

# Inferenzmethoden

## Teil II

### Deduktionsverfahren

Automatische Suche nach Beweisen



# Inferenzmethoden

## Einheit 4

### Das Extensionsverfahren: Systematische Pfadüberprüfung



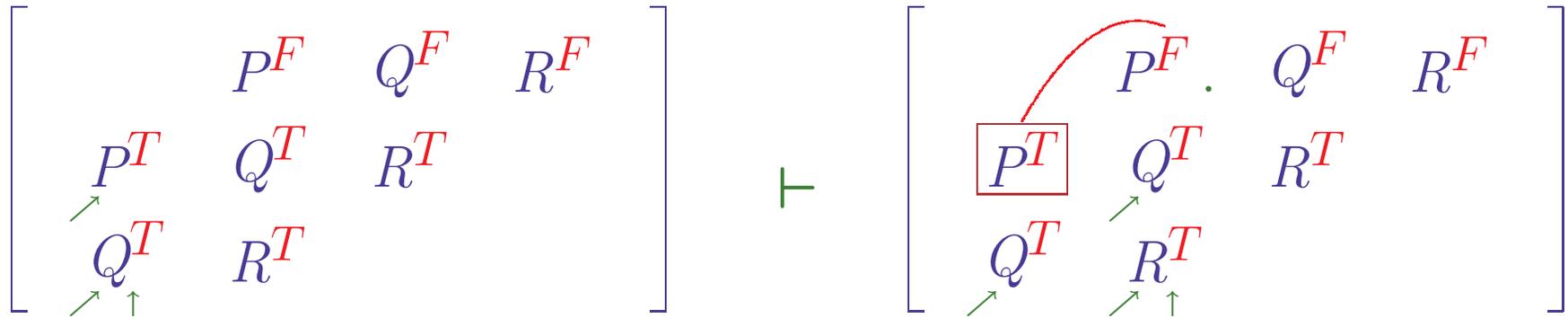
1. Einzelschritte des Verfahrens
2. Eigenschaften
3. Strategische Hinweise

# MATRIXBASIERTE DEDUKTION

## Suche komplementäre Konnektionen in allen Pfaden

- **Zentrale Aufgabe: Überprüfung alle Pfade**
  - Explizite Überprüfung ist meist exponentiell:  $\mathcal{O}(2^n)$  Pfade für  $n$  Klauseln
- **Beobachtung: Untersuchung von Teilpfaden reicht**
  - Wird eine Konnektion gefunden, sind alle Pfade komplementär, die diesen Teilpfad fortsetzen. Sie brauchen nicht weiter untersucht zu werden.
- **Grundidee: Eliminationsverfahren**
  - Orientiere Überprüfung an Konnektionen  $\mathcal{O}(m^2)$  für  $m$  Literale
  - Eliminiere Pfade durch Literal  $L$ , die eine Konnektion mit  $L$  enthalten.  
Untersuche systematisch die restlichen Pfade durch  $L$
- **Basisstrategie: (Tiefensuche)**
  - Kennzeichne abgeschlossene (komplementäre) Teilpfade
  - Verfolge den nächsten noch offenen Teilpfad
  - **Extension** des Pfades bei konnektionenorientiertem Vorgehen
  - Markiere Teilpfade, die später noch zu betrachten sind

## EXTENSIONSSCHRITT “ $\vdash$ ”



$\uparrow$  markiert **aktuelle Klausel**

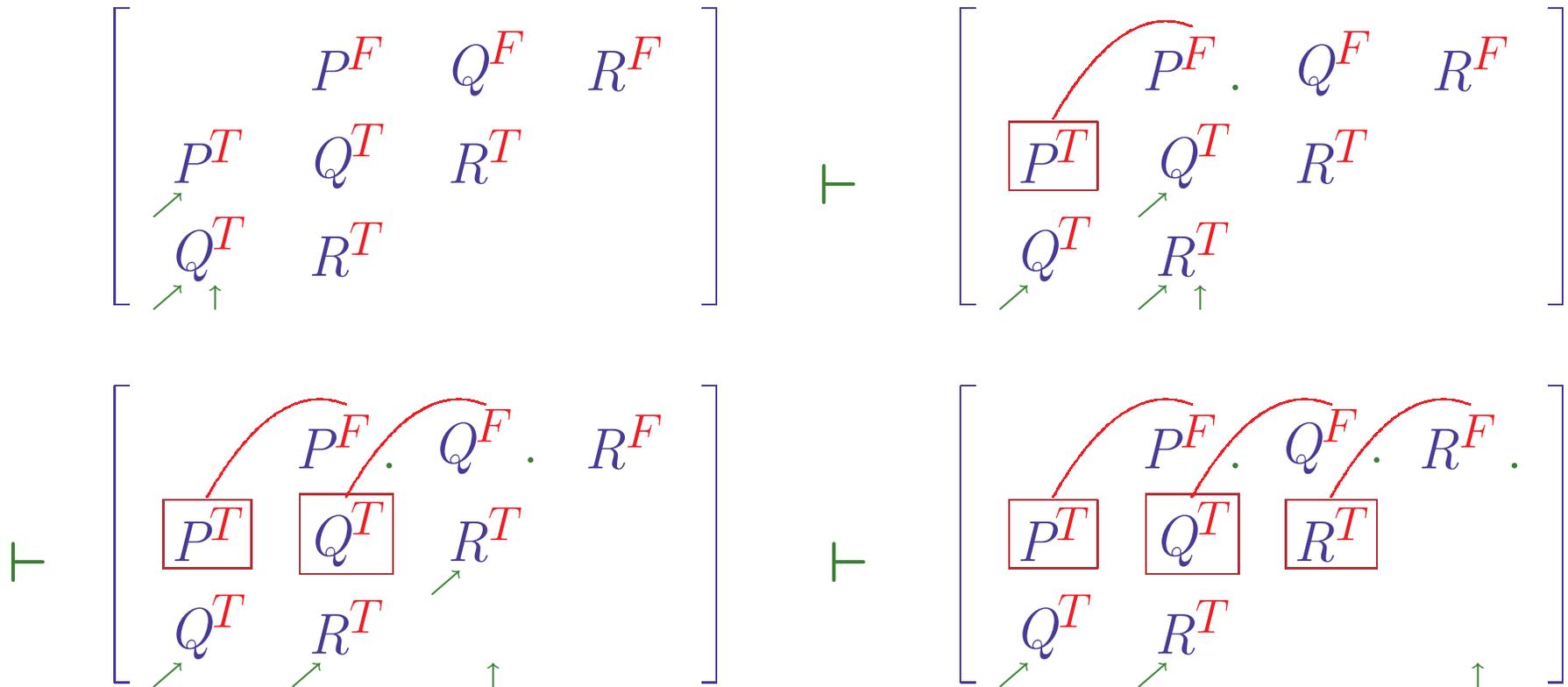
$\boxed{P}$  markiert Literale des **aktuellen Pfades**

$\nearrow$  markiert Startliterale der noch offenen Teilpfade

$\cdot$  markiert abgeschlossene Teilpfade

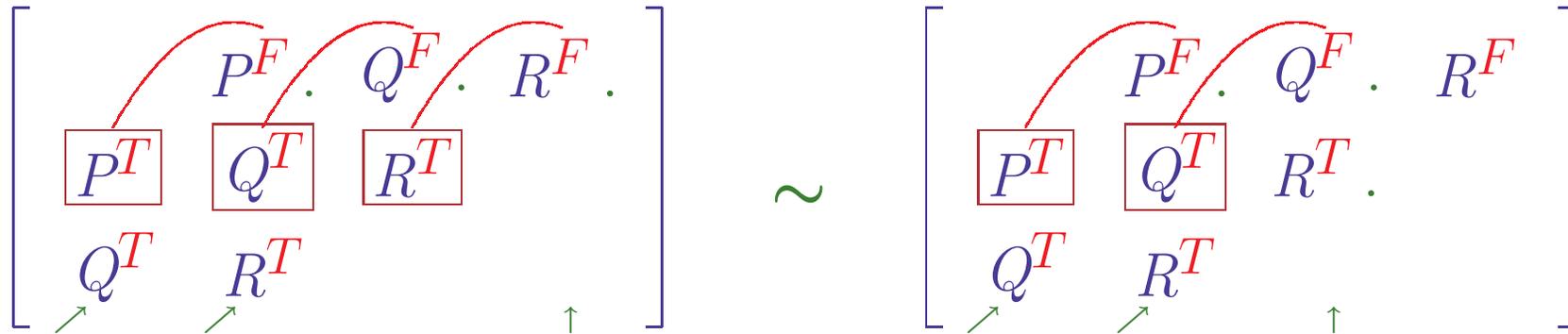
1. Wähle ein mit  $\nearrow$  markiertes Literal  $L$  der aktuellen Klausel
2. Ersetze  $\nearrow$  durch Box  $\boxed{L}$ ; wähle von  $L$  ausgehende Konnektion  
Falls es weitere Konnektionen gibt, vermerke diese in **Alternativenmenge**
3. Markiere konnektiertes Literal mit  $\cdot$
4. Markiere andere Literale der konnektierten Klausel mit  $\nearrow$
5. Verschiebe  $\uparrow$  auf die konnektierte Klausel

# EXTENSIONSVERFAHREN ILLUSTRIERT



Kein weiterer Extensionsschritt möglich

## BEREINIGUNGSSCHRITT “~”



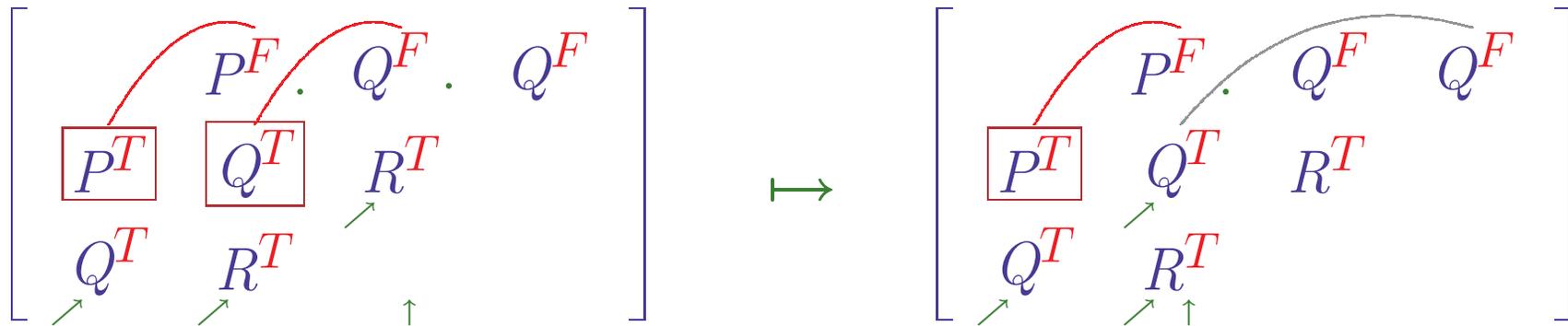
- **Keine Extension mehr möglich**
  - Keine Literale der aktuellen Klausel mit ↗ markiert
  - **Alle Alternativen des aktuellen Pfades sind überprüft**
- **Markiere aktuellen Pfad als abgeschlossen**
  1. Entferne Punktmarkierungen der aktuellen Klausel
  2. Setze ↑ zurück auf letzte Klausel des aktuellen Pfades
  3. Ersetze Markierung  $\boxed{L}$  durch  $\cdot$ .
- **Setze Verfahren fort**
  - Weitere Extensions- oder Bereinigungsschritte

# BEWEIS FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$



# RÜCKSETZUNG (BACKTRACKING) “ $\dashv\rightarrow$ ”

Extension und Bereinigung alleine reicht nicht



- **Keine Extension mehr möglich**

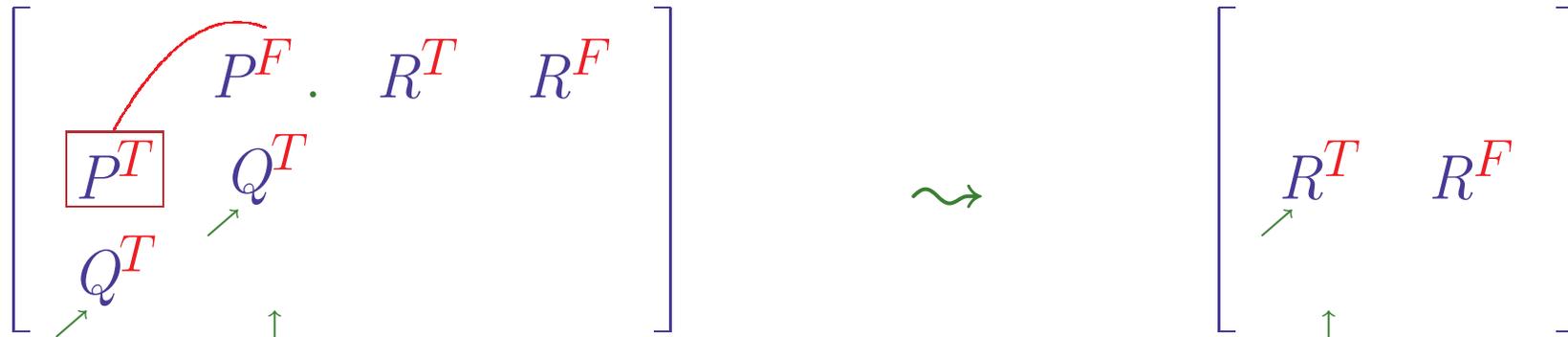
- Alternativenmenge nicht leer
- **Eine andere Alternative muß verfolgt werden**

- **Mache vorhergehende Extensionen rückgängig**

1. Gehe zurück zu Literal des aktuellen Pfades mit alternativen Konnektionen
2. Stelle die damalige Konfiguration wieder
3. Streiche die zuletzt betrachtete Konnektion aus der Alternativenmenge

# SEPARATION “ $\rightsquigarrow$ ”

Wenn die falsche Startklausel gewählt wurde ...



- **Keine Extension mehr möglich**
  - Alternativenmenge leer
  - Noch unbetrachtete Klauseln vorhanden
  - **Gültigkeit hängt nur von verbleibenden Klauseln ab**
- **Untersuche nur die anderen Klauseln**
  1. Entferne alle Klauseln mit Literalen des aktuellen Pfades
  2. Starte Extensionsverfahren erneut auf reduzierter Matrix

## EXTENSIONSVERFAHREN – EINFACHE VERSION

1. Wähle rein positive Klausel als Startklausel und markiere sie mit  $\uparrow$   
Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative und eine rein positive Klausel
2. Markiere alle Literale der aktuellen Klausel mit  $\nearrow$
3. Wende Extensions- Bereinigungs-, Rücksetzungs- und Separations-  
schritte an, so lange dies möglich ist
4. Sind alle Literale der Startklausel betrachtet, so ist die Formel gültig  
Andernfalls ist sie nicht gültig, wenn alle Klauseln betrachtet wurden

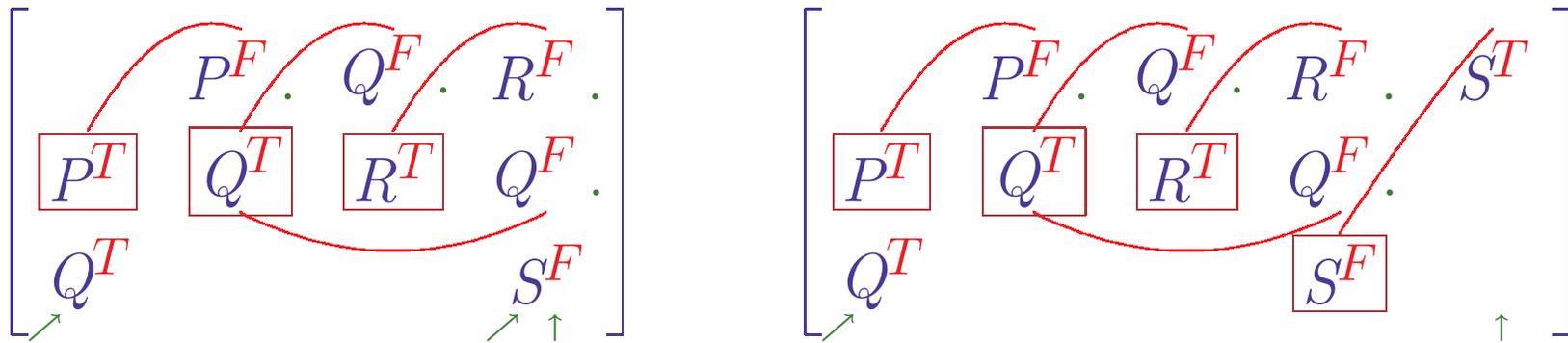
Verfahren ist **korrekt und vollständig für Hornformeln**

Verfahren ist **Kalkül**, keine Strategie

Strategisch zu wählende **Steuerungsparameter**

- Wahl der Startklausel – sollte **Zielklausel** (Behauptung) sein
- Anordnung der Literale in einer Klausel
- Wahl der Konnektion bei mehreren Alternativen

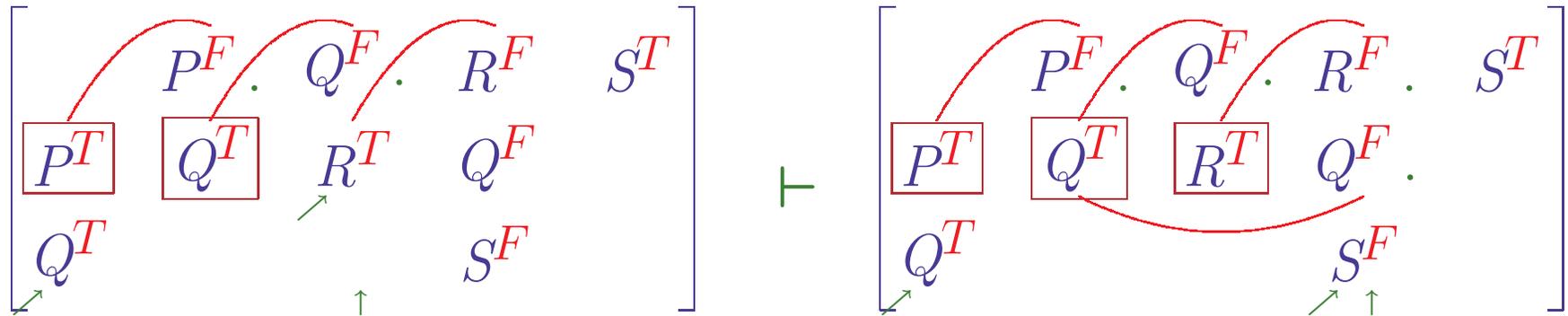
## WENN KEINE HORN-MATRIX VORLIEGT ...



- **Keine normale Extension mehr möglich**
  - Konnektion zurück nach  $Q^T$  ergäbe zyklischen aktuellen Pfad
- **Pfad  $P^T$   $Q^T$  darf nicht abgeschlossen werden**
  - Pfade durch  $P^T$   $Q^T$   $R^T$   $S^F$  sind nicht komplementär
  - Matrix ist nicht gültig
- **$Q^F$  muß als abgeschlossen markiert werden**
  - Pfade durch  $P^T$   $Q^T$   $R^T$   $Q^F$  sind komplementär
  - Rechte Matrix ist gültig

**Extensionsschritt muß verallgemeinert werden**

## ALLGEMEINER EXTENSIONSSCHRITT “ $\vdash$ ”



$\uparrow$  markiert **aktuelle Klausel**

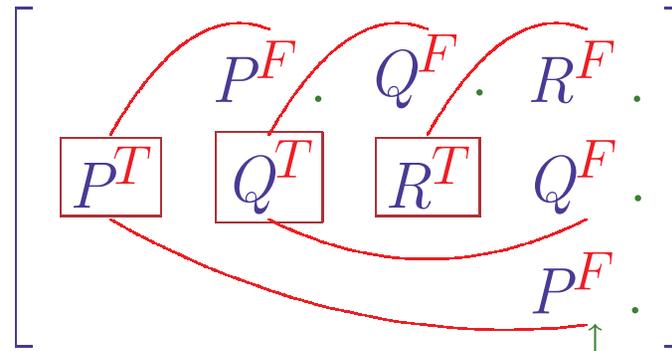
$\boxed{P}$  markiert Literale des **aktuellen Pfades**

$\nearrow$  markiert Startliterale der noch offenen Teilpfade

$\cdot$  markiert abgeschlossene Teilpfade

1. Wähle ein mit  $\nearrow$  markiertes Literal  $L$  der aktuellen Klausel
2. Ersetze  $\nearrow$  durch Box  $\boxed{L}$ ; wähle von  $L$  ausgehende Konnektion  
Falls es weitere Konnektionen gibt, vermerke diese in **Alternativenmenge**
3. Markiere **alle** Literale der konnektierten Klausel, die  
mit einem Literal des aktuellen Pfades konnektiert sind, mit  $\cdot$
4. Markiere andere Literale der konnektierten Klausel mit  $\nearrow$
5. Verschiebe  $\uparrow$  auf die konnektierte Klausel

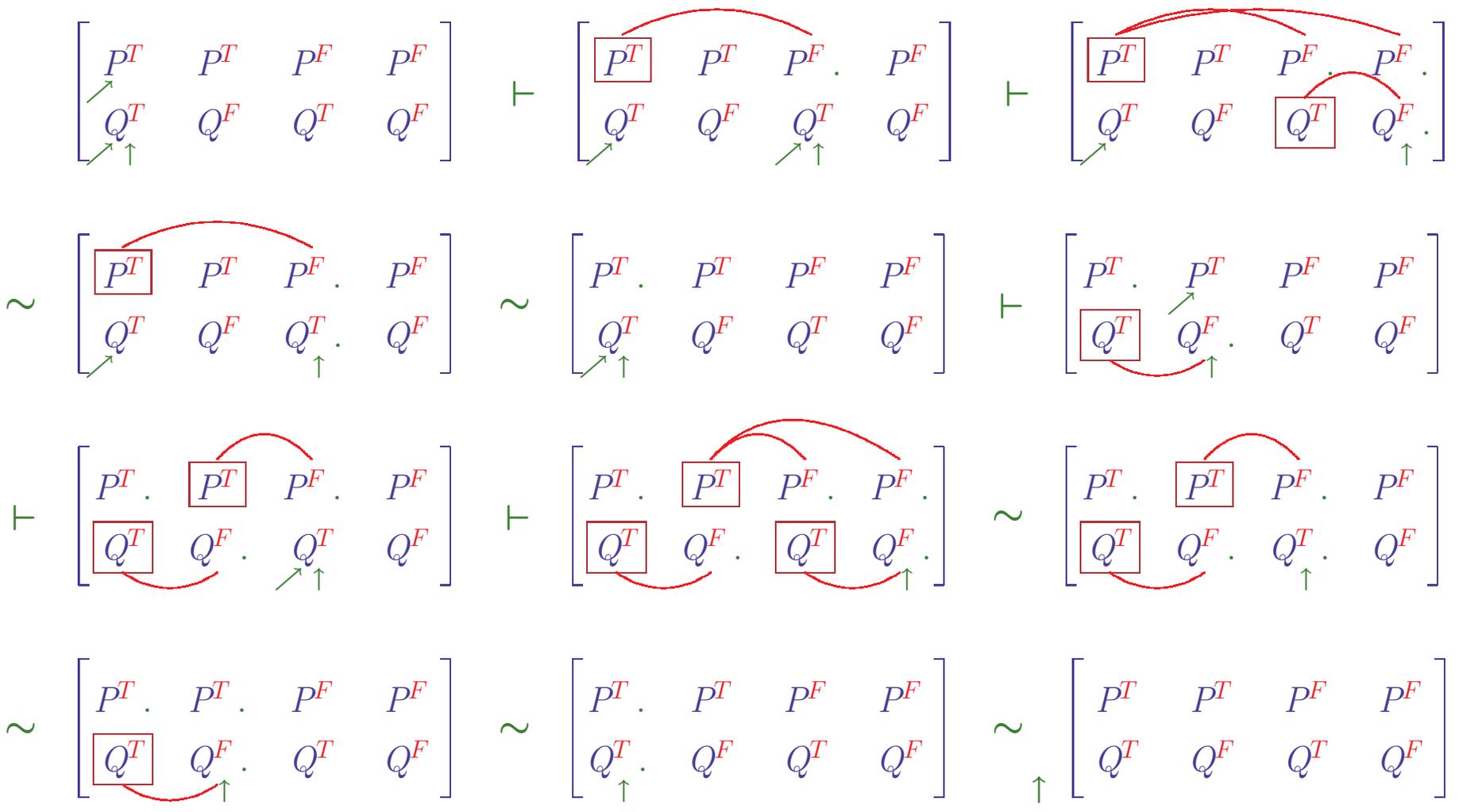
# ALLGEMEINER EXTENSIONSSCHRITT – ILLUSTRIERT



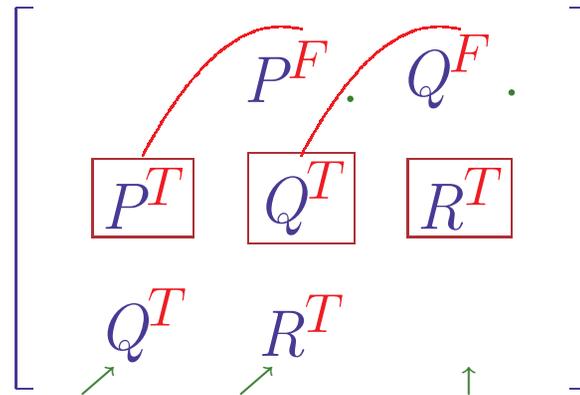
1. Wahl des neuen Literals  $R^T$   
Markiere  $R^F$  als geschlossen
2. Konnectiere mit  $Q^T$
3. Konnectiere mit  $P^T$

Komplexität linear in Länge des aktuellen Pfades

# BEWEIS FÜR $P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$



# GEGENBEISPIELE



- **Fehlgeschlagener Extensionsbeweis liefert Gegenbeispiel für Gültigkeit der Matrix**
  - Interpretiere  $P$ ,  $Q$  und  $R$  mit falsch
- **Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik**
  - Für jede aussagenlogische Formel hält das Extensionsverfahren nach endlich vielen Schritten an und liefert einen Beweis oder ein Gegenbeispiel
  - In begrenzter Form gilt dies auch prädikatenlogisch (subtile Details)

# BEWEIS FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \vee \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \vee P$



## Vollständigkeit ohne Rücksetzung

- **Einfaches Extensionsverfahren ist vollständig**
  - Jede aussagenlogische Formel kann bewiesen werden
  - Rücksetzung notwendig für Vollständigkeit
- **Rücksetzung erfordert hohen Verwaltungsaufwand**
  - Alle vorhergehenden Situationen müssen gespeichert werden
- **Es geht auch ohne Rücksetzung**
  - Konnektionen können von jedem Literal des aktuellen Pfades ausgehen
    - Keine lineare Verkettung der Extensionsschritte
  - Verfahren wählt immer die nächste unbenutzte Konnektion
    - Zurücksetzen wird durch Vorwärtsgehen von anderem Literal ersetzt
  - Es reicht, die noch unbenutzten Konnektionen zu speichern

# DAS EXTENSIONSVERFAHREN $CP_1^0$

Falls  $\{\} \in F$  so ist  $F$  gültig. Das Verfahren endet

Erfolg

$\nearrow$ -List  $\leftarrow []$ ;  $p \leftarrow \{\}$

Wähle Klausel  $c \in F$ ; streiche  $c$  aus  $F$

Solange  $F \neq \{\}$

Wähle Literal  $L \in c$ ; streiche  $L$  aus  $c$

*Extension mit  $L$*

Falls  $c \neq \{\}$ , ergänze Markierung  $(c, p, F)$  zu  $\nearrow$ -List

Erweitere  $p$  um  $L$

Falls es eine Klausel  $d \in F$  und ein Literal  $L' \in d$  gibt, das mit  $p$  konnektiert ist

Dann streiche  $d$  aus  $F$ ; streiche alle mit  $p$  konnektierten Literale aus  $d$

Falls  $d = \{\}$

Dann Falls  $\nearrow$ -List =  $[]$  so ist  $F$  gültig. Das Verfahren endet

Erfolg

Wähle  $(c, p, F)$  als letzte Markierung aus  $\nearrow$ -List; streiche diese

*Bereinigung*

Sonst  $c \leftarrow d$

Sonst  $\nearrow$ -List  $\leftarrow []$ ;  $p \leftarrow \{\}$ ;

*Separation und Neustart*

Wähle Klausel  $c \in F$ ; streiche  $c$  aus  $F$

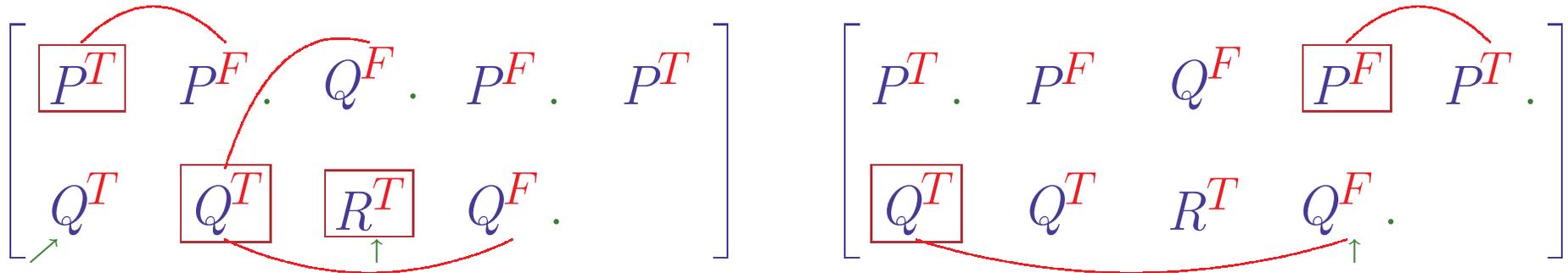
Ist  $F = \{\}$  so ist  $F$  ungültig. Das Verfahren endet

Mißerfolg

$F$ : aktuelle Matrix;  $p$ : aktueller Pfad;  $\nearrow$ -List: Markierung der Startliterale von offenen Teilpfaden

$L$  konnektiert mit  $p \equiv L$  ist mit einem Literal  $K$  aus  $p$  konnektiert

$CP_1^0$ -BEWEIS FÜR  $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \vee \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \vee P$



$$F = \{ \{P_2^F, Q_2^T\}, \{Q_3^F, R_3^T\} \}$$

$$\nearrow\text{-List} = []$$

$$p = \{Q_1^T, P_4^F\}$$

$$c = \{\}$$

$$L = P_4^F$$

$$d = \{\}$$

Matrix ist gültig

- $CP_1^0$  ist **korrekt**
  - Jede bewiesene Formel ist gültig
- $CP_1^0$  ist **vollständig für die Aussagenlogik**
  - Jede gültige aussagenlogische Formel wird von  $CP_1^0$  bewiesen
- $CP_1^0$  ist ein **Entscheidungsverfahren**
  - $CP_1^0$  liefert für jede aussagenlogische Formel  $F$  nach endlich vielen Schritten einen Beweis oder ein Gegenbeispiel
- $CP_1^0$  ist **konfluent**
  - Bei alternativen Extensionsmöglichkeiten spielt die Auswahl keine Rolle
  - Rücksetzschrte sind nicht erforderlich!

- **Im schlimmsten Fall exponentiell**

- Schlimmster Fall: alle Pfade werden komplett geprüft
- Es gibt maximal  $m^n$  Pfade bei  $n$  Klauseln mit insgesamt  $m$  Literalen
- Größenordnung  $\mathcal{O}(2^n)$

- **Das Gültigkeitsproblem ist  $co-NP$ -vollständig**

- Erfüllbarkeit (SAT) ist  $NP$ -vollständig
- Beweisverfahren müssen exponentiell sein, wenn  $P \neq NP$
- Es ist wichtig, die Anzahl der Klauseln klein zu halten
- Es lohnt sich, im Vorfeld Klauselreduktionen durchzuführen  $\mapsto$  später

- **Verfahren ist im Mittel deutlich besser**

- Exponentiell /  $co-NP$ -vollständig ist der schlimmste Fall
- Extensionsverfahren ist linear bei Hornklauseln
- Extensionsverfahren ist linear bei maximal 2 Literalen je Klausel

## Beweissuche ist Verarbeitung eines Suchbaumes

- **Wahl der Startklausel (Top-Down oder Bottom-up)**
  - Zielklausel (Behauptung): analytische (Rückwärts) Beweisführung
  - sonst: synthetische (Aufwärts) Beweisführung
- **$\wedge$ -Verzweigung: Wahl des nächsten Teilpfadliterals**
  - **Tiefensuche**: erweitert **aktuellen Pfad** – zeigt Unerfüllbarkeit schneller
  - **Breitensuche**: verfolgt alle Literale der **aktuellen Klausel** zuerst
  - Keine echte Auswahl: beides muß verfolgt werden
- **$\vee$ -Verzweigung: Wahl der Konnektion**
  - **Breitensuche**: verfolge **alle Alternativen** simultan  
Vollständig, findet kürzeste Beweise, langsam
  - **Tiefensuche**: verfolge **eine Alternative** (Backtracking im Mißerfolgsfall)  
Schnell, Vollständigkeit/Terminierung geht verloren in Prädikatenlogik