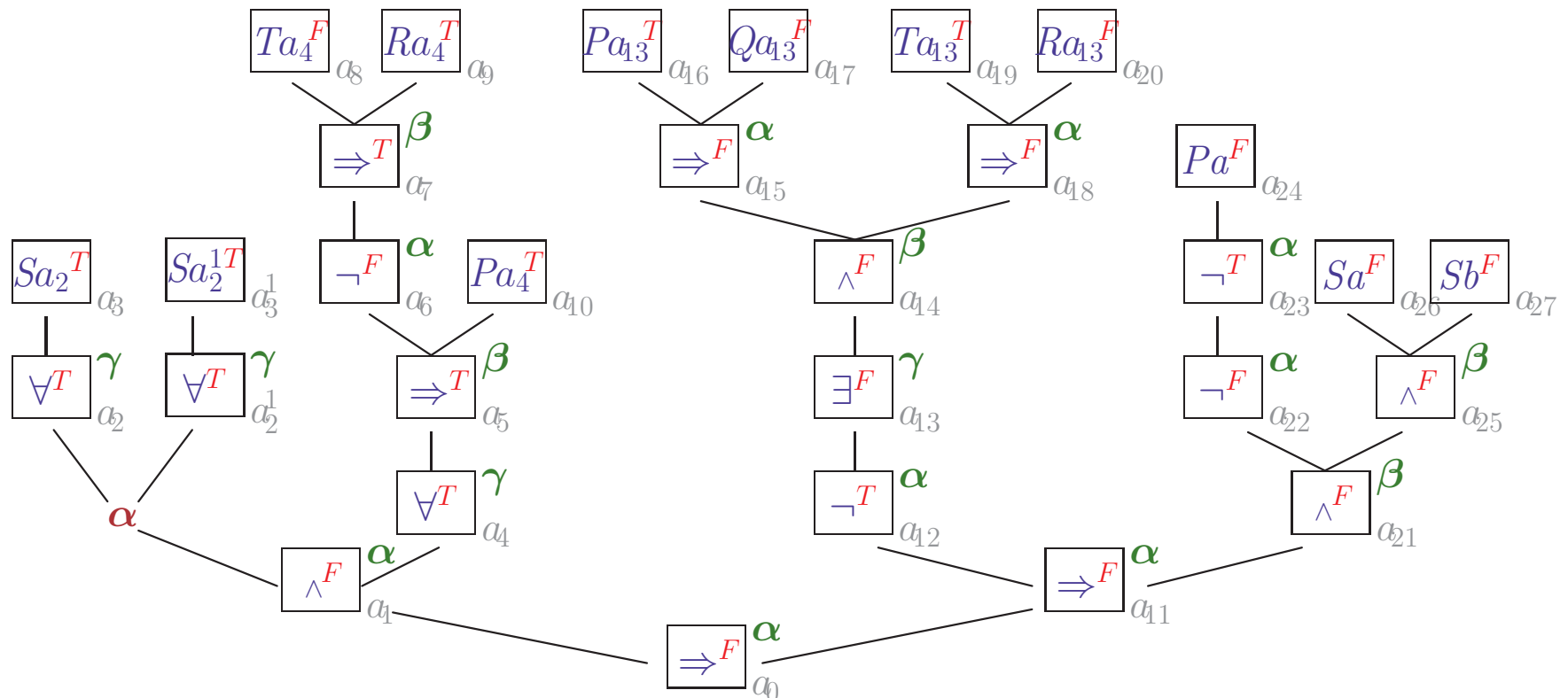
- 3 β -Beziehungen liefern 8 Pfade:

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,
 $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

- 4 Konnektionen

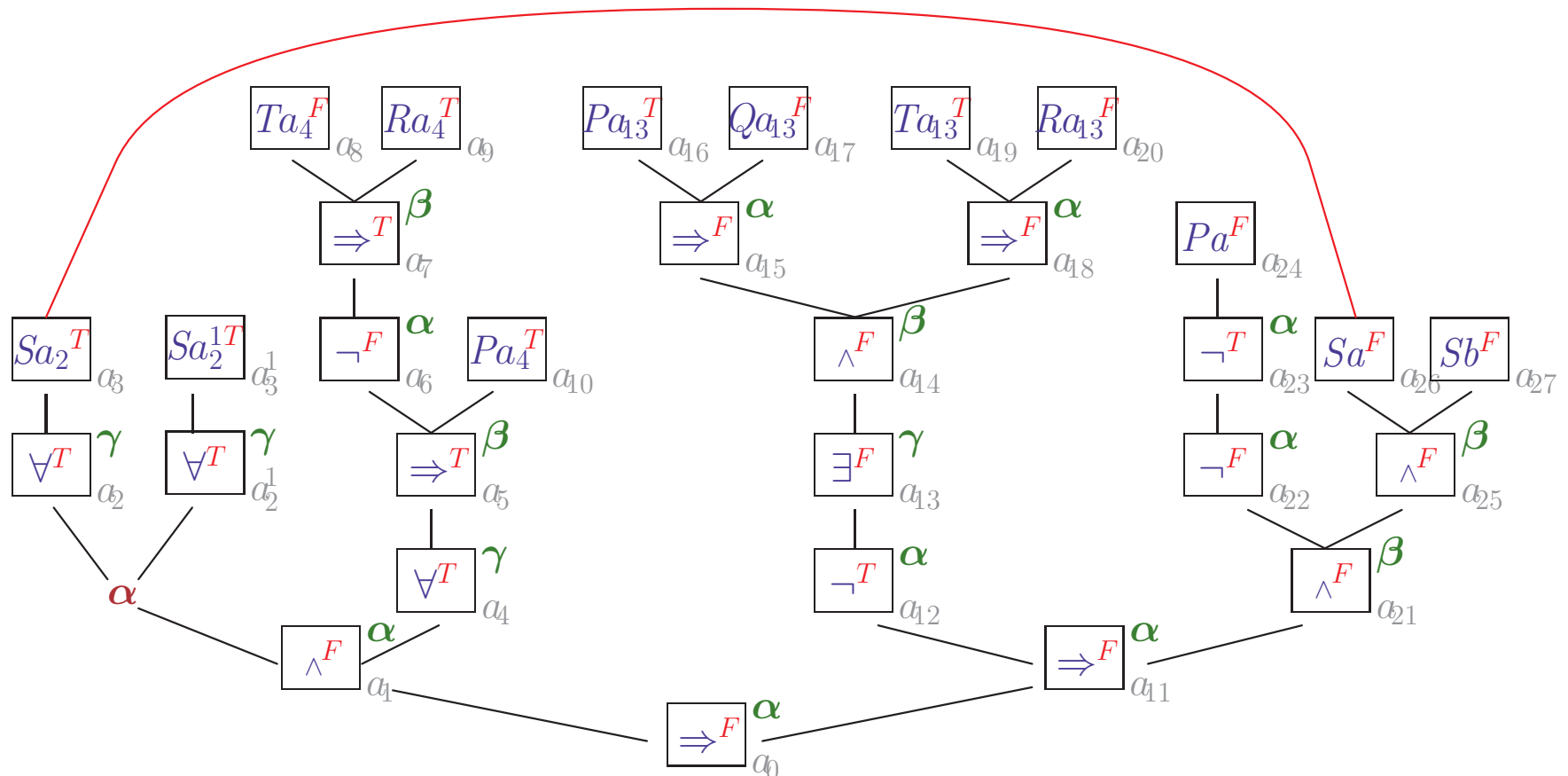
- $a_3 a_9$, $a_3 a_{11}$, $a_7 a_{10}$, $a_8 a_{12}$

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



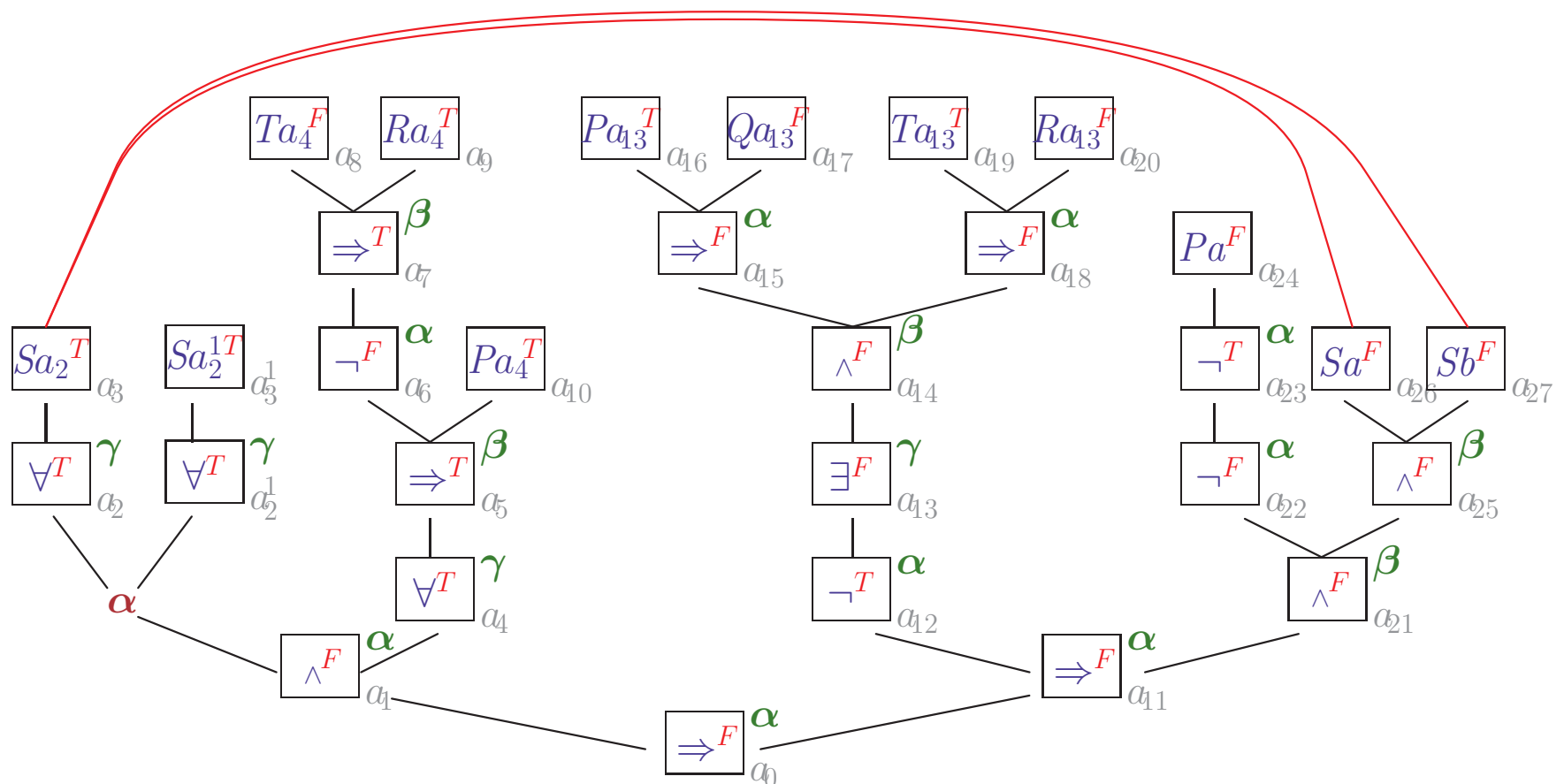
- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$,
 $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



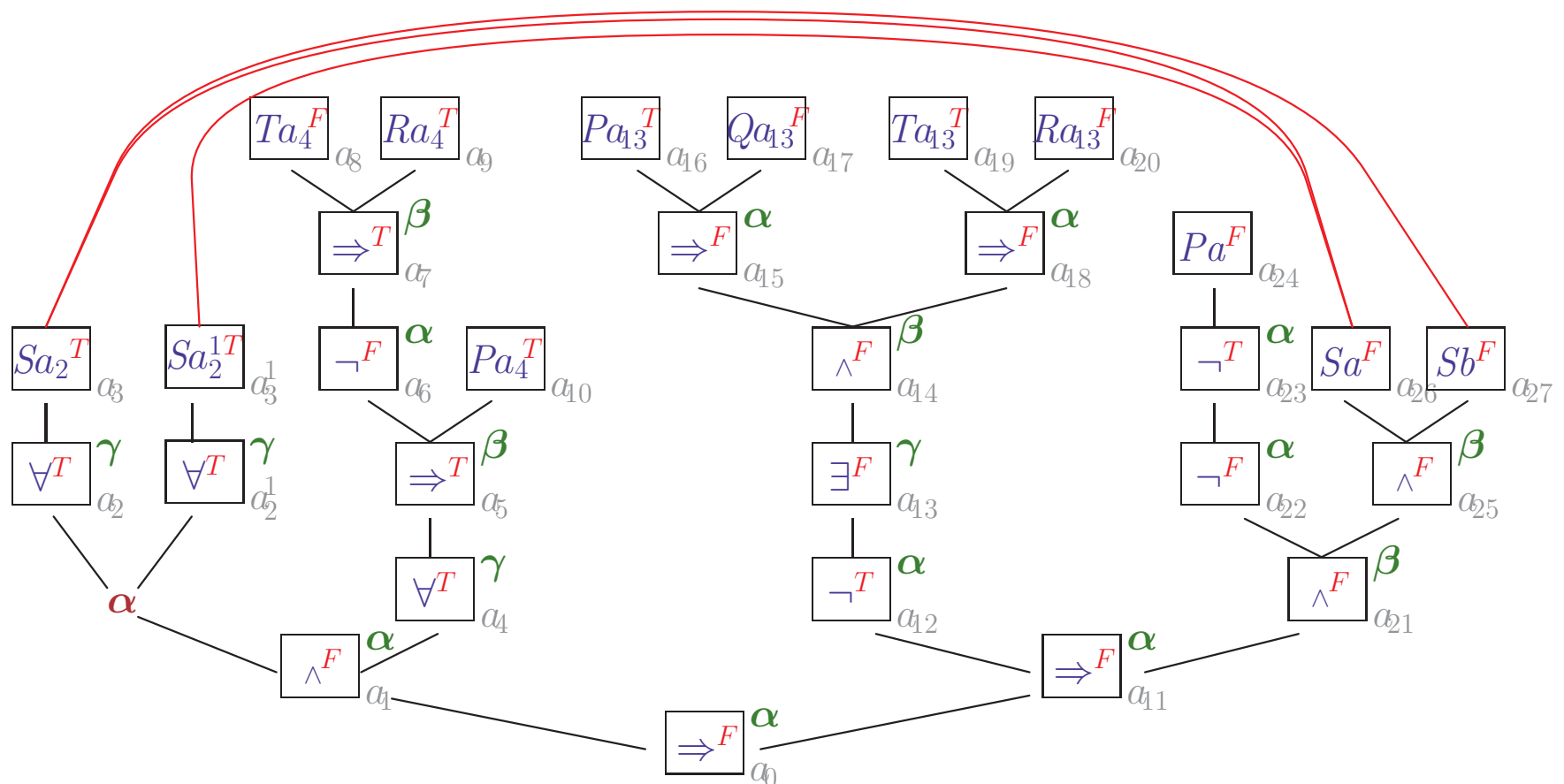
- 18 Pfade: $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$
- 8 Konnektionen: a_3a_{26} ,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



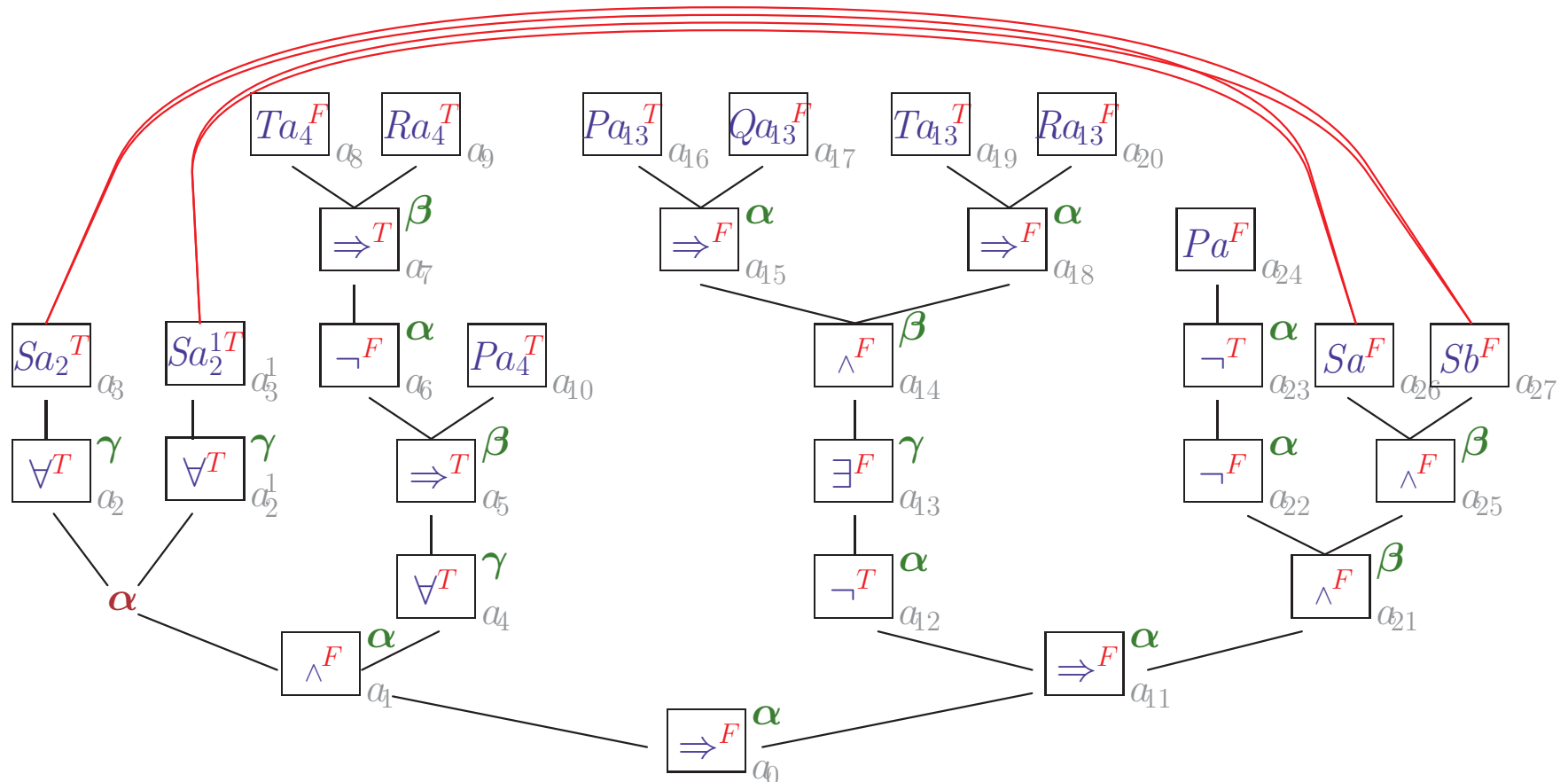
- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$,
 $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26} , a_3a_{27} ,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



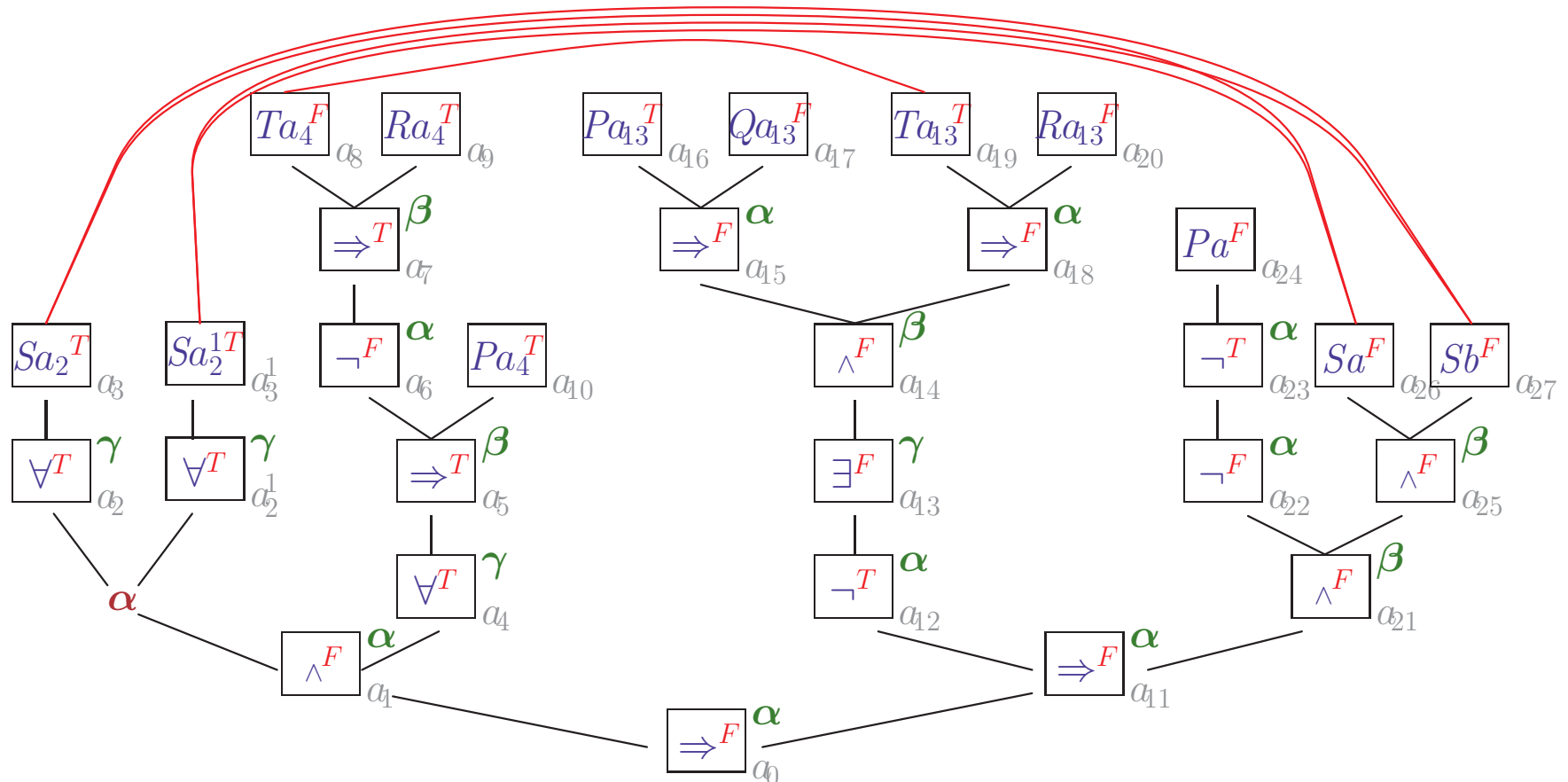
- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$,
 $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26} , a_3a_{27} , $a_3^1a_{26}$,

PFADDE UND KONNEKTIONEN IN FORMELBÄUMEN



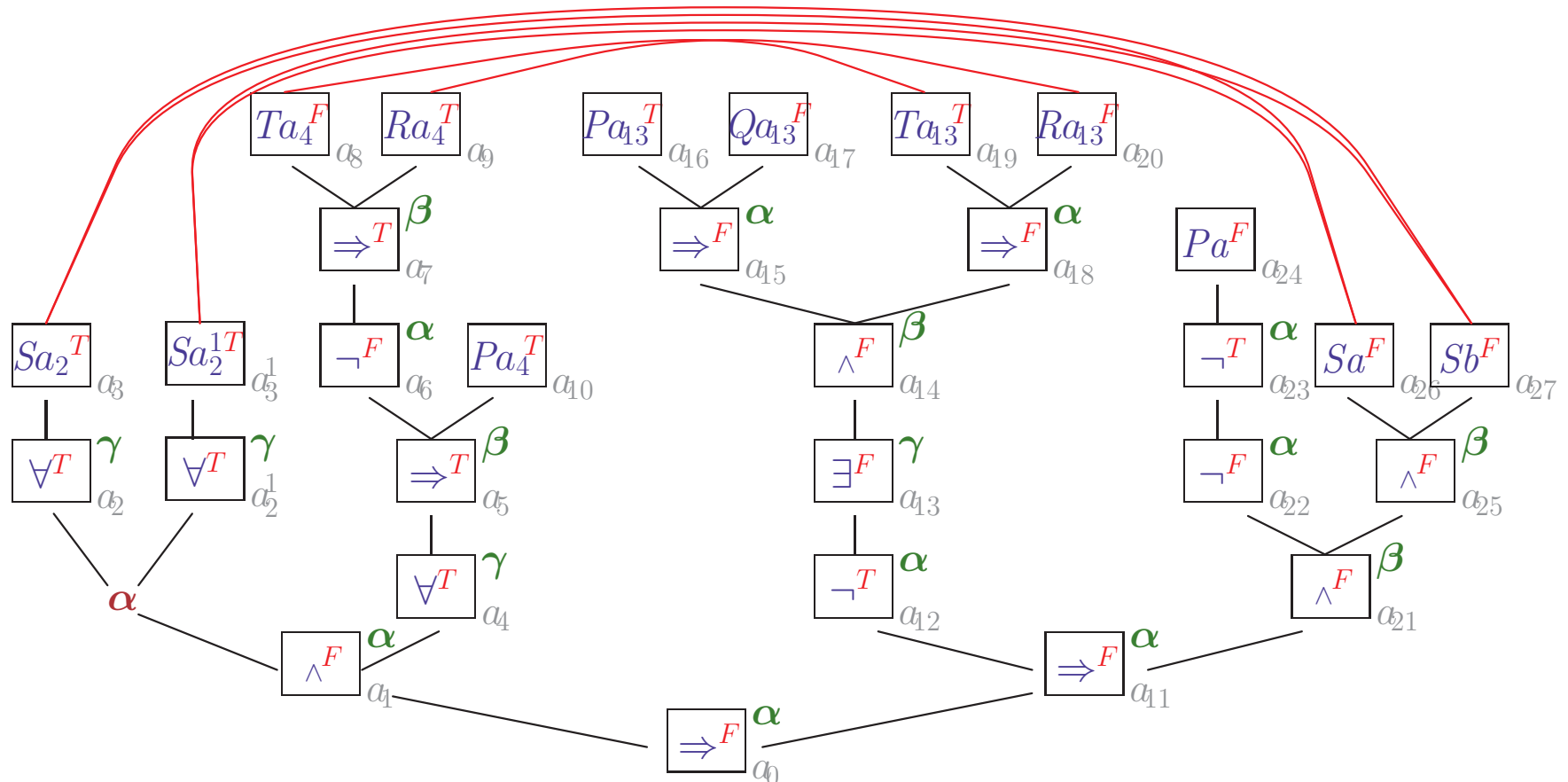
- 18 Pfade: $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$
- 8 Konnektionen: a_3a_{26} , a_3a_{27} , $a_3^1a_{26}$, $a_3^1a_{27}$,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



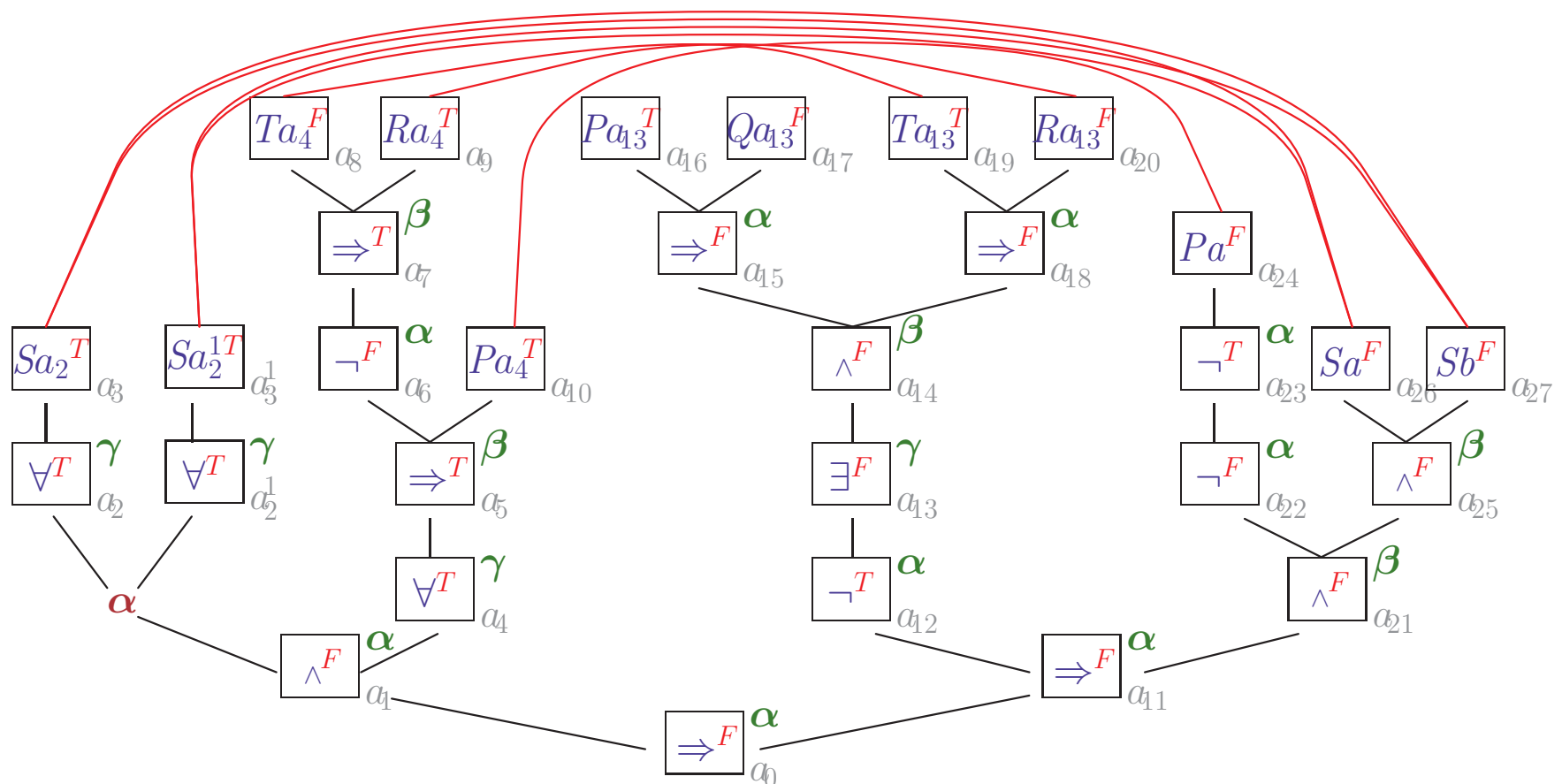
- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$,
 $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26} , a_3a_{27} , $a_3^1a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19} ,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



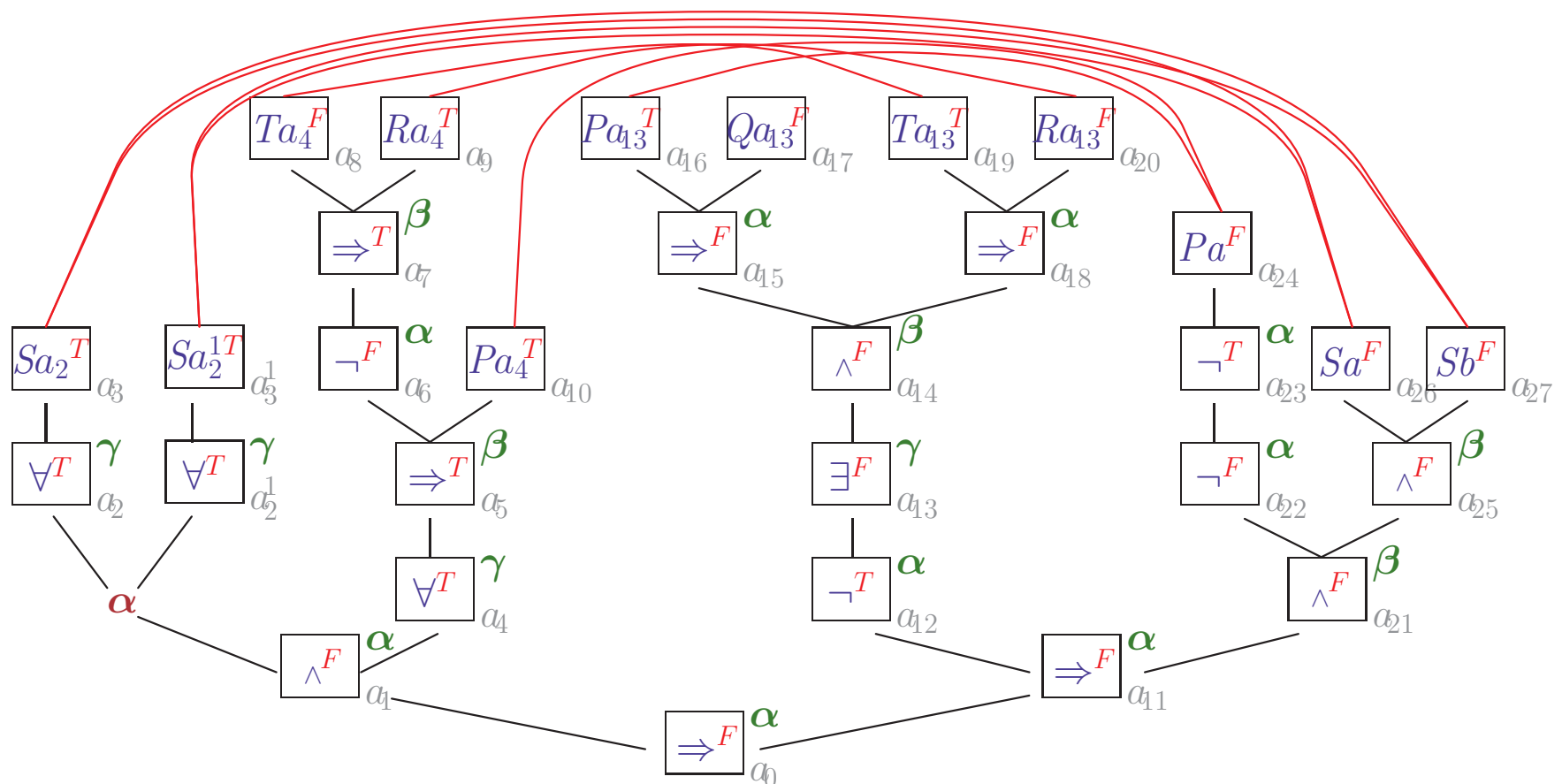
- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26} , a_3a_{27} , $a_3^1a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19} , a_9a_{20} ,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



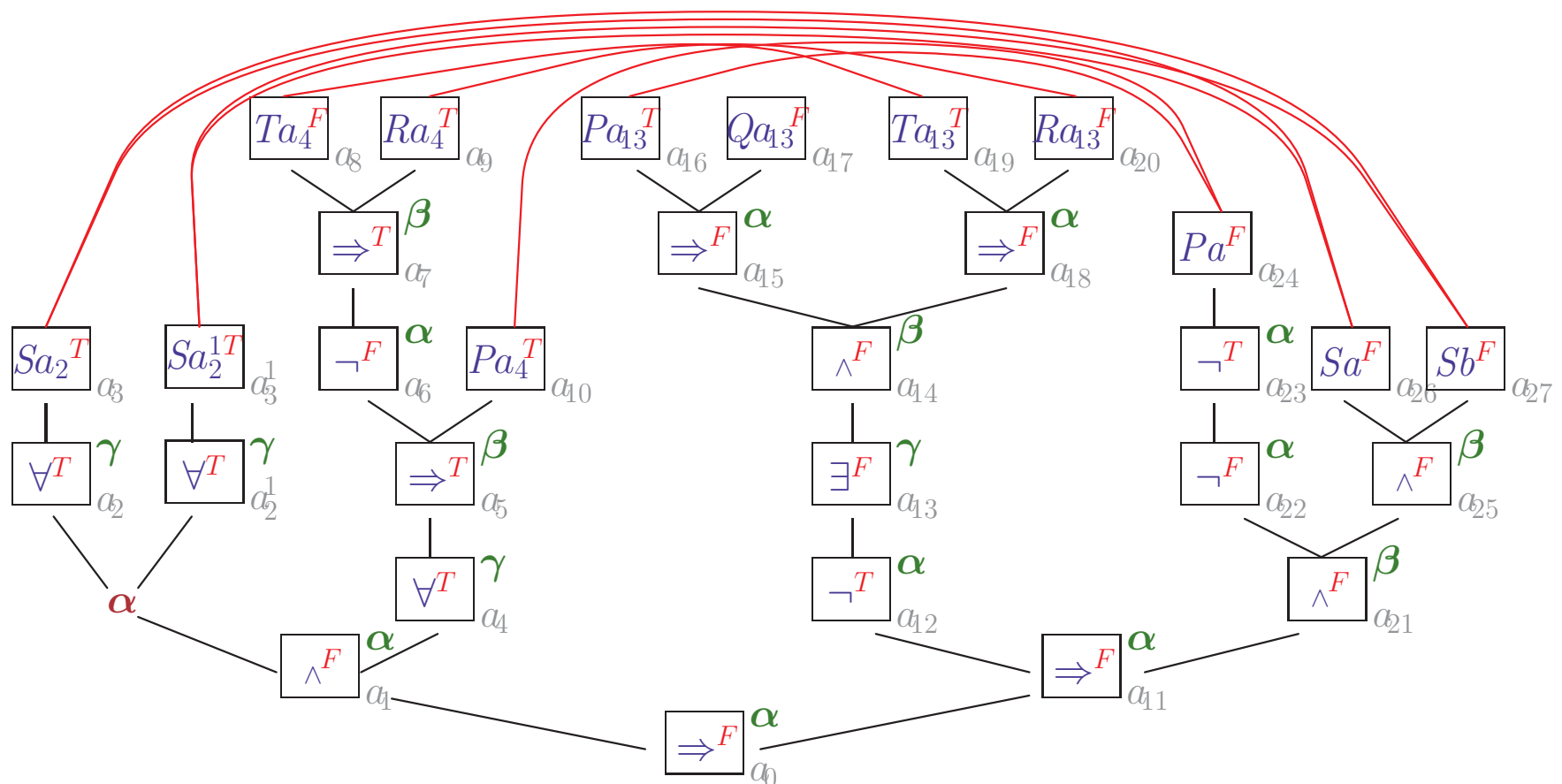
- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$,
 $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26} , a_3a_{27} , $a_3^1a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19} , a_9a_{20} , $a_{10}a_{24}$,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



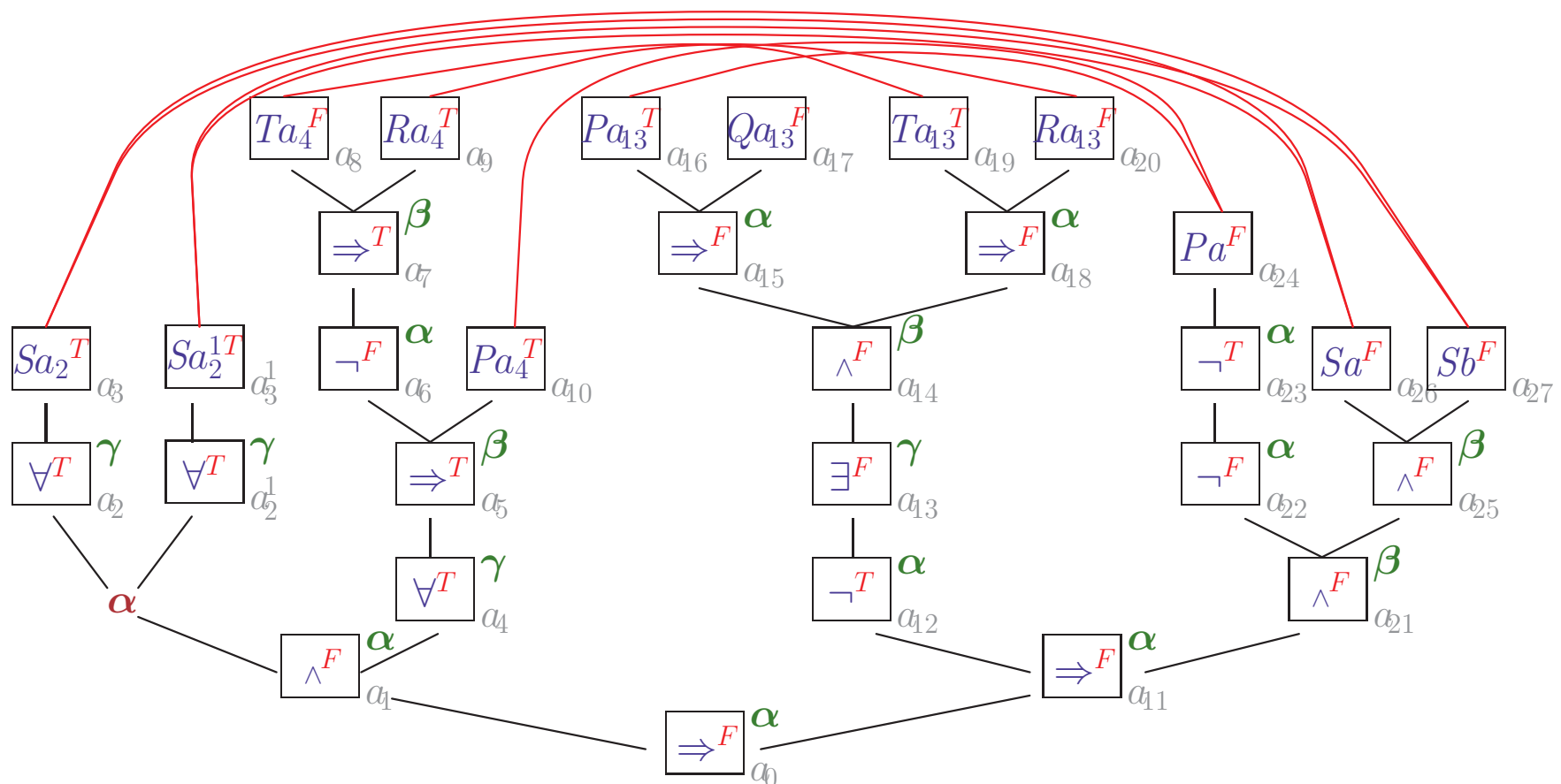
- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$,
 $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26} , a_3a_{27} , $a_3^1a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19} , a_9a_{20} , $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$,
 $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26} , a_3a_{27} , $a_3^1a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19} , a_9a_{20} , $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$
 $- a_3a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19} , a_9a_{20} , $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$ komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$

PFAD E UND KONNEKT I O N E N I N F O R M E L B Ä U M E N



- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$,
 $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$ $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, $\dots$
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26} , a_3a_{27} , $a_3^1a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19} , a_9a_{20} , $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$
 $- a_3a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19} , a_9a_{20} , $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$ komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$
 $- a_3a_{27}$, $a_3^1a_{26}$, a_8a_{19} , a_9a_{20} , $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$ komplementär unter $\sigma = [a/a_2, b/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$

MATRIXKALKÜLE PRÄZISIERT: BEWEISBEGRIFF

“Alle Zweige des Tableauxbeweises sind geschlossen”

MATRIXKALKÜLE PRÄZISIERT: BEWEISBEGRIFF

“Alle Zweige des Tableauxbeweises sind geschlossen”

- σ induziert **Reduktionsordnung** $\triangleleft := (< \cup \sqsubseteq)^+$
 - $v \sqsubseteq u$, falls $\sigma(u)=t$ und v kommt in t vor (v δ -Position, u γ -Position)
 - σ ist **zulässig**, falls $\triangleleft$ azyklisch ($\hat{=}$ eine Tableauxreduktion ist möglich)

“Alle Zweige des Tableauxbeweises sind geschlossen”

- σ induziert **Reduktionsordnung** $\triangleleft := (< \cup \sqsubseteq)^+$
 - $v \sqsubseteq u$, falls $\sigma(u) = t$ und v kommt in t vor (v δ -Position, u γ -Position)
 - σ ist **zulässig**, falls $\triangleleft$ azyklisch ($\hat{=}$ eine Tableauxreduktion ist möglich)
- **Charakterisierungstheorem für klassische Logik**

Eine Formel F ist gültig, wenn es eine Multiplizität μ , eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von σ -komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

“Alle Zweige des Tableauxbeweises sind geschlossen”

- σ induziert **Reduktionsordnung** $\triangleleft := (< \cup \sqsubseteq)^+$
 - $v \sqsubseteq u$, falls $\sigma(u) = t$ und v kommt in t vor (v δ -Position, u γ -Position)
 - σ ist **zulässig**, falls $\triangleleft$ azyklisch ($\hat{=}$ eine Tableauxreduktion ist möglich)
- **Charakterisierungstheorem für klassische Logik**

Eine Formel F ist gültig, wenn es eine Multiplizität μ , eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von σ -komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält
- **Aufgabe eines automatischen Beweisverfahrens**
 - Identifiziere mögliche Konnektionen
 - Teste, ob jeder Pfad durch F mindestens eine Konnektion enthält
 - Bestimme Substitution σ , die Konnektionen komplementär macht
 - Überprüfe Zulässigkeit der Substitution
 - Wo nötig, erhöhe Multiplizität μ von γ -Knoten

BEWEIS DES CHARAKTERISIERUNGSTHEOREMS (SKIZZE)

Eine Formel F ist gültig, wenn es eine Multiplizität μ , eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von σ -komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

BEWEIS DES CHARAKTERISIERUNGSTHEOREMS (SKIZZE)

Eine Formel F ist gültig, wenn es eine Multiplizität μ , eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von σ -komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

● Korrektheit: erzeuge Tableauxbeweis aus μ, σ

- Transformiere (azyklische) Reduktionsordnung $\triangleleft$ in eine lineare Ordnung
- Wende Tableauxregeln in der Reihenfolge dieser Ordnung an
- Instantiiere δ -Formeln wie im annotierten Formelbaum
- Instantiiere γ -Formeln entsprechend der Substitution σ

Per Konstruktion ist jeder Zweig des Tableaus geschlossen

BEWEIS DES CHARAKTERISIERUNGSTHEOREMS (SKIZZE)

Eine Formel F ist gültig, wenn es eine Multiplizität μ , eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von σ -komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

● **Korrektheit: erzeuge Tableauxbeweis aus μ, σ**

- Transformiere (azyklische) Reduktionsordnung $\triangleleft$ in eine lineare Ordnung
- Wende Tableauxregeln in der Reihenfolge dieser Ordnung an
- Instantiiere δ -Formeln wie im annotierten Formelbaum
- Instantiiere γ -Formeln entsprechend der Substitution σ

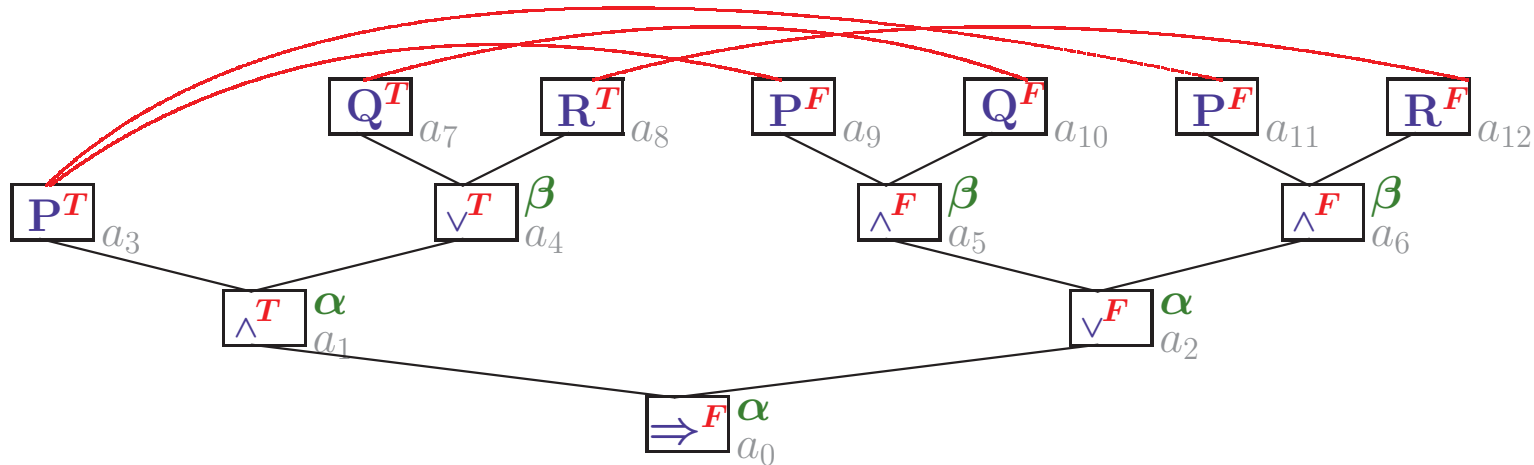
Per Konstruktion ist jeder Zweig des Tableaus geschlossen

● **Vollständigkeit: erzeuge $\mathcal{C}, \mu, \sigma$ aus Tableauxbeweis**

- Generiere annotierten Formelbaum
- Für γ -Knoten ist μ die Anzahl der Instanzen im Tableauxbeweis
- Wähle Substitution σ passend zu den ausgeführten γ -Regeln
 σ ist zulässig aufgrund der Bedingungen an γ - und δ -Regeln
- Wähle $\mathcal{C}$ als Menge der Formelpaare, welche die Zweige abschließen
Alle Konnektionen sind σ -komplementär

Per Konstruktion enthält jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$

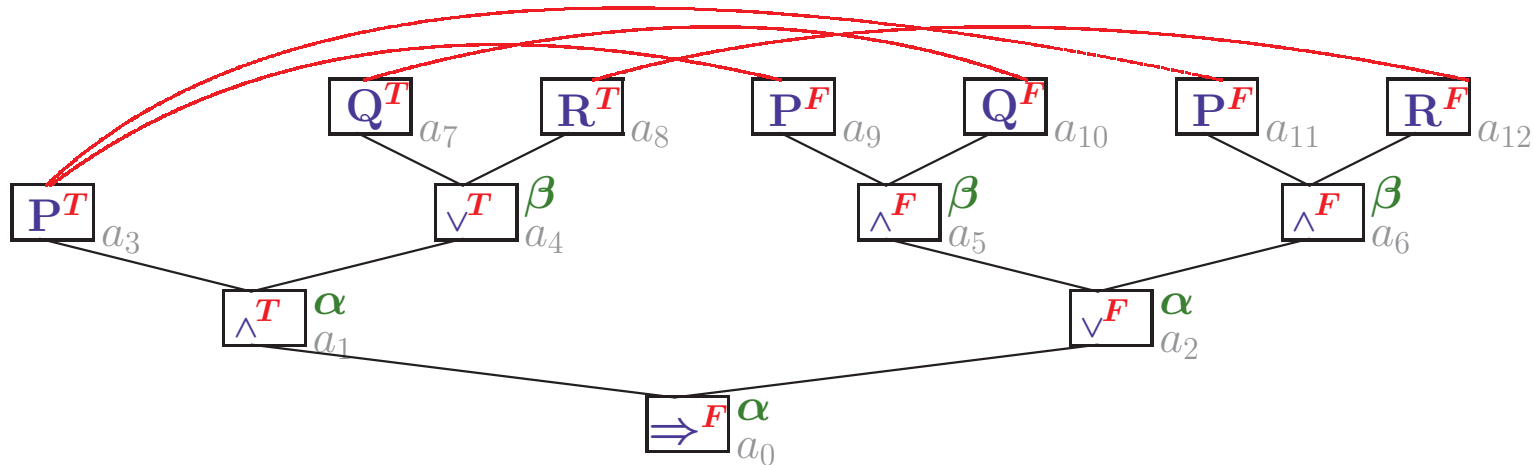
BEWEIS FÜR $(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$



• Alle Pfade enthalten eine Konnektion

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}, a_3 a_7 a_9 a_{12}, a_3 a_7 a_{10} a_{11}, a_3 a_7 a_{10} a_{12},$
 $a_3 a_8 a_9 a_{11}, a_3 a_8 a_9 a_{12}, a_3 a_8 a_{10} a_{11}, a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

BEWEIS FÜR $(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$



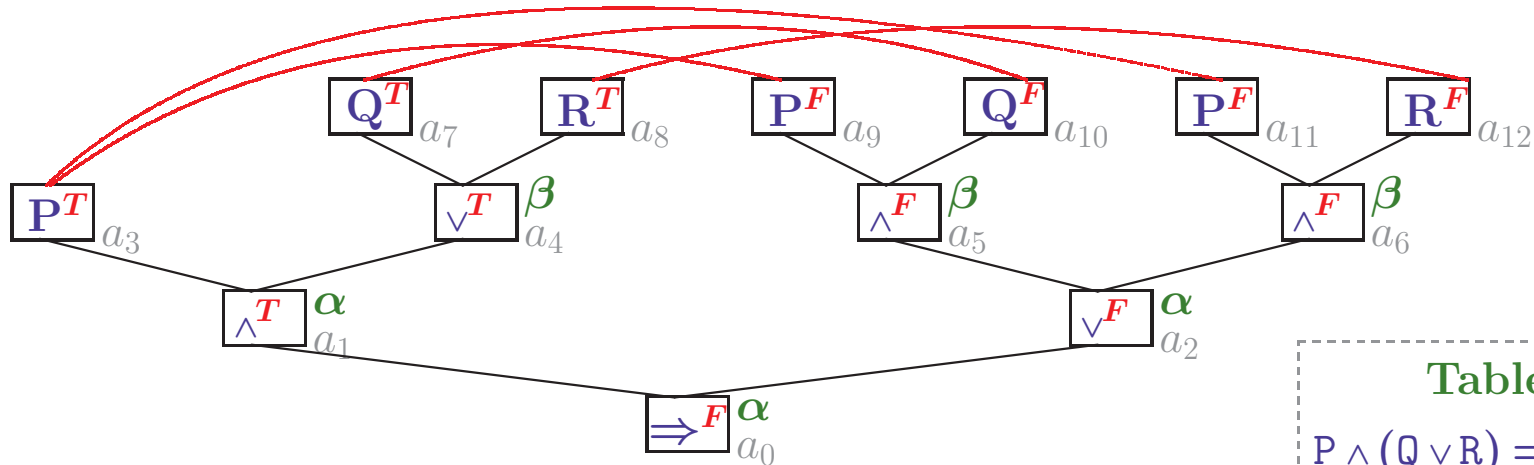
- Alle Pfade enthalten eine Konnektion

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,
 $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

- Die Formel ist gültig

- Alle Konnektionen sind komplementär

BEWEIS FÜR $(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$



- Alle Pfade enthalten eine Konnektion

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,
 $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

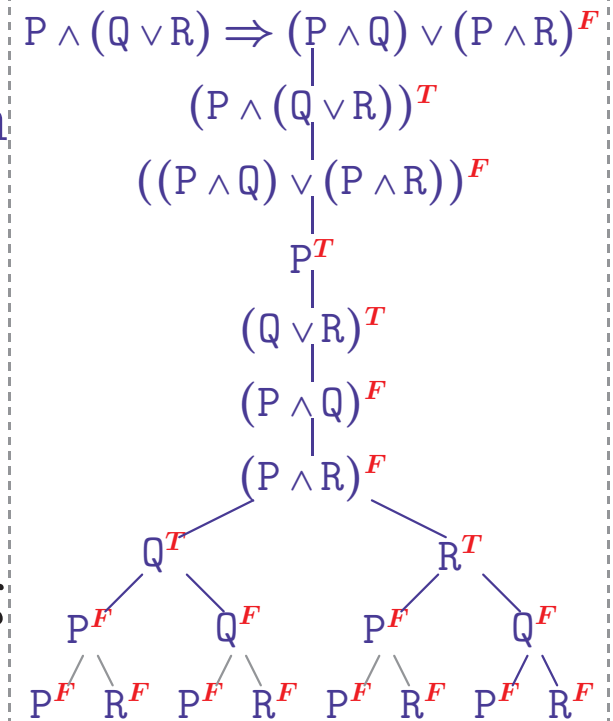
- Die Formel ist gültig

- Alle Konnektionen sind komplementär

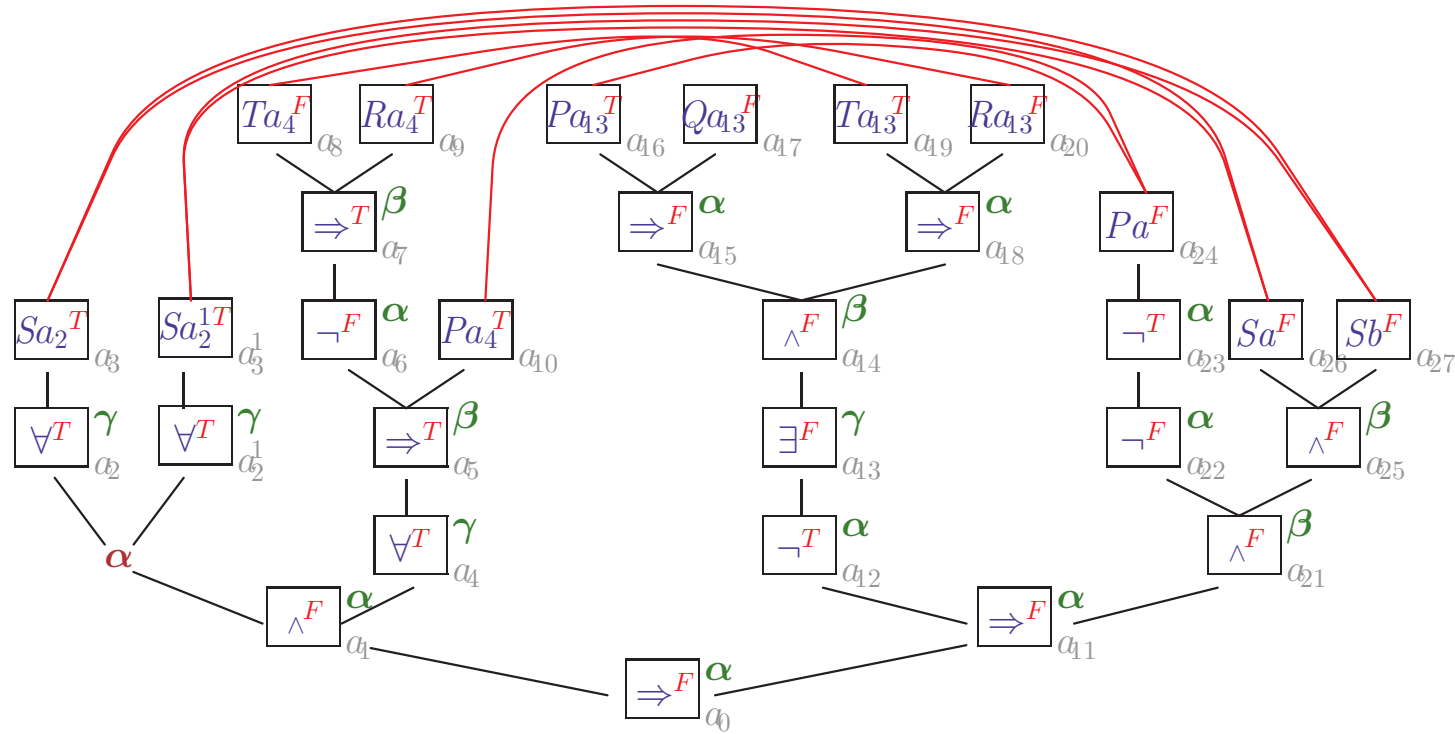
- Reduktionsordnung ist Baumordnung

- Mögliche Linearisierung: $a_0 a_1 a_2 a_4 a_5 a_6$

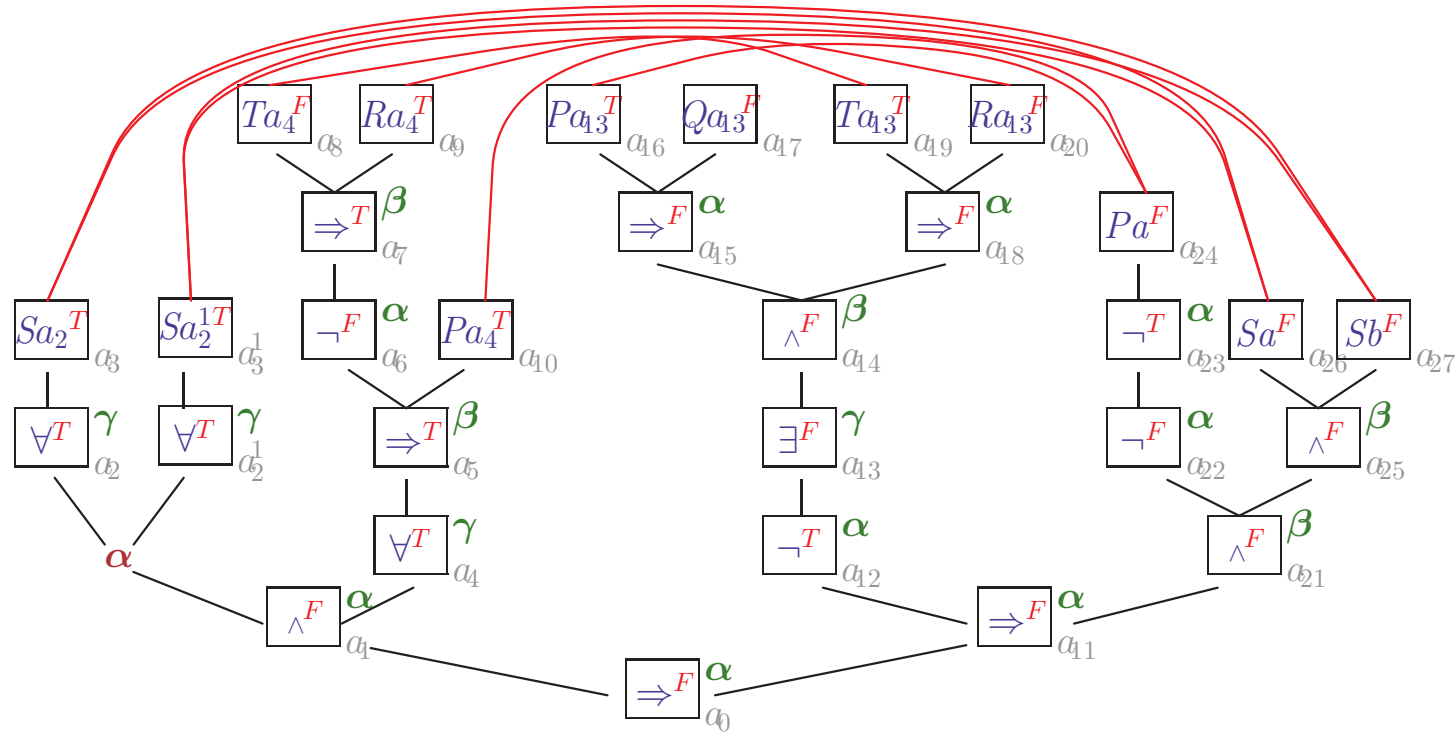
Tableauxbeweis



MATRIXBEWEIS MIT SUBSTITUTION



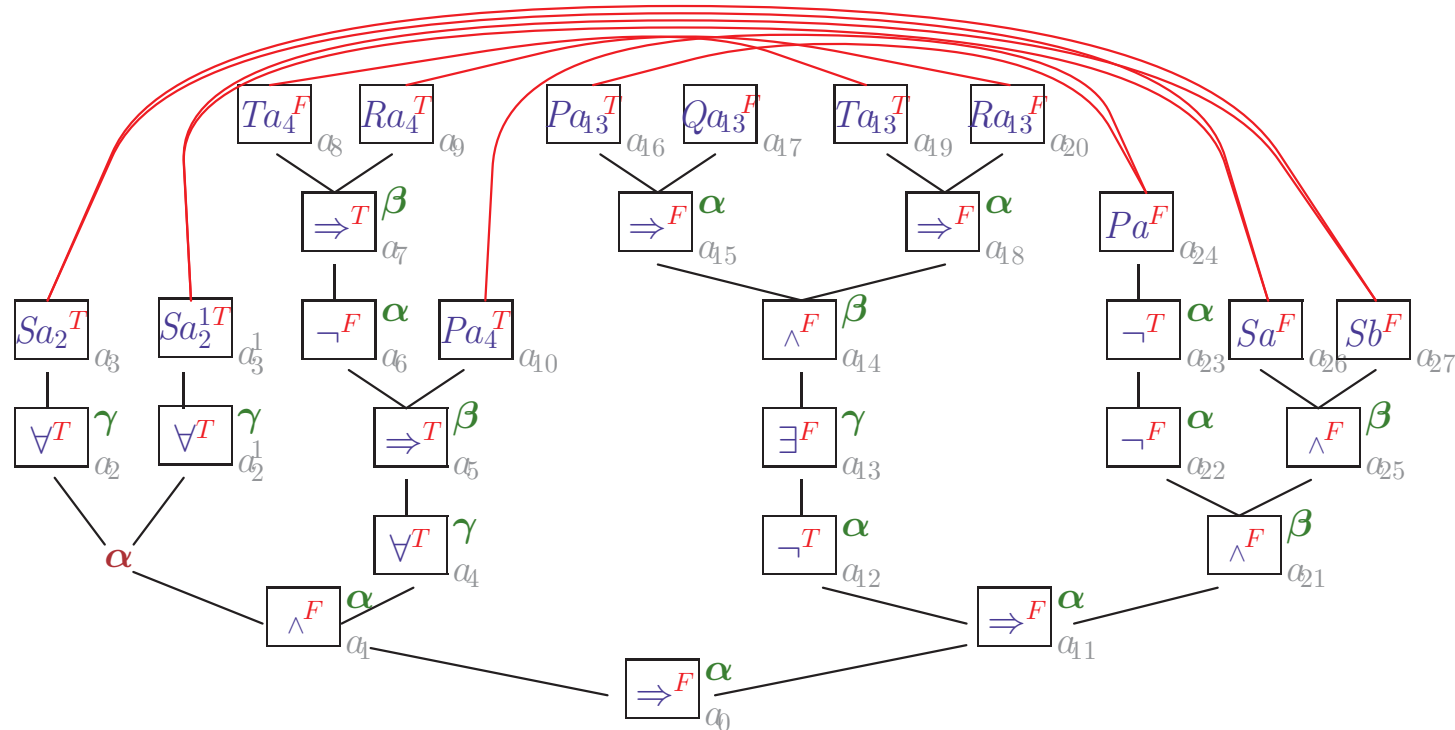
MATRIXBEWEIS MIT SUBSTITUTION



- Alle 18 Pfade enthalten eine Konnektion:

$a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$,
 $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, $\dots a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}, \dots$
 $\mathcal{C} = \{ \{a_3 a_{27}\}, \{a_3^1 a_{26}\}, \{a_8 a_{19}\}, \{a_9 a_{20}\}, \{a_{10} a_{24}\}, \{a_{16} a_{24}\} \}$

MATRIXBEWEIS MIT SUBSTITUTION



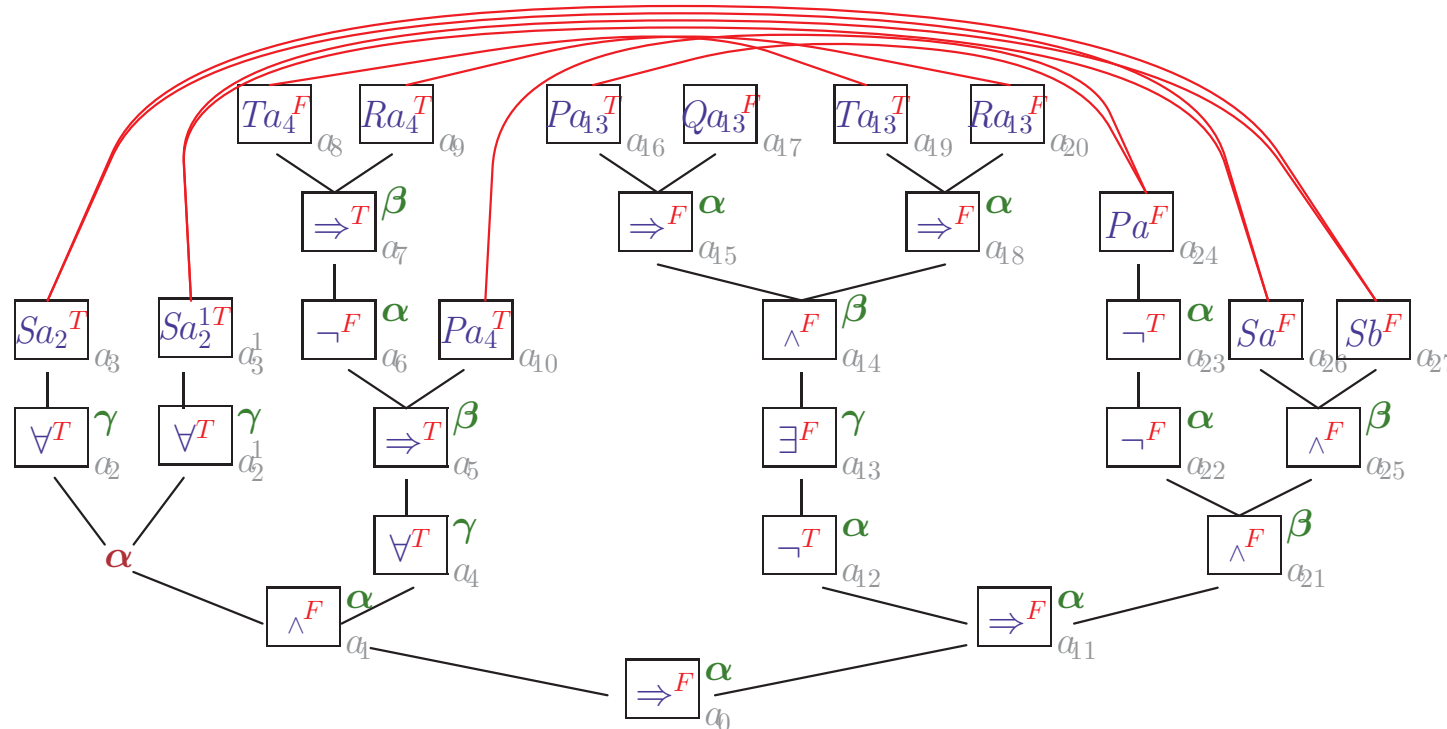
- Alle 18 Pfade enthalten eine Konnektion:

$a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$,
 $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, $\dots$ $a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}$, $\dots$

$$\mathcal{C} = \{ \{a_3 a_{27}\}, \{a_3^1 a_{26}\}, \{a_8 a_{19}\}, \{a_9 a_{20}\}, \{a_{10} a_{24}\}, \{a_{16} a_{24}\} \}$$

- $\mathcal{C}$ ist komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$
 - σ ist zulässig, da keine δ -Positionen vorhanden ($\triangleleft = <$)

MATRIXBEWEIS MIT SUBSTITUTION



- Alle 18 Pfade enthalten eine **Konnektion**:

$a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$,
 $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, $\dots a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}, \dots$

$$\mathcal{C} = \{ \{a_3 a_{27}\}, \{a_3^1 a_{26}\}, \{a_8 a_{19}\}, \{a_9 a_{20}\}, \{a_{10} a_{24}\}, \{a_{16} a_{24}\} \}$$

- $\mathcal{C}$ ist komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$
 - σ ist zulässig, da keine δ -Positionen vorhanden ($\triangleleft = <$)

- Die Formel ist gültig

MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

**2-dimensionale Darstellung der Atome
zur Veranschaulichung der Beweismethodik**

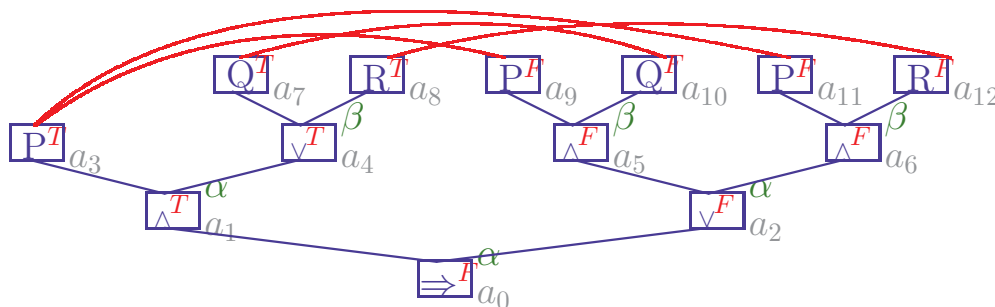
2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt

MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

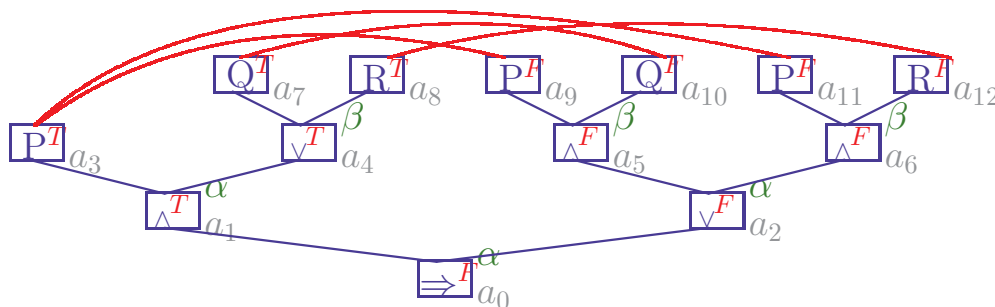
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen

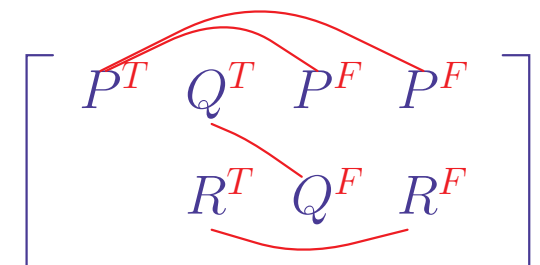
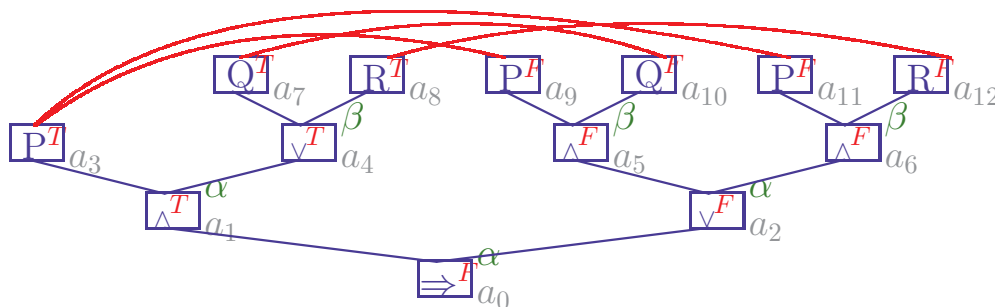


$$\begin{bmatrix} P^T & Q^T & P^F & P^F \\ & R^T & Q^F & R^F \end{bmatrix}$$

MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

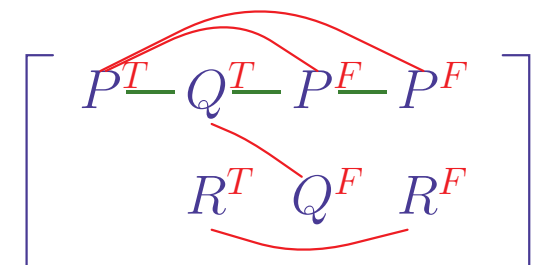
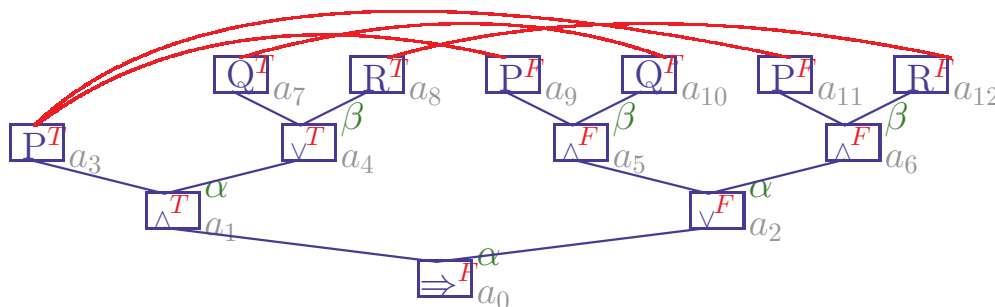
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

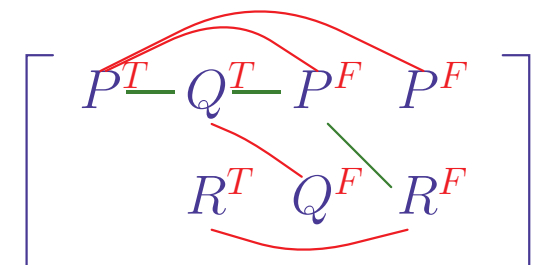
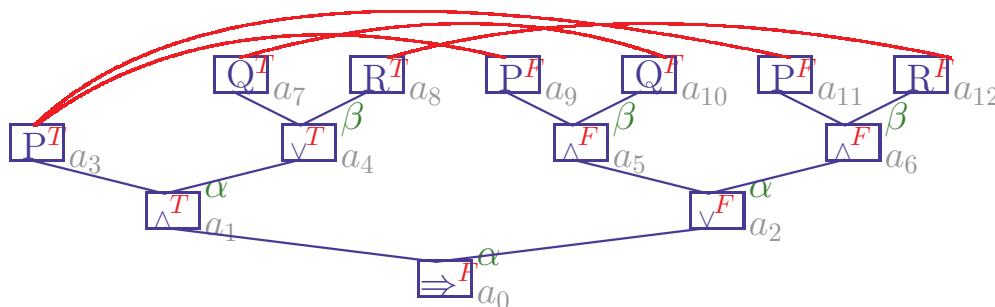
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

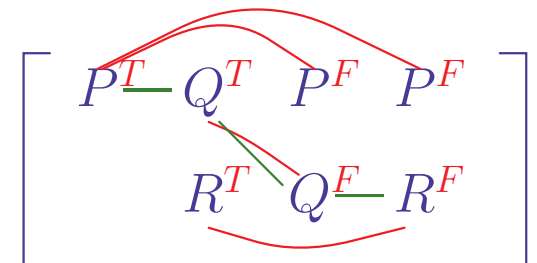
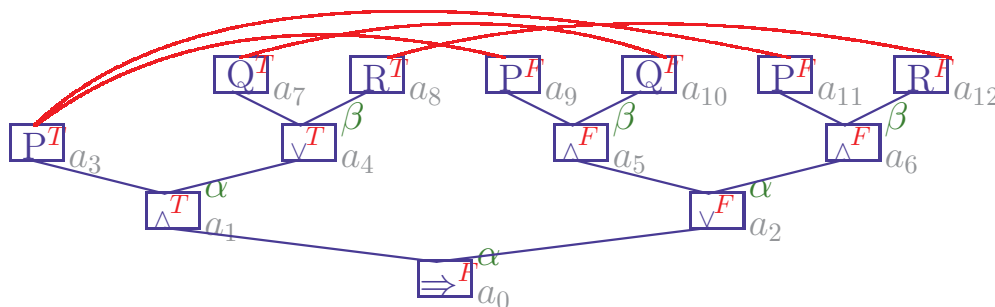
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

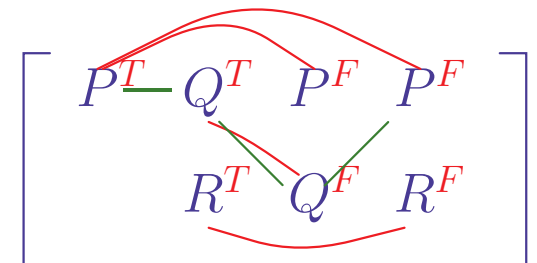
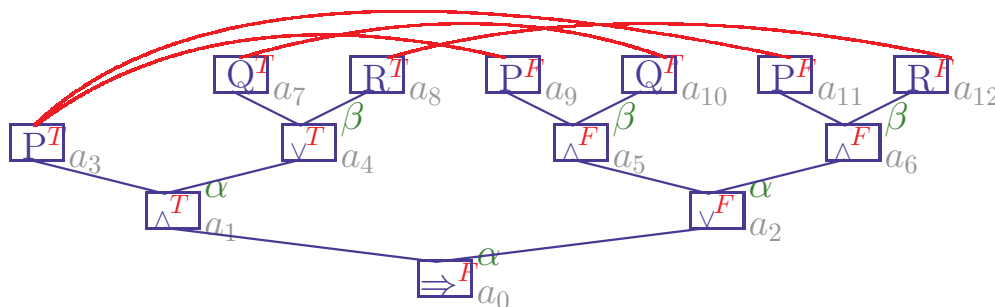
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

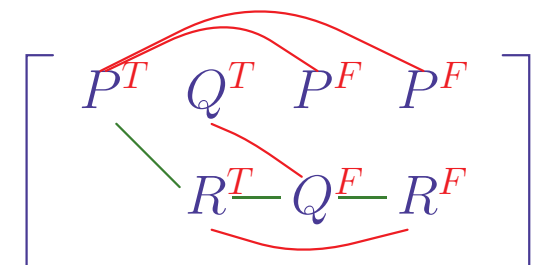
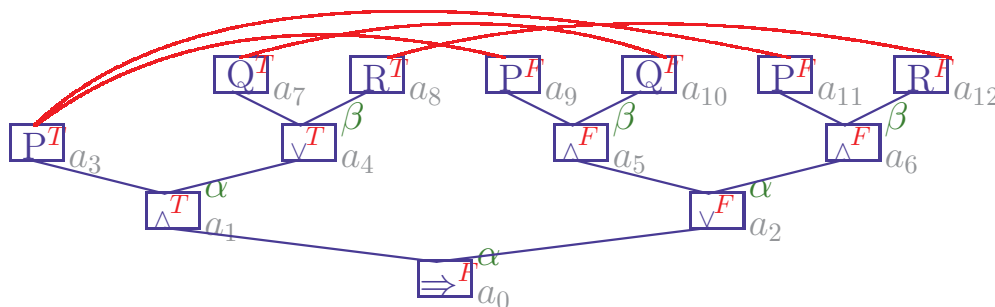
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

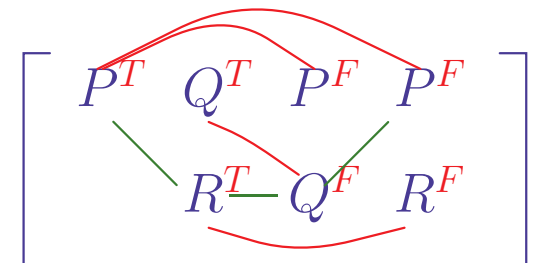
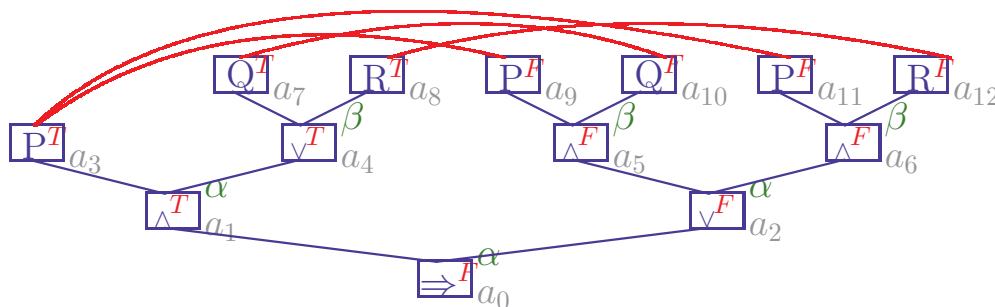
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

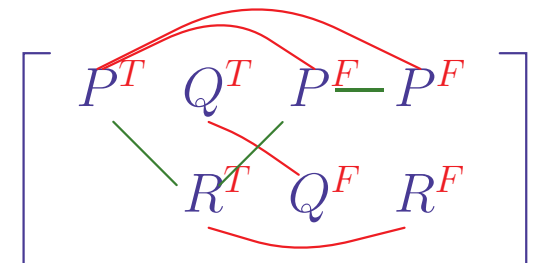
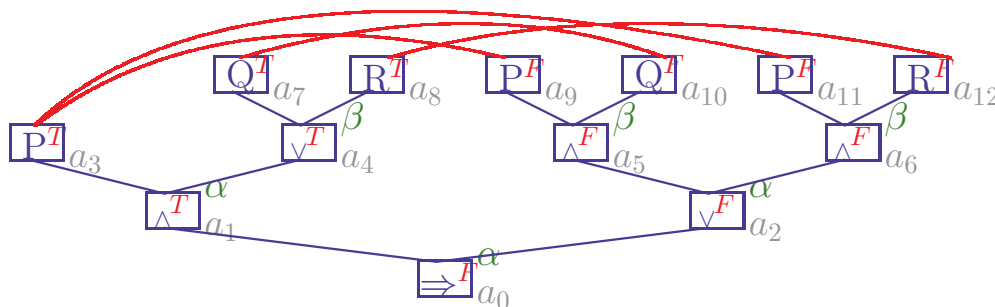
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

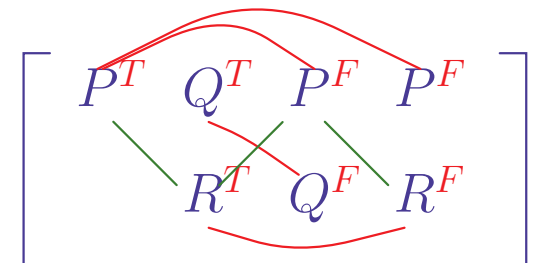
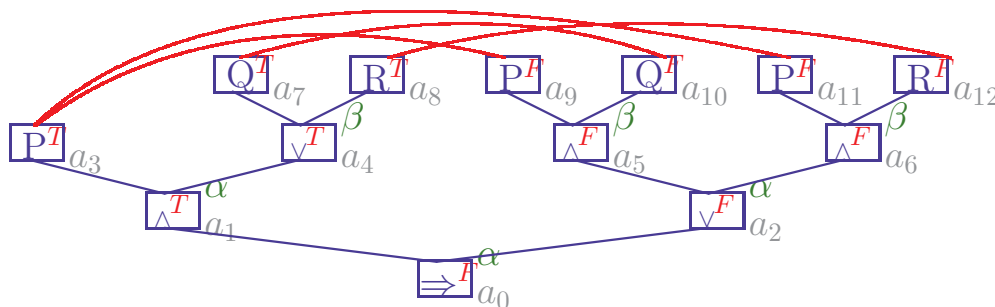
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



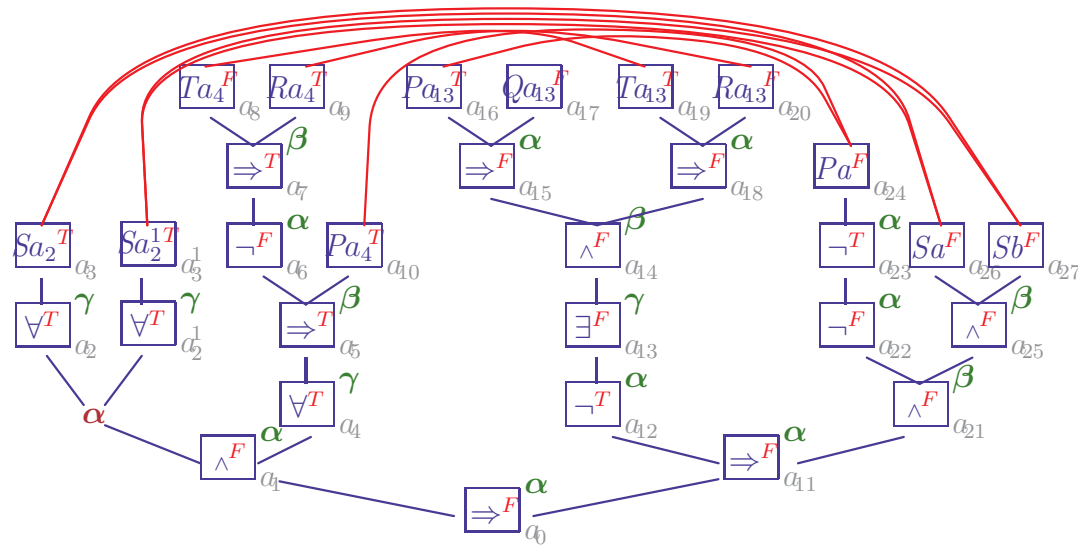
MATRIXDARSTELLUNG EINER FORMEL

2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

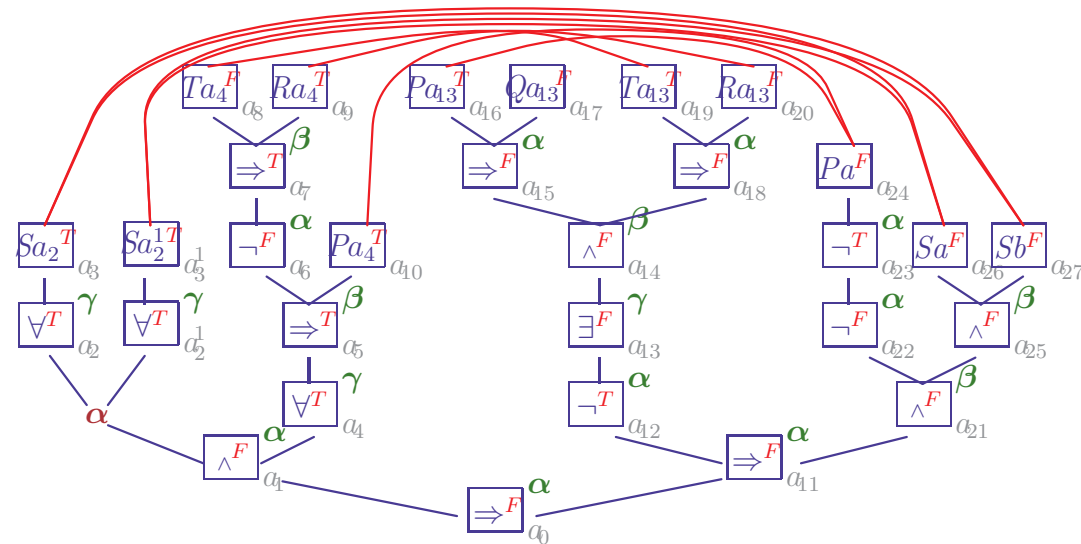
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



MATRIXDARSTELLUNG EINER KOMPLEXEN FORMEL



MATRIXDARSTELLUNG EINER KOMPLEXEN FORMEL

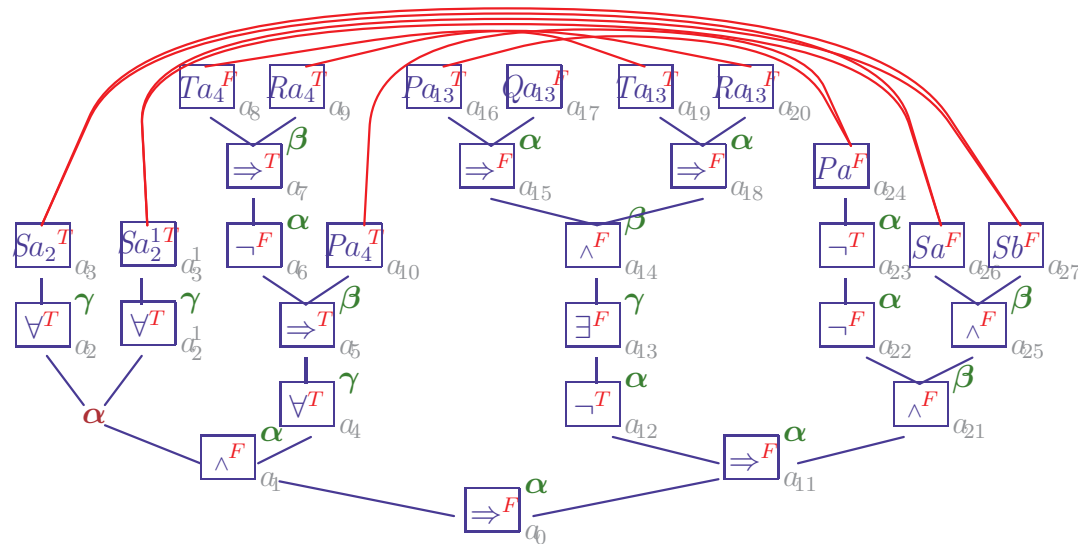


2-dimensionale Matrixstruktur zu einfach

- Wechsel zwischen α/β -Knoten führt zu Schachtelung
- 2-dimensionale Darstellung verwendet Klammern
- **Pfade**, die eine Submatrix betreten, müssen diese komplett durchlaufen

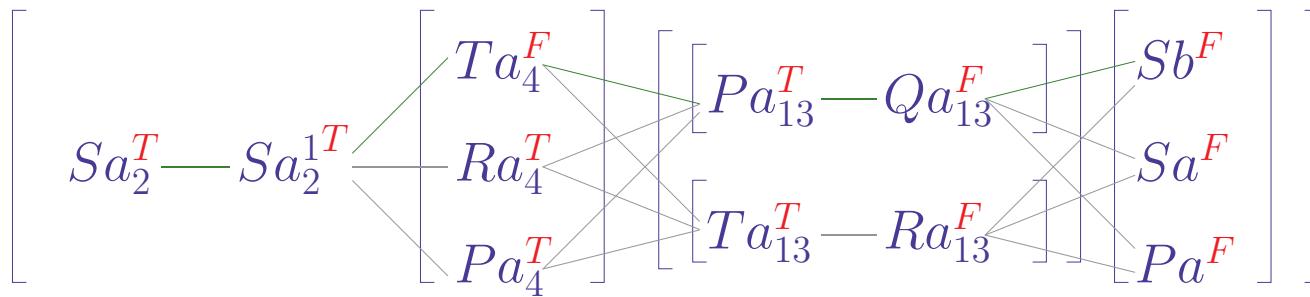
$$\begin{bmatrix} Sa_2^T & Sa_2^{1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ta_4^F \\ Ra_4^T \\ Pa_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Pa_{13}^T & Qa_{13}^F \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Ta_{13}^T & Ra_{13}^F \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sb^F \\ Sa^F \\ Pa^F \end{bmatrix}$$

MATRIXDARSTELLUNG EINER KOMPLEXEN FORMEL

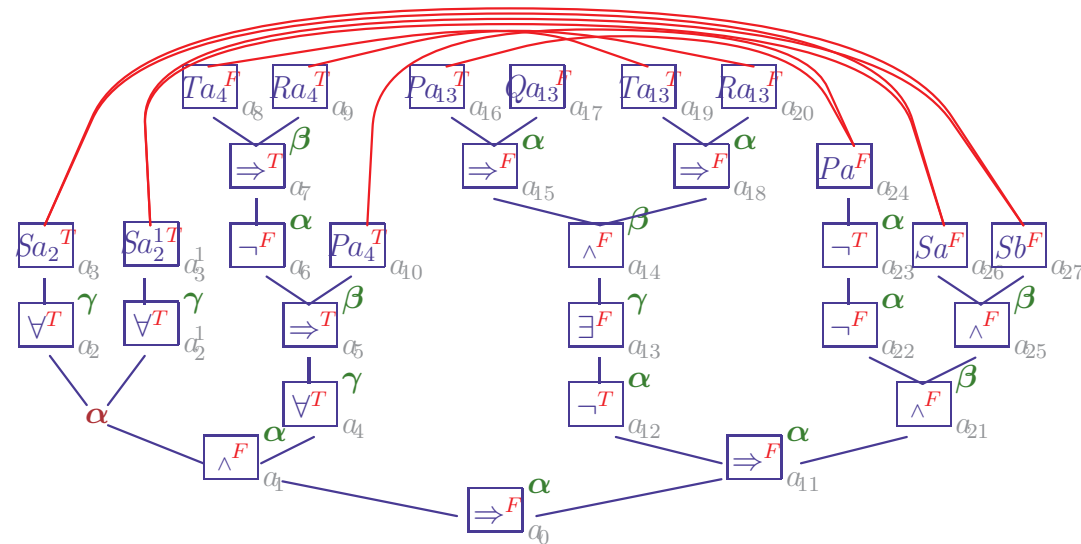


2-dimensionale Matrixstruktur zu einfach

- Wechsel zwischen α/β -Knoten führt zu Schachtelung
- 2-dimensionale Darstellung verwendet Klammern
- **Pfade**, die eine Submatrix betreten, müssen diese komplett durchlaufen

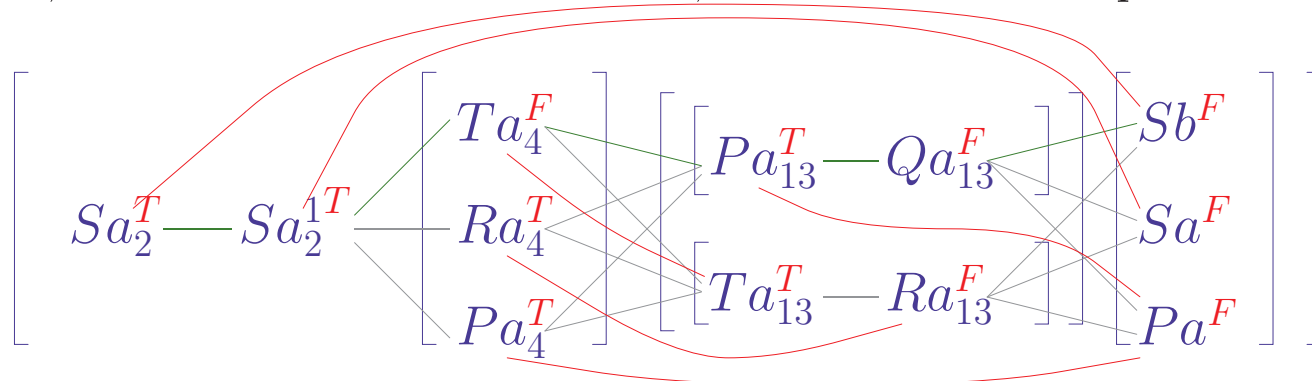


MATRIXDARSTELLUNG EINER KOMPLEXEN FORMEL



2-dimensionale Matrixstruktur zu einfach

- Wechsel zwischen α/β -Knoten führt zu Schachtelung
- 2-dimensionale Darstellung verwendet Klammern
- **Pfade**, die eine Submatrix betreten, müssen diese komplett durchlaufen



- **Einfache Matrizen (Normalform-Matrizen)**

- **Literal**: atomare Formel mit Polarität
 - positives Literal**: Polarität T **negatives Literal**: Polarität F
- **Klausel**: endliche Mengen $c = \{L_1, \dots, L_k\}$ von Literalen
 - Horn-Klausel**: Klausel mit höchstens einem negativen Literal
- **Matrix**: endliche Menge $M = \{c_1, \dots, c_n\}$ von Klauseln
 - Horn-Matrix**: Menge von Horn-Klauseln

- **Einfache Matrizen (Normalform-Matrizen)**

- **Literal**: atomare Formel mit Polarität
 - positives Literal**: Polarität T **negatives Literal**: Polarität F
- **Klausel**: endliche Mengen $c = \{L_1, \dots, L_k\}$ von Literalen
 - Horn-Klausel**: Klausel mit höchstens einem negativen Literal
- **Matrix**: endliche Menge $M = \{c_1, \dots, c_n\}$ von Klauseln
 - Horn-Matrix**: Menge von Horn-Klauseln

- **Allgemeine Matrizen**

- **Matrix der Tiefe 0**: Literal L
- **Matrix der Tiefe $n+1$** : endliche Menge $M = \{M_1, \dots, M_j\}$
von Matrizen der maximalen Tiefe n
- Klauseln sind Matrizen der Tiefe 1

LESARTEN VON MATRIZEN

- **Allgemein:**

- Ein Literal repräsentiert sich selbst
- Eine Klausel repräsentiert eine Menge von Literalen in β -Beziehung
- Eine Matrix repräsentiert eine Menge von Klauseln in α -Beziehung
 - Tiefe $2n-1$: Menge von Matrizen in β -Beziehung
 - Tiefe $2n$: Menge von Matrizen in α -Beziehung

LESARTEN VON MATRIZEN

- **Allgemein:**

- Ein Literal repräsentiert sich selbst
- Eine Klausel repräsentiert eine Menge von Literalen in β -Beziehung
- Eine Matrix repräsentiert eine Menge von Klauseln in α -Beziehung
 - Tiefe $2n-1$: Menge von Matrizen in β -Beziehung
 - Tiefe $2n$: Menge von Matrizen in α -Beziehung

- **Negative Repräsentation:**

- Ein Literal X^T repräsentiert X , X^F repräsentiert $\neg X$
- Eine Klausel repräsentiert die Disjunktion ihrer Literale
- Eine Matrix repräsentiert die Konjunktion ihrer Klauseln
- Gut für indirekte Beweisführung (Tableaux, Prolog, ...)

LESARTEN VON MATRIZEN

● Allgemein:

- Ein Literal repräsentiert sich selbst
- Eine Klausel repräsentiert eine Menge von Literalen in β -Beziehung
- Eine Matrix repräsentiert eine Menge von Klauseln in α -Beziehung
 - Tiefe $2n-1$: Menge von Matrizen in β -Beziehung
 - Tiefe $2n$: Menge von Matrizen in α -Beziehung

● Negative Repräsentation:

- Ein Literal X^T repräsentiert X , X^F repräsentiert $\neg X$
- Eine Klausel repräsentiert die Disjunktion ihrer Literale
- Eine Matrix repräsentiert die Konjunktion ihrer Klauseln
- Gut für indirekte Beweisführung (Tableaux, Prolog, ...)

● Positive Repräsentation:

- Ein Literal X^T repräsentiert $\neg X$, X^F repräsentiert X
- Eine Klausel repräsentiert die Konjunktion ihrer Literale
- Eine Matrix repräsentiert die Disjunktion ihrer Klauseln
- Gut für direkte Beweisführung (Sequenzkalkül,...)

PRÄSENTATION VON MATRIZEN

- Mengenschreibweise:

- Mit Polarität: $\{\{P^F\}, \{P^T, Q^F\}, \{Q^T, R^F\}, \{R^T\}\}$

PRÄSENTATION VON MATRIZEN

- **Mengenschreibweise:**

- Mit Polarität: $\{\{P^F\}, \{P^T, Q^F\}, \{Q^T, R^F\}, \{R^T\}\}$
- Positive Repräsentation: $\{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R\}\}$

PRÄSENTATION VON MATRIZEN

- **Mengenschreibweise:**

- Mit Polarität: $\{\{P^F\}, \{P^T, Q^F\}, \{Q^T, R^F\}, \{R^T\}\}$
- Positive Repräsentation: $\{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R\}\}$
- Kurzschreibweise: $\{\{P\}, \{\overline{P}, Q\}, \{\overline{Q}, R\}, \{\overline{R}\}\}$

PRÄSENTATION VON MATRIZEN

- **Mengenschreibweise:**

- Mit Polarität: $\{\{P^F\}, \{P^T, Q^F\}, \{Q^T, R^F\}, \{R^T\}\}$
- Positive Repräsentation: $\{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R\}\}$
- Kurzschreibweise: $\{\{P\}, \{\overline{P}, Q\}, \{\overline{Q}, R\}, \{\overline{R}\}\}$

- **2-dimensionale Matrixformen:**

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & \neg P & \neg Q & \neg R \\ P & Q & R & \end{bmatrix}$$

PRÄSENTATION VON MATRIZEN

● Mengenschreibweise:

- Mit Polarität: $\{\{P^F\}, \{P^T, Q^F\}, \{Q^T, R^F\}, \{R^T\}\}$
- Positive Repräsentation: $\{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R\}\}$
- Kurzschreibweise: $\{\{P\}, \{\overline{P}, Q\}, \{\overline{Q}, R\}, \{\overline{R}\}\}$

● 2-dimensionale Matrixformen:

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & \neg P & \neg Q & \neg R \\ P & Q & R & \end{bmatrix}$$

● Gedrehte Repräsentation als Prolog Programm

$$\begin{array}{l} R. \\ Q :- R. \\ P :- Q. \\ \quad :- P? \end{array} \quad \begin{bmatrix} R^T \\ Q^T & R^F \\ P^T & Q^F \\ & P^F \end{bmatrix}$$

ANMERKUNGEN ZU NORMALFORMEN

Viele Beweissysteme verarbeiten nur Normalformen

Viele Beweissysteme verarbeiten nur Normalformen

- **Formeln werden auf Normalform gebracht**
 - Quantoren werden eliminiert
 - δ -Variablen werden durch “Skolemfunktionen” ersetzt
 - γ -Variablen bleiben unverändert
 - Verbleibende Formel wird auf DNF (positiv) oder KNF (negativ) gebracht

Viele Beweissysteme verarbeiten nur Normalformen

- **Formeln werden auf Normalform gebracht**
 - Quantoren werden eliminiert
 - δ -Variablen werden durch “Skolemfunktionen” ersetzt
 - γ -Variablen bleiben unverändert
 - Verbleibende Formel wird auf DNF (positiv) oder KNF (negativ) gebracht
- **Vorteil: einfachere Beweisverfahren**
 - Unkomplizierte Struktur, leicht zu verarbeiten

Viele Beweissysteme verarbeiten nur Normalformen

- **Formeln werden auf Normalform gebracht**
 - Quantoren werden eliminiert
 - δ -Variablen werden durch “Skolemfunktionen” ersetzt
 - γ -Variablen bleiben unverändert
 - Verbleibende Formel wird auf DNF (positiv) oder KNF (negativ) gebracht
- **Vorteil: einfachere Beweisverfahren**
 - Unkomplizierte Struktur, leicht zu verarbeiten
- **Nachteile: Entstellung der Formel**
 - Oft exponentielle Aufblähung
 - Originalformel selten rekonstruierbar
 - Erzeugung von Tableaux- oder Sequenzenbeweisen nahezu unmöglich
 - Verfahren lassen sich schlecht auf andere Logiken verallgemeinern

ERZEUGUNG ZWEIDIMENSIONALER MATRIZEN

- Schrittweisen Erzeugung beim Parsen der Formel

$$\alpha \mapsto [\alpha_1 \ \alpha_2] \quad \beta \mapsto \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad \gamma \mapsto \gamma(a_i^j) \quad \delta \mapsto \delta(a_i)$$

ERZEUGUNG ZWEIDIMENSIONALER MATRIZEN

- Schrittweisen Erzeugung beim Parsen der Formel

$$\alpha \mapsto [\alpha_1 \ \alpha_2] \quad \beta \mapsto \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad \gamma \mapsto \gamma(a_i^j) \quad \delta \mapsto \delta(a_i)$$

- Zusammenfassung “gleichartiger” Teilmatrizen

$$\left[[M_1 M_2] \ M_3 \right] \mapsto [M_1 \ M_2 \ M_3]$$

$$\left[[M_1 M_2] \ [M_3 M_4] \right] \mapsto [M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4]$$

$$\left[\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} M_3 \right] \mapsto \begin{bmatrix} M_1 & M_3 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \right] \mapsto \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

⋮

⋮

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$ ^F

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Ergänze Typ der Wurzel

$$\left[((P \Rightarrow Q) \Rightarrow \alpha(\neg Q \Rightarrow \neg P))^F \right]$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Erzeuge α -Matrix

$$\left[(P \Rightarrow Q)^T \quad (\neg Q \Rightarrow \neg P)^F \right]$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Ergänze Typen

$$\left[(P \Rightarrow \beta Q)^T \quad (\neg Q \Rightarrow \alpha \neg P)^F \right]$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Erzeuge α -Submatrix

$$\left[(P \Rightarrow \beta Q)^T \quad \left[\neg Q^T \quad \neg P^F \right] \right]$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

α -Zusammenfassung

$$\left[(P \Rightarrow \beta Q)^T \quad \neg Q^T \quad \neg P^F \right]$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Ergänze Typen

$$\left[(P \Rightarrow \beta Q)^T \quad \neg Q \alpha^T \quad \neg P \alpha^F \right]$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Erzeuge β -Submatrix

$$\left[\begin{array}{c} P^F \\ Q^T \end{array} \quad \neg Q \alpha^T \quad \neg P \alpha^F \right]$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

α -Zusammenfassung

$$\begin{bmatrix} P^F & \neg Q^T & \neg P^F \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Erzeuge α -Submatrizen
und fasse zusammen

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

- Matrix für $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$

$$\begin{bmatrix} Px_2^F & Px_1^T & Qa_1^F \\ Qx_2^T & & \end{bmatrix}$$

AUFBAU VON MATRIZEN

- Matrix für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

- Matrix für $(\forall xPx \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall xPx) \Rightarrow (\forall xQx))^F$

$$\begin{bmatrix} Px_2^F & Px_1^T & Qa_1^F \\ Qx_2^T & & \end{bmatrix}$$

- Matrix für $\neg(\forall xPx) \vee (Pa \wedge Pb)^F \quad (\mu=2)$

$$\begin{bmatrix} Px_1^T & Px_2^T & Pa^F \\ & & Pb^F \end{bmatrix}$$

BEWEISKONZEPTE FORMULIERT FÜR MATRIZEN

● **Pfad** durch eine Matrix

- Tiefe 2, $M = \{c_1, \dots, c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, \dots, L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
- Tiefe $2n$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
- Tiefe $2n+1$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i

BEWEISKONZEPTE FORMULIERT FÜR MATRIZEN

- **Pfad durch eine Matrix**

- Tiefe 2, $M = \{c_1, \dots, c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, \dots, L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
- Tiefe $2n$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
- Tiefe $2n+1$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i

- **Konnektionen, Komplementarität wie zuvor**

- Zulässigkeitsbedingung der Substitution am Formelbaum zu prüfen
oder bei Normalisierung in Skolemfunktionen codiert

BEWEISKONZEPTE FORMULIERT FÜR MATRIZEN

● Pfad durch eine Matrix

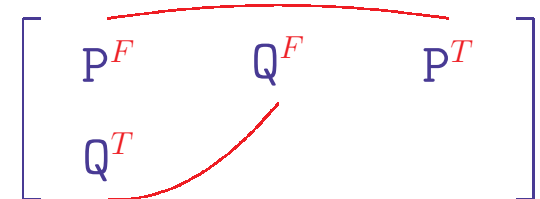
- Tiefe 2, $M = \{c_1, \dots, c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, \dots, L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
- Tiefe 2n, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
- Tiefe 2n+1, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i

● Konnektionen, Komplementarität wie zuvor

- Zulässigkeitsbedingung der Substitution am Formelbaum zu prüfen
oder bei Normalisierung in Skolemfunktionen codiert

● Beispielbeweise

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$



BEWEISKONZEPTE FORMULIERT FÜR MATRIZEN

● Pfad durch eine Matrix

- Tiefe 2, $M = \{c_1, \dots, c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, \dots, L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
- Tiefe $2n$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
- Tiefe $2n+1$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i

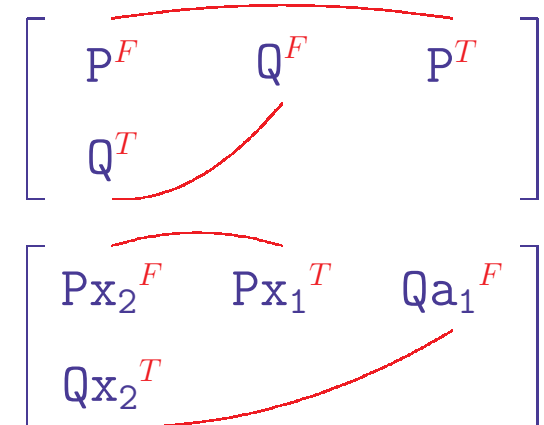
● Konnektionen, Komplementarität wie zuvor

- Zulässigkeitsbedingung der Substitution am Formelbaum zu prüfen
oder bei Normalisierung in Skolemfunktionen codiert

● Beispielbeweise

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$



BEWEISKONZEPTE FORMULIERT FÜR MATRIZEN

● Pfad durch eine Matrix

- Tiefe 2, $M = \{c_1, \dots, c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, \dots, L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
- Tiefe 2n, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
- Tiefe 2n+1, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i

● Konnektionen, Komplementarität wie zuvor

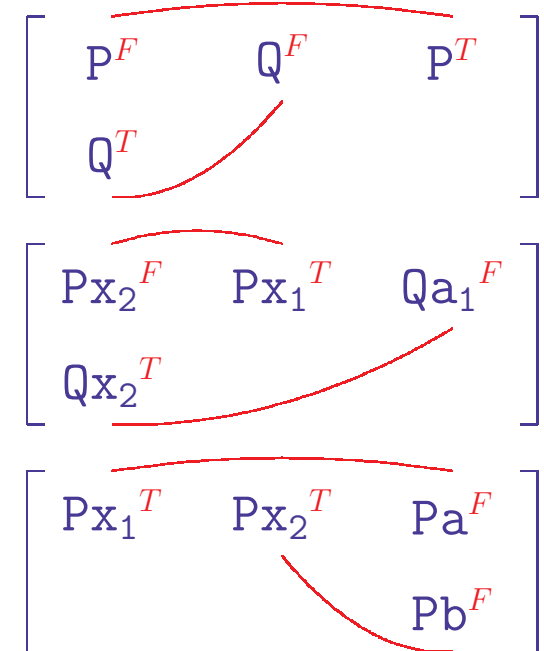
- Zulässigkeitsbedingung der Substitution am Formelbaum zu prüfen
oder bei Normalisierung in Skolemfunktionen codiert

● Beispielbeweise

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F \quad (\mu=2)$$



CODIERUNG DER MULTIPLIZITÄT IN MATRIZEN

- Darstellung durch Kopien ist ineffizient

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$

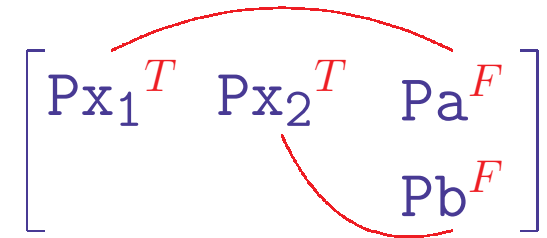
$$\begin{bmatrix} Px_1^T & Px_2^T & Pa^F \\ & & Pb^F \end{bmatrix}$$

The diagram shows a matrix representation of the formula. The first row contains three terms: Px_1^T , Px_2^T , and Pa^F . The second row contains one term: Pb^F . Red arcs connect Px_1^T to Px_2^T and Px_2^T to Pb^F , illustrating the inefficiency of representing the same logical structure multiple times.

CODIERUNG DER MULTIPLIZITÄT IN MATRIZEN

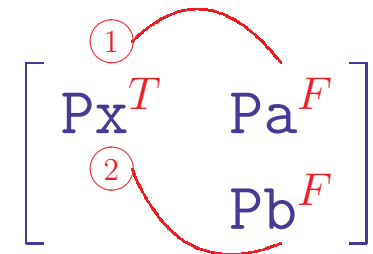
● Darstellung durch Kopien ist ineffizient

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$



● Kurzform: **Indizierte Konnektion**

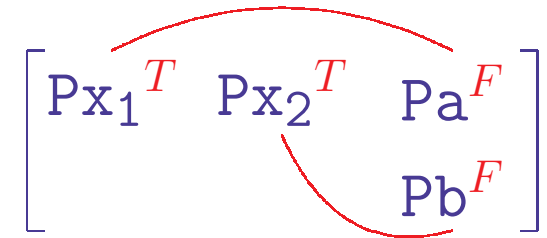
- Konnektion mit Index für Klauselkopie
- Effizientere Codierung durch kleinere Matrix
- Bezug zur Originalformel besser erkennbar



CODIERUNG DER MULTIPLIZITÄT IN MATRIZEN

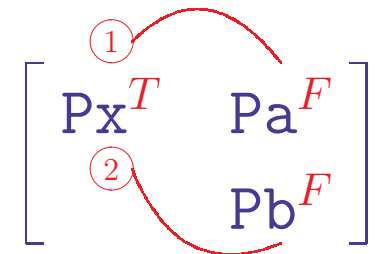
- Darstellung durch Kopien ist ineffizient

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$



- Kurzform: **Indizierte Konnektion**

- Konnektion mit Index für Klauselkopie
- Effizientere Codierung durch kleinere Matrix
- Bezug zur Originalformel besser erkennbar



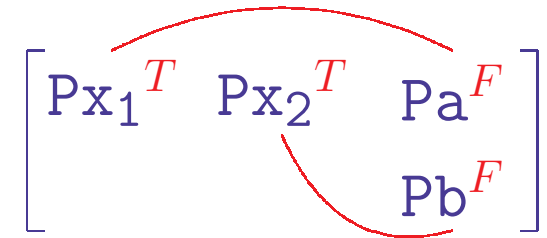
- **Indizierte Matrix:**

- Matrix M mit indizierter Paarung
- **Expandierte Form:** erweiterte Form mit expliziten Kopien von Klauseln
- **Pfade durch M :** Pfade durch expandierte Form von M

CODIERUNG DER MULTIPLIZITÄT IN MATRIZEN

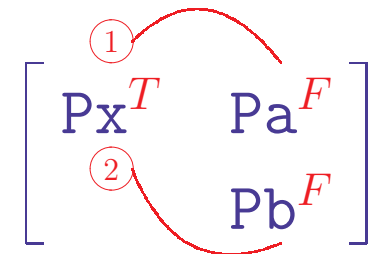
- Darstellung durch Kopien ist ineffizient

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$



- Kurzform: **Indizierte Konnektion**

- Konnektion mit Index für Klauselkopie
- Effizientere Codierung durch kleinere Matrix
- Bezug zur Originalformel besser erkennbar



- **Indizierte Matrix:**

- Matrix M mit indizierter Paarung
- **Expandierte Form:** erweiterte Form mit expliziten Kopien von Klauseln
- **Pfade durch M :** Pfade durch expandierte Form von M

- **Aufspannende (indizierte) Paarung:**

- Jeder Pfad (durch die indizierte Matrix) enthält eine Konnektion
- σ -komplementäre aufspannende indizierte Paarungen beweisen Gültigkeit

MATRIXCHARAKTERISIERUNG LOGISCHER GÜLTIGKEIT

Eine Formel F (in Matrixform) ist gültig, wenn es eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von indizierten σ -komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

BEWEISSUCHE IM MATRIXKALKÜL

Suche nach komplementären aufspannenden indizierten Paarungen

BEWEISSUCHE IM MATRIXKALKÜL

Suche nach komplementären aufspannenden indizierten Paarungen

- **Aufbau der Datenstruktur**

- Annotierter Formelbaum mit Polaritäten und Typen
- Identifikation aller möglichen Konnektionen

BEWEISSUCHE IM MATRIXKALKÜL

Suche nach komplementären aufspannenden indizierten Paarungen

- **Aufbau der Datenstruktur**

- Annotierter Formelbaum mit Polaritäten und Typen
- Identifikation aller möglichen Konnektionen

- **Pfadexploration**

- Prüfe ob jeder Pfad durch F mindestens eine Konnektion enthält
- Konnektionenorientiertes Verfahren streicht Gruppen überprüfter Pfade

Suche nach komplementären aufspannenden indizierten Paarungen

- **Aufbau der Datenstruktur**

- Annotierter Formelbaum mit Polaritäten und Typen
- Identifikation aller möglichen Konnektionen

- **Pfadexploration**

- Prüfe ob jeder Pfad durch F mindestens eine Konnektion enthält
- Konnektionenorientiertes Verfahren streicht Gruppen überprüfter Pfade

- **Unifikation**

- Bestimme Substitution σ , die alle Konnektionen komplementär macht
- Überprüfe Zulässigkeit der Substitution
- Integriere in Pfadexploration

Suche nach komplementären aufspannenden indizierten Paarungen

- **Aufbau der Datenstruktur**

- Annotierter Formelbaum mit Polaritäten und Typen
- Identifikation aller möglichen Konnektionen

- **Pfadexploration**

- Prüfe ob jeder Pfad durch F mindestens eine Konnektion enthält
- Konnektionenorientiertes Verfahren streicht Gruppen überprüfter Pfade

- **Unifikation**

- Bestimme Substitution σ , die alle Konnektionen komplementär macht
- Überprüfe Zulässigkeit der Substitution
- Integriere in Pfadexploration

- **Multiplizitätsbestimmung**

- Wo nötig, erhöhe Multiplizität von γ -Knoten dynamisch

Suche nach komplementären aufspannenden indizierten Paarungen

- **Aufbau der Datenstruktur**

- Annotierter Formelbaum mit Polaritäten und Typen
- Identifikation aller möglichen Konnektionen

- **Pfadexploration**

- Prüfe ob jeder Pfad durch F mindestens eine Konnektion enthält
- Konnektionenorientiertes Verfahren streicht Gruppen überprüfter Pfade

- **Unifikation**

- Bestimme Substitution σ , die alle Konnektionen komplementär macht
- Überprüfe Zulässigkeit der Substitution
- Integriere in Pfadexploration

- **Multiplizitätsbestimmung**

- Wo nötig, erhöhe Multiplizität von γ -Knoten dynamisch

- **Rücktransformation**

- Erzeuge Tableaux-/Sequenzenbeweis aus Matrixbeweis