Inferenzmethoden

Einheit 3

Verdichtung des logischen Schließens II
Matrix-Beweise

1. Verdichtung von Tableauxbeweisen
2. Der Matrixkalkül
3. Zweidimensionale Repräsentation

Matrix-Kalküle: Maschinennahe Beweissuche

- **Bestimme relevante Beweisinformation**
  - Welche komplementären Teilformeln schließen einen Beweiszweig ab?
  - Welche Terme sind für γ-Variablen einzusetzen?
  - In welcher Reihenfolge sind Beweisregeln anzuwenden?

  Information reicht, um Tableauxbeweis ohne Suche zu konstruieren

- **Kompakte Beweisrepräsentation**
  - Nur atomare Teilformeln (Literale) sind beweisrelevant
  - Beweiszweige repräsentierbar durch "Pfade" im Formelbaum
  - Beweisführung im Formelbaum vermeidet Erzeugung von Formelkopien

- **Zielorientiertes Vorgehen**
  - Verfolge Konnektionen bei Suche nach komplementären Literalen
  - Gezielte Instantiierung von Quantoren durch Unifikation
  - Reduktionsordnung bestimmt durch Baumordnung und Substitution

Matrixbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

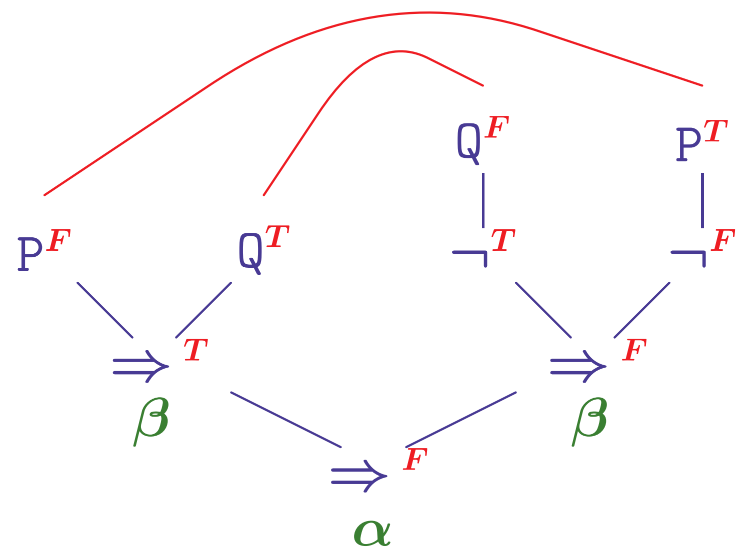
Tableauxbeweis

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$

$$(P \Rightarrow Q)^T$$

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P)^F$$

P^F	Q^T
$\neg Q^T$	$\neg Q^T$
$\neg P^F$	$\neg P^F$
Q^F	Q^F
P^T	$\times$
$\times$	



Beweis für $(\forall x\ Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x\ Px) \Rightarrow (\forall x\ Qx))$

$$\left(\forall xPx \Rightarrow Qx\right) \Rightarrow \left(\left(\forall xPx\right) \Rightarrow \left(\forall xQx\right)\right)^F$$

$$\left(\forall xPx \Rightarrow Qx\right)^T$$

$$\left(\forall xPx\right) \Rightarrow \left(\forall xQx\right)^F$$

$$\left(\forall xPx\right)^T$$

$$\left(\forall xQx\right)^F$$

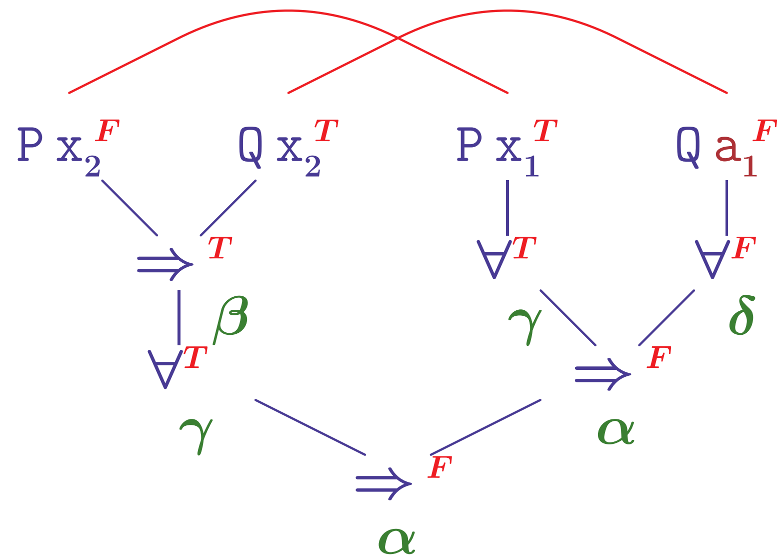
$$Qa^F$$

$$Pa^T$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$Pa^F \qquad\qquad Qa^T$$

$$\times \qquad\qquad \times$$

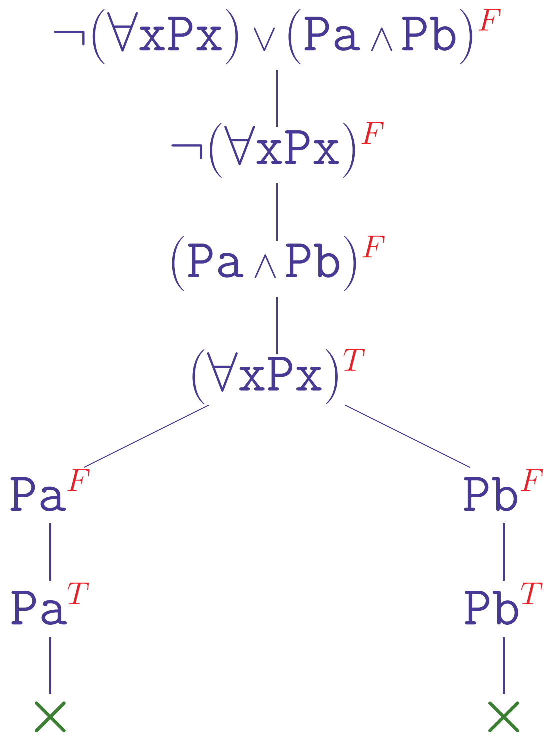


x_1 **muß gleich** x_2 **sein**
x_2 **muß gleich** a_1 **sein**
Instantiiere $x_1 := x_2 := a_1$

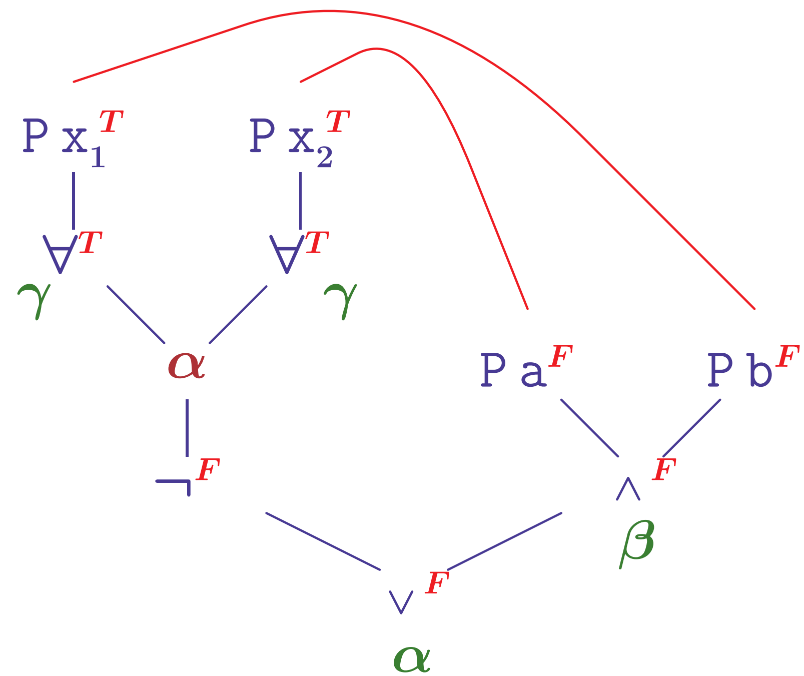
$\forall x\ Qx$ **muß vor den**
γ**-Knoten zerlegt werden**

a_1 **muß vor** x_1/x_2
freigegeben werden

Beweis für $\neg(\forall x\ Px) \lor (Pa \land Pb)$



Zwei Instanzen derselben Formel



γ-Formel hat Multiplizität 2
Instantiiere $x_1 := b$, $x_2 := a$

Matrixbeweise: Fundamentale Einsichten

- **Formelbaum enthält alle Teilformeln eines Beweises**
  - Es reicht, Knoten um Tableauxtypen und Polaritäten zu ergänzen
  - Beide hängen nur vom Konnektiv und bisheriger Polarität ab
- **Beweiszweige durch α-Knoten beschreibbar**
  - Nur β-Knoten erzeugen Verzweigungen
  - Knoten mit α-Knoten als gemeinsamen Vorfahr gehören zum selben Zweig
- **Komplementaritätstests reichen aus**
  - Alle Zweige müssen komplementäre Literale enthalten
  - Komplementarität kann durch Substitution erzeugt werden
  - γ-Knoten dürfen dupliziert werden
- **Substitutionen bestimmen Reduktionsordnung**
  - Tableauxbeweis muß Ordnung des Formelbaums berücksichtigen
  - Tableauxbeweis muß Variablen in Termen, die für γ-Variablen eingesetzt werden, bereits freigelegt haben

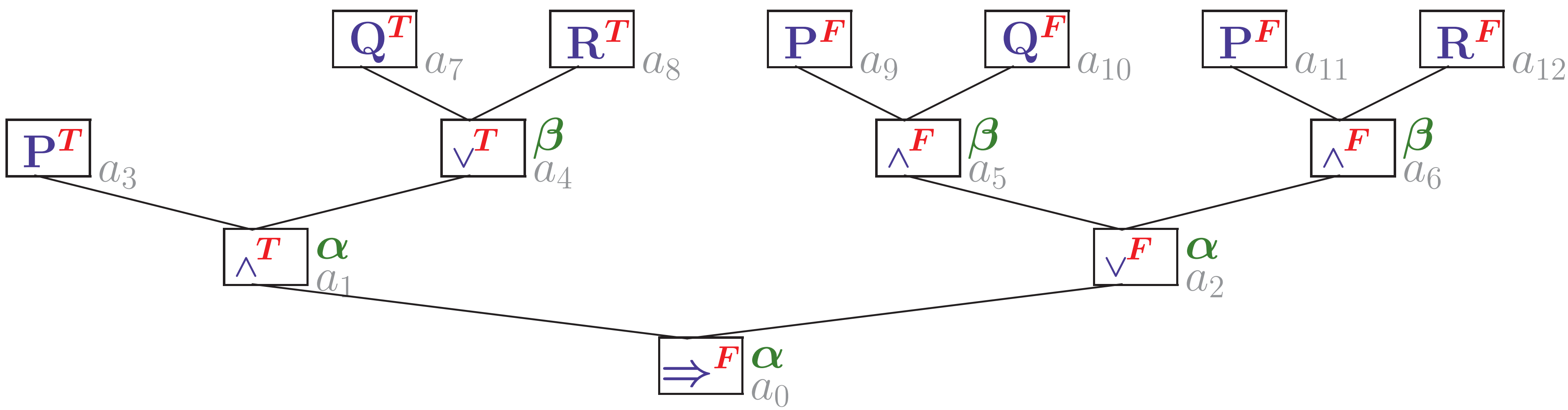
Matrixkalküle präzisiert: Formelbaum

- **(Annotierter) Formelbaum**
  - Syntaxbaum der Formel, in der jeder Knoten markiert ist mit
    - **Position**: ein eindeutiger Name $a_0, a_1, ...$, mit dem Knoten identifiziert
    - **Label**: ein logisches Konnektiv oder atomare Formel
    - **Polarität**: T oder F
    - **Typ**: α, β, γ, oder δ
  - Knoten mit atomaren Formeln als Label heißen Atome (atomare Positionen)
  - Die Baumordnung $<$ ist die partielle Ordnung der Knoten im Baum
- **Multiplizität $\mu(a_i)$ eines γ-Knotens a_i**
  - Anzahl der Kopien des Knotens im Baum ($\hat{=}$ Instanzen des zugehörigen Quantors)
- **Systematische Zuordnung von Polarität und Typ**
  - Die Wurzel a_0 hat Polarität F
  - Typ und Nachfolgerpolarität einer Position a_i werden tabellarisch bestimmt

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1 α_2	X^T Y^T	X^F Y^F	X^T Y^F	X^F –	X^T –	β_1 β_2	X^F Y^F	X^T Y^T	X^F Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(a_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

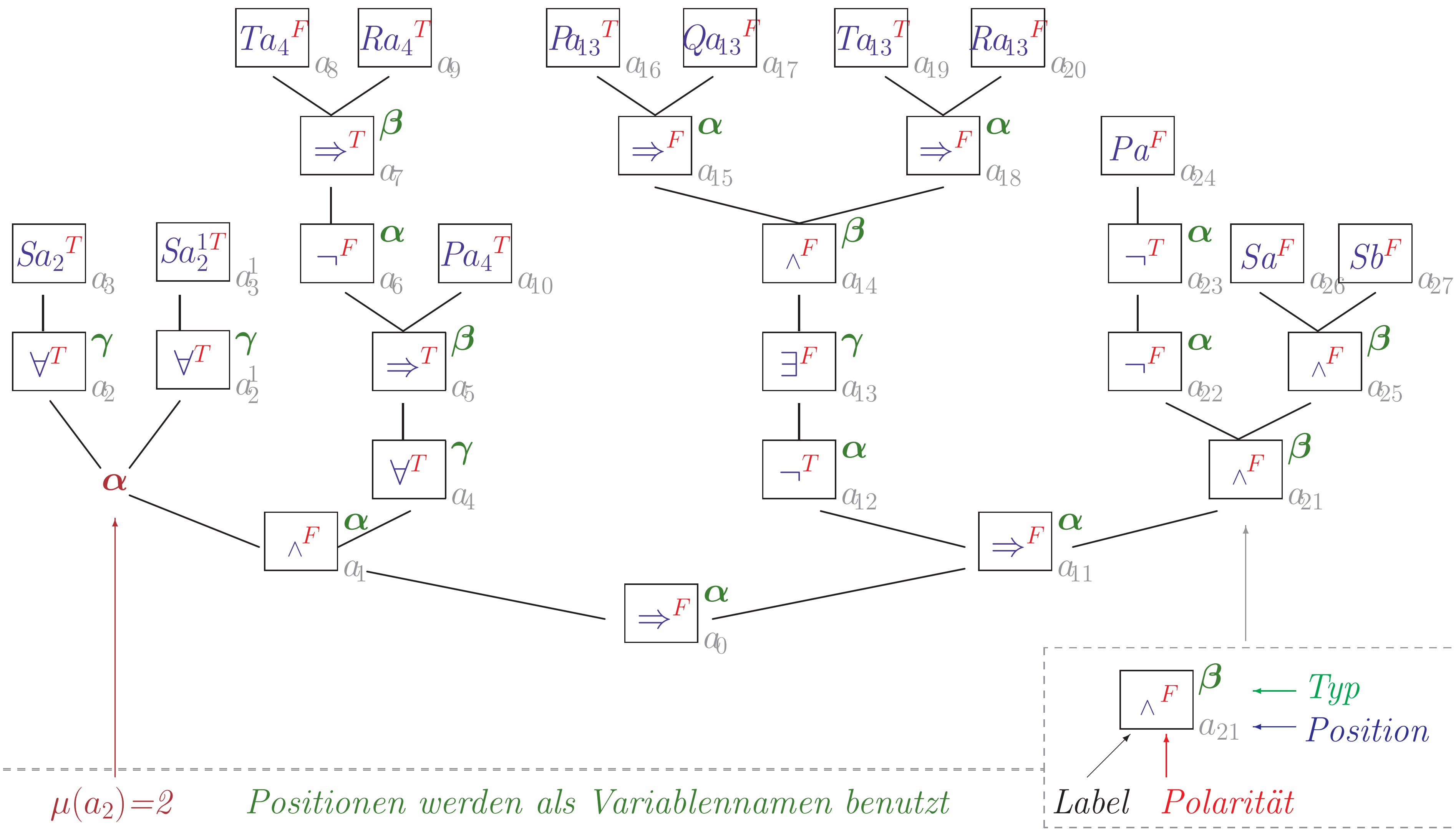
Aufbau eines annotierten Formelbaums

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Formelbaum mit Mulitplizität

$$(\forall x Sx) \wedge (\forall y \neg(Ty \Rightarrow Ry) \Rightarrow Py) \;\Rightarrow\; \neg(\exists z(Pz \Rightarrow Qz) \wedge (Tz \Rightarrow Rz)) \Rightarrow \neg\neg Pa \wedge Sa \wedge Sb$$

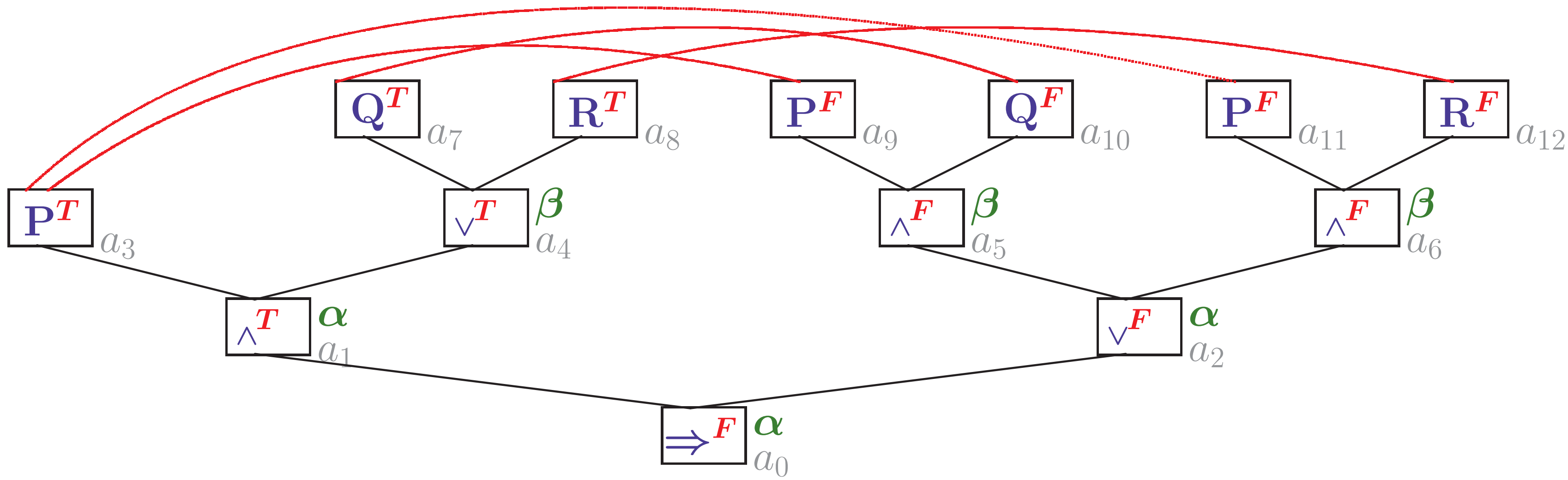


$\mu(a_2)=2$ *Positionen werden als Variablennamen benutzt*

Matrixkalküle präzisiert: Pfade und Konnektionen

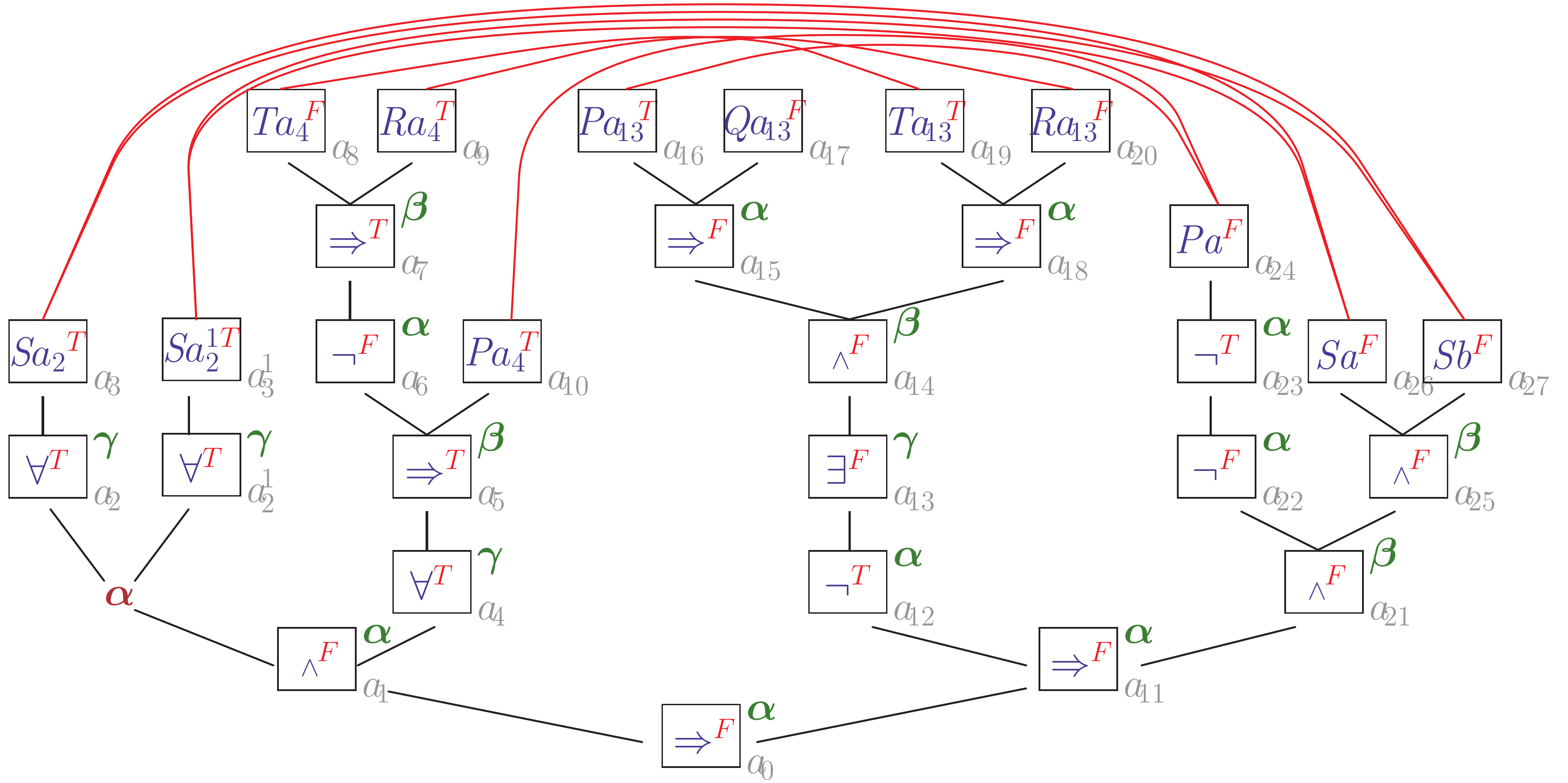
- **α/β-Beziehung zwischen atomaren Positionen**
  - $\boldsymbol{u\sim_\alpha v}$: $u{\neq}v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ α
  - $\boldsymbol{u\sim_\beta v}$: $u{\neq}v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ β
- **Pfad**
  - (Maximale) Menge von Atomen in gegenseitiger α-Beziehung
- **Konnektion**
  - Paar $\{u, v\}$ von Knoten mit gleichem Label, unterschiedlicher Polarität
- **$\boldsymbol{\sigma}$-komplementäre Konnektion**
  - Konnektion $\{u, v\}$ deren Label mit der Substitution σ unifizierbar sind
- **Aufspannende Paarung für eine Formel**
  - Paarung: Menge von σ-komplementären Konnektionen,
  - Aufspannend: jeder Pfad durch die Formel enthält eine der Konnektionen

Pfade und Konnektionen in Formelbäumen



- **α/β-Beziehungen zwischen atomaren Formeln**
  - $a_7 \sim_\beta a_8$, $a_9 \sim_\beta a_{10}$, $a_{11} \sim_\beta a_{12}$
  - Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_\alpha a_j$
- **3 β-Beziehungen liefern 8 Pfade:**
  - $a_3a_7a_9a_{11}$, $a_3a_7a_9a_{12}$, $a_3a_7a_{10}a_{11}$, $a_3a_7a_{10}a_{12}$, $a_3a_8a_9a_{11}$, $a_3a_8a_9a_{12}$, $a_3a_8a_{10}a_{11}$, $a_3a_8a_{10}a_{12}$
- **4 Konnektionen**
  - a_3a_9, a_3a_{11}, a_7a_{10}, a_8a_{12}

Pfade und Konnektionen in Formelbäumen



- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, ... $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26}, a_3a_{27}, $a_3^1a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19}, a_9a_{20}, $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$
  - a_3a_{26}, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19}, a_9a_{20}, $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$ komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$
  - a_3a_{27}, $a_3^1a_{26}$, a_8a_{19}, a_9a_{20}, $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$ komplementär unter $\sigma = [a/a_2, b/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$

Matrixkalküle präzisiert: Beweisbegriff

"Alle Zweige des Tableauxbeweises sind geschlossen"

- **σ induziert Reduktionsordnung $\lhd := (< \cup \sqsubseteq)^+$**
  - $v \sqsubseteq u$, falls $\sigma(u)$=t und v kommt in t vor (v δ-Position, u γ-Position)
  - σ ist **zulässig**, falls $\lhd$ azyklisch (≙ eine Tableauxreduktion ist möglich)
- **Charakterisierungstheorem für klassische Logik**
  Eine Formel F ist gültig, wenn es eine Multiplizität μ, eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von σ-komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält
- **Aufgabe eines automatischen Beweisverfahrens**
  - Identifiziere mögliche Konnektionen
  - Teste, ob jeder Pfad durch F mindestens eine Konnektion enthält
  - Bestimme Substitution σ, die Konnektionen komplementär macht
  - Überprüfe Zulässigkeit der Substitution
  - Wo nötig, erhöhe Multiplizität μ von γ-Knoten

Beweis des Charakterisierungstheorems (Skizze)

Eine Formel F ist gültig, wenn es eine Multiplizität μ, eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von σ-komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

- **Korrektheit: erzeuge Tableauxbeweis aus μ,σ**
  - Transformiere (azyklische) Reduktionsordnung $\lhd$ in eine lineare Ordnung
  - Wende Tableauxregeln in der Reihenfolge dieser Ordnung an
  - Instantiiere δ-Formeln wie im annotierten Formelbaum
  - Instantiiere γ-Formeln entsprechend der Substitution σ

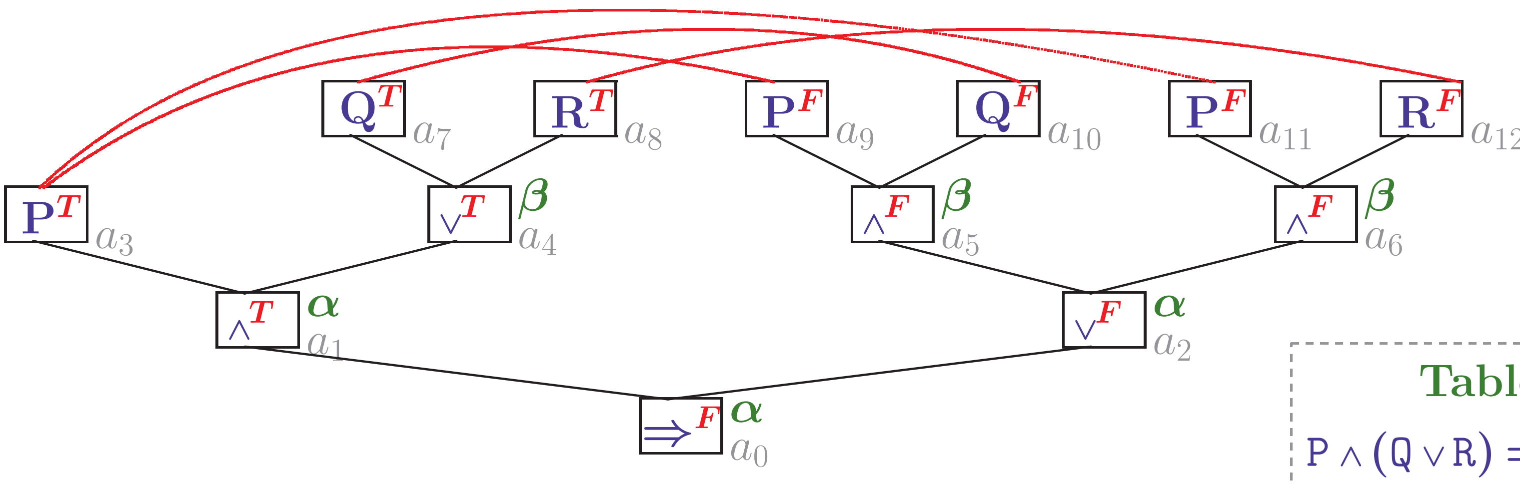
  Per Konstruktion ist jeder Zweig des Tableaus geschlossen
- **Vollständigkeit: erzeuge $\mathcal{C}$, μ, σ aus Tableauxbeweis**
  - Generiere annotierten Formelbaum
  - Für γ-Knoten ist μ die Anzahl der Instanzen im Tableauxbeweis
  - Wähle Substitution σ passend zu den ausgeführten γ-Regeln

    σ ist zulässig aufgrund der Bedingungen an γ- und δ-Regeln
  - Wähle $\mathcal{C}$ als Menge der Formelpaare, welche die Zweige abschließen

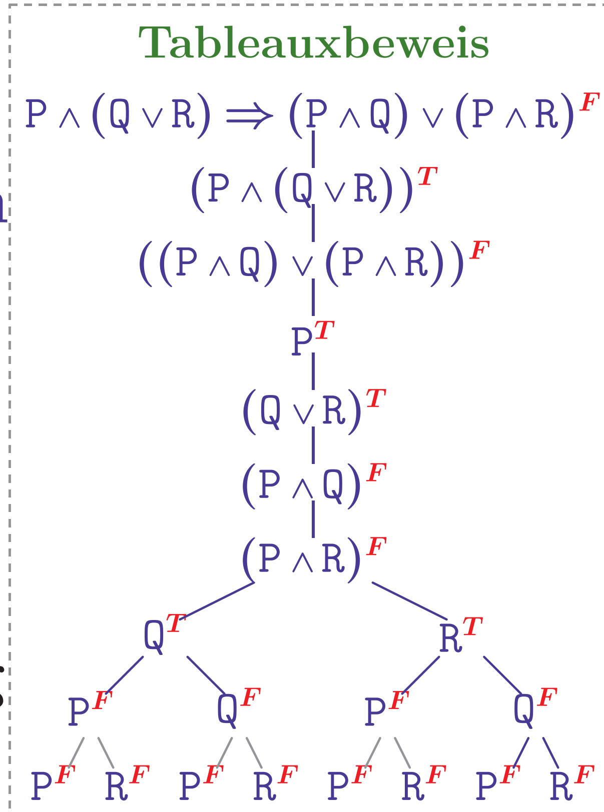
    Alle Konnektionen sind σ-komplementär

  Per Konstruktion enthält jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$

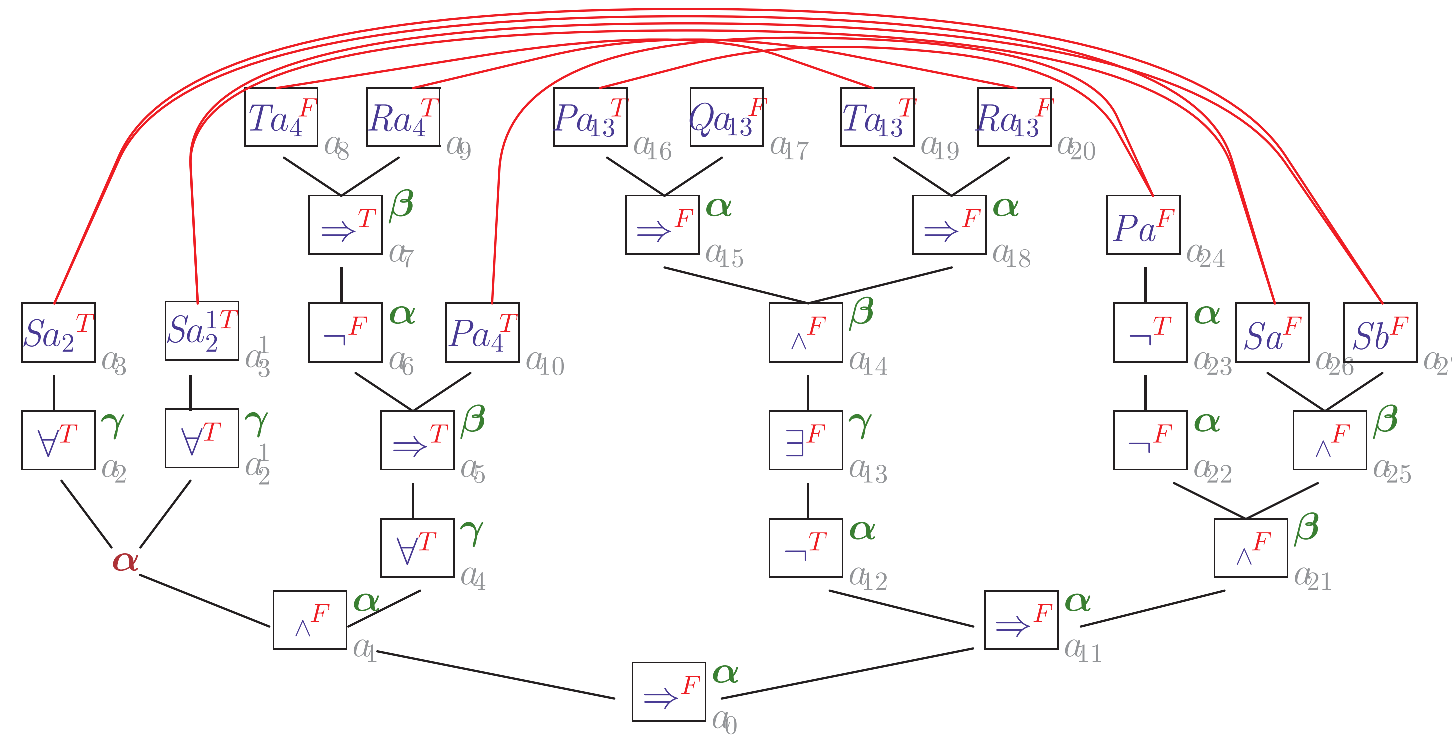
BEWEIS FÜR (P ∧ (Q ∨ R)) ⇒ ((P ∧ Q) ∨ (P ∧ R))



- **Alle Pfade enthalten eine Konnektion**
  - $a_3a_7a_9a_{11}$, $a_3a_7a_9a_{12}$, $a_3a_7a_{10}a_{11}$, $a_3a_7a_{10}a_{12}$, $a_3a_8a_9a_{11}$, $a_3a_8a_9a_{12}$, $a_3a_8a_{10}a_{11}$, $a_3a_8a_{10}a_{12}$
- **Die Formel ist gültig**
  - Alle Konnektionen sind komplementär
- **Reduktionsordnung ist Baumordnung**
  - Mögliche Linearisierung: $a_0\ a_1\ a_2\ a_4\ a_5\ a_6$



Matrixbeweis mit Substitution



- **Alle 18 Pfade enthalten eine Konnektion:**

  $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$,... $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$,...

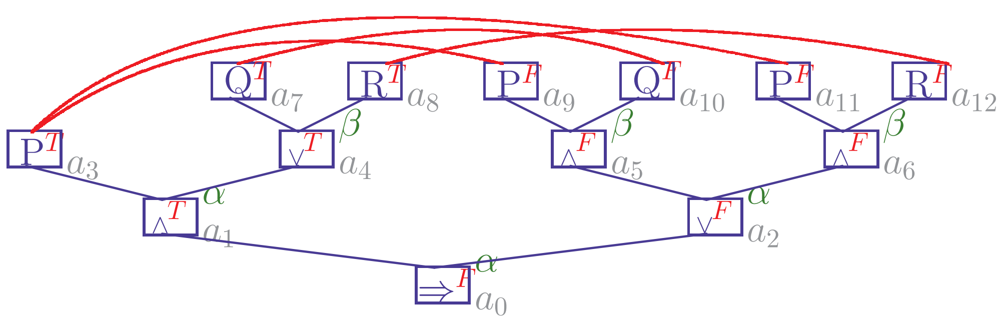
  $\mathcal{C} = \{\ \{a_3a_{27}\}, \{a_3^1a_{26}\}, \{a_8a_{19}\}, \{a_9a_{20}\}, \{a_{10}a_{24}\}, \{a_{16}a_{24}\}\ \}$

- **$\mathcal{C}$ ist komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$**
  - σ ist zulässig, da keine δ-Positionen vorhanden ($\lhd = <$)
- **Die Formel ist gültig**

Matrixdarstellung einer Formel

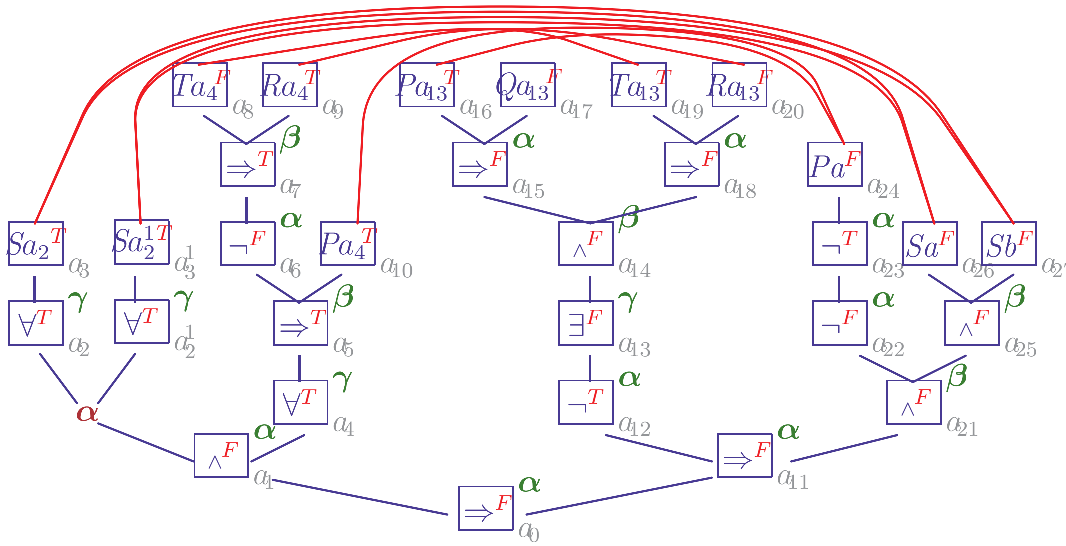
2-dimensionale Darstellung der Atome zur Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β-Struktur**
  – Nur die Atome sind beweisrelevant
  – Pfade sind Ketten von Literalen in α-Beziehung
  – Verschiedene Pfade werden durch β-Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β-Struktur**
  – Literale in α-Beziehung erscheinen nebeneinander
  – Literale in β-Beziehung erscheinen übereinander
  – Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



$$\begin{bmatrix} P^T & Q^T & P^F & P^F \\ & R^T & Q^F & R^F \end{bmatrix}$$

Matrixdarstellung einer komplexen Formel

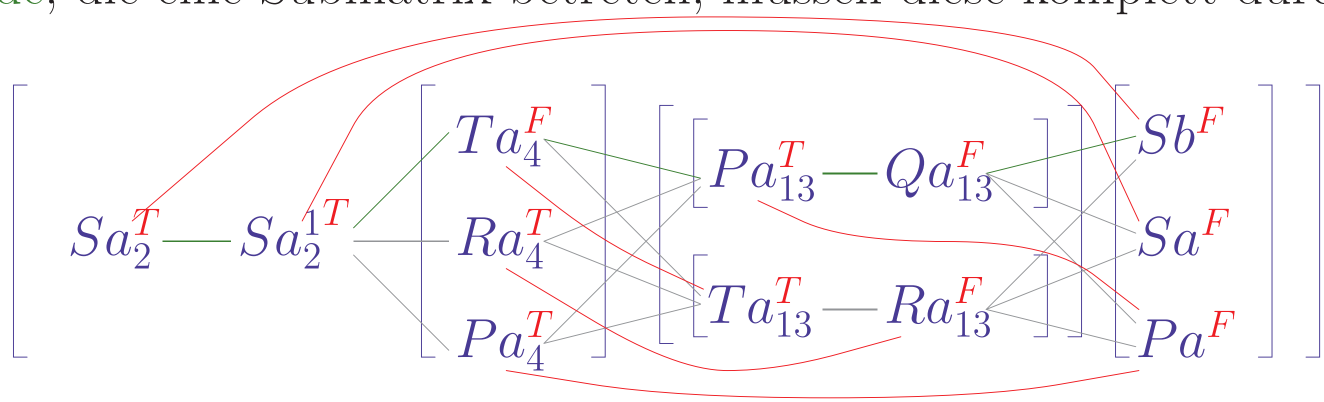


2-dimensionale Matrixstruktur zu einfach

– Wechsel zwischen α/β-Knoten führt zu Schachtelung

– 2-dimensionale Darstellung verwendet Klammern

– Pfade, die eine Submatrix betreten, müssen diese komplett durchlaufen



Matrixdarstellung einer Formel präzisiert

- **Einfache Matrizen (Normalform-Matrizen)**
  - **Literal**: atomare Formel mit Polarität
    positives Literal: Polarität T **negatives Literal**: Polarität F
  - **Klausel**: endliche Mengen $c = \{L_1, \ldots, Ł_k\}$ von Literalen
    Horn-Klausel: Klausel mit höchstens einem negativen Literal
  - **Matrix**: endliche Menge $M = \{c_1, \ldots, c_n\}$ von Klauseln
    Horn-Matrix: Menge von Horn-Klauseln

- **Allgemeine Matrizen**
  - **Matrix der Tiefe 0**: Literal L
  - **Matrix der Tiefe n+1**: endliche Menge $M = \{M_1, \ldots, M_j\}$ von Matrizen der maximalen Tiefe n
  - Klauseln sind Matrizen der Tiefe 1

Lesarten von Matrizen

- **Allgemein**:
  - Ein Literal repräsentiert sich selbst
  - Eine Klausel repräsentiert eine Menge von Literalen in β-Beziehung
  - Eine Matrix repräsentiert eine Menge von Klauseln in α-Beziehung
    - Tiefe 2n-1: Menge von Matrizen in β-Beziehung
    - Tiefe 2n: Menge von Matrizen in α-Beziehung
- **Negative Repräsentation**:
  - Ein Literal X^T repräsentiert X, X^F repräsentiert $\neg X$
  - Eine Klausel repräsentiert die Disjunktion ihrer Literale
  - Eine Matrix repräsentiert die Konjunktion ihrer Klauseln
  - Gut für indirekte Beweisführung (Tableaux, Prolog, ...)
- **Positive Repräsentation**:
  - Ein Literal X^T repräsentiert $\neg X$, X^F repräsentiert X
  - Eine Klausel repräsentiert die Konjunktion ihrer Literale
  - Eine Matrix repräsentiert die Disjunktion ihrer Klauseln
  - Gut für direkte Beweisführung (Sequenzenkalkül,...)

Präsentation von Matrizen

- **Mengenschreibweise:**
  - Mit Polarität: $\{\{P^F\}, \{P^T, Q^F\}, \{Q^T, R^F\}, \{R^T\}\}$
  - Positive Repräsentation: $\{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R\}\}$
  - Kurzschreibweise: $\{\{P\}, \{\overline{P}, Q\}, \{\overline{Q}, R\}, \{\overline{R}\}\}$
- **2-dimensionale Matrixformen:**

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & \neg P & \neg Q & \neg R \\ P & Q & R & \end{bmatrix}$$

- **Gedrehte Repräsentation als Prolog Programm**

```
R.
Q :- R.
P :- Q.
  :- P?
```

$$\begin{bmatrix} R^T & \\ Q^T & R^F \\ P^T & Q^F \\ & P^F \end{bmatrix}$$

Anmerkungen zu Normalformen

Viele Beweissysteme verarbeiten nur Normalformen

- **Formeln werden auf Normalform gebracht**
  - Quantoren werden eliminiert
    - δ-Variablen werden durch "Skolemfunktionen" ersetzt
    - γ-Variablen bleiben unverändert
  - Verbleibende Formel wird auf DNF (positiv) oder KNF (negativ) gebracht
- **Vorteil: einfachere Beweisverfahren**
  - Unkomplizierte Struktur, leicht zu verarbeiten
- **Nachteile: Entstellung der Formel**
  - Oft exponentielle Aufblähung
  - Originalformel selten rekonstruierbar
  - Erzeugung von Tableaux- oder Sequenzenbeweisen nahezu unmöglich
  - Verfahren lassen sich schlecht auf andere Logiken verallgemeinern

Erzeugung zweidimensionaler Matrizen

- **Schrittweisen Erzeugung beim Parsen der Formel**

$$\alpha \;\longmapsto\; \begin{bmatrix}\alpha_1\;\alpha_2\end{bmatrix} \qquad \beta \;\longmapsto\; \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} \qquad \gamma \;\longmapsto\; \gamma(a_i^j) \qquad \delta \;\longmapsto\; \delta(a_i)$$

- **Zusammenfassung "gleichartiger" Teilmatrizen**

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1 M_2\end{bmatrix} M_3\end{bmatrix} \qquad \longmapsto \qquad \begin{bmatrix}M_1\; M_2\; M_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1 M_2\end{bmatrix}\;\begin{bmatrix}M_3 M_4\end{bmatrix}\end{bmatrix} \qquad \longmapsto \qquad \begin{bmatrix}M_1\; M_2\; M_3\; M_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix} M_3\end{bmatrix} \qquad \longmapsto \qquad \begin{bmatrix}M_1 & M_3\\ M_2 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix}\\ M_3\end{bmatrix} \qquad \longmapsto \qquad \begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Aufbau von Matrizen

- **Matrix für** $((\mathtt{P} \Rightarrow \mathtt{Q}) \Rightarrow (\neg\mathtt{Q} \Rightarrow \neg\mathtt{P}))^F$

$$\begin{bmatrix} \mathtt{P}^F & \mathtt{Q}^F & \mathtt{P}^T \\ \mathtt{Q}^T & & \end{bmatrix}$$

- **Matrix für** $(\forall\mathtt{xPx} \Rightarrow \mathtt{Qx}) \Rightarrow ((\forall\mathtt{xPx}) \Rightarrow (\forall\mathtt{xQx}))^F$

$$\begin{bmatrix} \mathtt{Px_2}^F & \mathtt{Px_1}^T & \mathtt{Qa_1}^F \\ \mathtt{Qx_2}^T & & \end{bmatrix}$$

- **Matrix für** $\neg(\forall\mathtt{xPx}) \vee (\mathtt{Pa} \wedge \mathtt{Pb})^F$ $\quad (\mu{=}2)$

$$\begin{bmatrix} \mathtt{Px_1}^T & \mathtt{Px_2}^T & \mathtt{Pa}^F \\ & & \mathtt{Pb}^F \end{bmatrix}$$

Beweiskonzepte formuliert für Matrizen

- **Pfad durch eine Matrix**
  - Tiefe 2, $M = \{c_1, .., c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, .., L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
  - Tiefe 2n, $M = \{M_1, .., M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup .. \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
  - Tiefe 2n+1, $M = \{M_1, .., M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i
- **Konnektionen, Komplementarität wie zuvor**
  - Zulässigkeitsbedingung der Substitution am Formelbaum zu prüfen oder bei Normalisierung in Skolemfunktionen codiert
- **Beispielbeweise**

$((\mathtt{P} \Rightarrow \mathtt{Q}) \Rightarrow (\neg\mathtt{Q} \Rightarrow \neg\mathtt{P}))^F$

$$\begin{bmatrix} \mathtt{P}^F & \mathtt{Q}^F & \mathtt{P}^T \\ \mathtt{Q}^T & & \end{bmatrix}$$

$(\forall x \mathtt{Px} \Rightarrow \mathtt{Qx}) \Rightarrow ((\forall x \mathtt{Px}) \Rightarrow (\forall x \mathtt{Qx}))^F$

$$\begin{bmatrix} \mathtt{Px}_2{}^F & \mathtt{Px}_1{}^T & \mathtt{Qa}_1{}^F \\ \mathtt{Qx}_2{}^T & & \end{bmatrix}$$

$\neg(\forall x \mathtt{Px}) \vee (\mathtt{Pa} \wedge \mathtt{Pb})^F \quad (\mu{=}2)$

$$\begin{bmatrix} \mathtt{Px}_1{}^T & \mathtt{Px}_2{}^T & \mathtt{Pa}^F \\ & & \mathtt{Pb}^F \end{bmatrix}$$

Codierung der Multiplizität in Matrizen

- **Darstellung durch Kopien ist ineffizient**

$$\neg(\forall x \mathtt{Px}) \vee (\mathtt{Pa} \wedge \mathtt{Pb})^F \qquad \begin{bmatrix} \mathtt{Px_1}^T & \mathtt{Px_2}^T & \mathtt{Pa}^F \\ & & \mathtt{Pb}^F \end{bmatrix}$$

- **Kurzform: Indizierte Konnektion**
  - Konnektion mit Index für Klauselkopie
  - Effizientere Codierung durch kleinere Matrix
  - Bezug zur Originalformel besser erkennbar

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ \mathtt{Px}^T & & \mathtt{Pa}^F \\ & 2 & \\ & & \mathtt{Pb}^F \end{bmatrix}$$

- **Indizierte Matrix:**
  - Matrix M mit indizierter Paarung
  - Expandierte Form: erweiterte Form mit expliziten Kopien von Klauseln
  - Pfade durch M: Pfade durch expandierte Form von M

- **Aufspannende (indizierte) Paarung:**
  - Jeder Pfad (durch die indizierte Matrix) enthält eine Konnektion
  - σ-komplementäre aufspannende indizierte Paarungen beweisen Gültigkeit

Matrixcharakterisierung logischer Gültigkeit

Eine Formel F (in Matrixform) ist gültig, wenn es eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von indizierten σ-komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

Beweissuche im Matrixkalkül

Suche nach komplementären aufspannenden indizierten Paarungen

- **Aufbau der Datenstruktur**
  - Annotierter Formelbaum mit Polaritäten und Typen
  - Identifikation aller möglichen Konnektionen
- **Pfadexploration**
  - Prüfe ob jeder Pfad durch F mindestens eine Konnektion enthält
  - Konnektionenorientiertes Verfahren streicht Gruppen überprüfter Pfade
- **Unifikation**
  - Bestimme Substitution σ, die alle Konnektionen komplementär macht
  - Überprüfe Zulässigkeit der Substitution
  - Integriere in Pfadexploration
- **Multiplizitätsbestimmung**
  - Wo nötig, erhöhe Multiplizität von γ-Knoten dynamisch
- **Rücktransformation**
  - Erzeuge Tableaux-/Sequenzenbeweis aus Matrixbeweis