Inferenzmethoden

Einheit 5

Die Konnektionsmethode: Ergänzungen für die Prädikatenlogik

1. Prädikatenlogischer Extensionsschritt
2. Klauselkopien
3. Allgemeiner Rücksetzungschritt
4. Das prädikatenlogische Verfahren CP_1^1

Liften der aussagenlogischen Methode

- **Zulässige Substitution muß bestimmt werden**
  - Verfahren muß partielle Substitution σ mitführen und erweitern
- **Erweiterung des Extensionsschrittes "$\vdash$"**
  - Konnektierte Literale müssen unifiziert werden
  - Alternativen werden komplexer
- **Bereinigungsschritt "$\sim$" i.w. unverändert**
- **(Implizite) Klauselkopien können nötig sein**
  - Erzeuge Klauselkopien bzw. Indizierung dynamisch
- **Erweiterung des Rücksetzungsschrittes "$\longmapsto$"**
  - Alternative konnektierte Klauseln
  - Alternative Substitutionen und passende konnektierte Literale
  - Alternative Startklauseln (ersetzt Separationsschritt)
  - Zusätzliche Instanzen der Matrix
- **Separationsschritt wird hinfällig**

Prädikatenlogische Erweiterung des Extensionsschrittes

$$\begin{bmatrix} & Hx^F & Sx^F & Ac^F \\ Hc^T & Sx^T & Ax^T & \\ \nearrow\ \uparrow & & & \end{bmatrix} [\,] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hx^F\,. & Sx^F & Ac^F \\ \boxed{Hc^T} & Sx^T & Ax^T & \\ & \nearrow\ \uparrow & & \end{bmatrix} [c/x]$$

$\uparrow$ markiert **aktuelle Klausel**

$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades**

Aktuelle Substitution σ wird mitgeführt

$\nearrow$ markiert Startliterale der noch offenen Teilpfade

. markiert abgeschlossene Teilpfade

---

1. Wähle ein mit $\nearrow$ markiertes Literal L der aktuellen Klausel
2. Ersetze $\nearrow$ durch Box $\boxed{L}$; wähle von L ausgehende Konnektion
   Falls es weitere Konnektionen gibt, vermerke diese in Alternativenmenge
3. Unifiziere die konnektierten (mit σ modifizierten) Terme und erweitere σ
   Falls Terme nicht unifizierbar sind, breche den Extensionsschritt ab
4. Markiere alle Literale der konnektierten Klausel, die unter σ komplementär zu einem Literal des aktuellen Pfades sind, mit .
5. Markiere andere Literale der konnektierten Klausel mit $\nearrow$
6. Verschiebe $\uparrow$ auf die konnektierte Klausel

Einfacher prädikatenlogischer Extensionsbeweis

$$\begin{bmatrix} & Hx^F & Sx^F & Ac^F \\ Hc^T & Sx^T & Ax^T & \end{bmatrix} [\,] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hx^F\,. & Sx^F & Ac^F \\ \boxed{Hc^T} & Sx^T & Ax^T & \end{bmatrix} [c/x]$$

$$\vdash \quad \begin{bmatrix} & Hx^F\,. & Sx^F\,. & Ac^F \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & Ax^T & \end{bmatrix} [c/x] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hx^F\,. & Sx^F\,. & Ac^F\,. \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & \boxed{Ax^T} & \end{bmatrix} [c/x]$$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} & Hx^F\,. & Sx^F\,. & Ac^F \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & Ax^T\,. & \end{bmatrix} [c/x] \quad \sim \quad \begin{bmatrix} & Hx^F\,. & Sx^F & Ac^F \\ \boxed{Hc^T} & Sx^T\,. & Ax^T & \end{bmatrix} [c/x]$$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} & Hx^F & Sx^F & Ac^F \\ Hc^T\,. & Sx^T & Ax^T & \end{bmatrix} [c/x] \quad \sim \quad \begin{bmatrix} & Hx^F & Sx^F & Ac^F \\ Hc^T & Sx^T & Ax^T & \end{bmatrix} [c/x]$$

Verallgemeinerungen des Extensionsschrittes I

Alle neuen Konnektionen müssen komplementär sein

$$\begin{bmatrix} & Hy^F \,.\, & Sx^F \\ \boxed{Hc^T} & Sx^T & Hx^F \end{bmatrix} [c/y] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hy^F \,.\, & Sx^F \,.\, \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & Hx^F \,.\, \end{bmatrix} [c/y, c/x]$$

Hx^T* ist konnektiert mit *Hc^T

– Konnektion nicht komplementär unter (erweiterter) Substitution σ

– Konnektion wird aber komplementär, wenn σ nochmals erweitert wird

$$\Downarrow$$

Verallgemeinere Schritt 4 auf unifizierbare Konnektionen

"Markiere alle Literale der konnektierten Klausel, die unter einer Erweiterung von σ komplementär zu einem Literal des aktuellen Pfades sind, mit ."

Verallgemeinerungen des Extensionsschrittes II

$$\left[\begin{array}{cccc} & Hy^F\,. & Sx^F\,. & Ax^F \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & Ax^T & Hx^F \\ & & & Sd^F \end{array}\right][c/y] \quad \vdash \quad \left[\begin{array}{cccc} & Hy^F\,. & Sx^F\,. & Ax^F\,. \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & \boxed{Ax^T} & Hx^F\,. \\ & & & Sd^F \end{array}\right][c/y,c/x]$$

$$\vdash \quad \left[\begin{array}{cccc} & Hy^F\,. & Sx^F\,. & Ax^F\,. \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & \boxed{Ax^T} & Hx^F \\ & & & Sd^F\,. \end{array}\right][c/y,d/x]$$

Hx^T ist konnektiert mit Hc^T, Sx^T mit Sd^T

– $(Hx^T,\ Hc^T)$ ist unifizierbar durch Erweiterung von σ auf $[c/y, c/x]$

– $(Sx^T,\ Sd^T)$ ist unifizierbar durch Erweiterung von σ auf $[c/y, d/x]$

– Mehrere alternative Extensionen mit verschiedenen Substitutionen möglich

$$\Downarrow$$

Verallgemeinere Schritte 3 und 4 und den Rücksetzungsschritt

– Bilde Unifikatoren für alle Teilmengen konnektierter Literale

– Verfolge eine Alternative und speichere die anderen

Allgemeiner prädikatenlogischer Extensionsschritt

1. Wähle ein mit $\nearrow$ markiertes Literal $\boldsymbol{L}$ der aktuellen Klausel
2. Ersetze $\nearrow$ durch Box $\boxed{\boldsymbol{L}}$; wähle von $\boldsymbol{L}$ ausgehende Konnektion
   Falls es weitere Konnektionen gibt, vermerke diese in Alternativenmenge
3. Wähle Teilmenge der Literale der konnektierten Klausel, die mit dem aktuellen Pfad konnektiert sind, und eine Substitution $\boldsymbol{\rho}$, welche die mit $\boldsymbol{\sigma}$ modifizierten Konnektionen komplementär macht
   Erweitere $\boldsymbol{\sigma}$ mit der zusätzlich generierten Substitution $\boldsymbol{\rho}$
   Vermerke weitere Teilmengen und Substitutionen in Alternativenmenge
   Falls es keine solche Teilmenge gibt, breche den Extensionsschritt ab
4. Markiere alle gewählten Literale der konnektierten Klausel mit .
5. Markiere andere Literale der konnektierten Klausel mit $\nearrow$
6. Verschiebe $\uparrow$ auf die konnektierte Klausel

Prädikatenlogische Rücksetzung

Keine Extension oder Bereinigung mehr möglich

$$\left[\begin{array}{ccccc} & Hx^F . & Sx^F . & Ax^F . & Hd^T \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & \boxed{Ax^T} & Hx^F . & \\ & & & Sd^F & \end{array}\right][c/y, c/x] \;\mapsto\; \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^F . & Sx^F . & Ax^F . & Hd^T \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & \boxed{Ax^T} & Hx^F & \\ & & & Sd^F . & \end{array}\right][c/y, d/x]$$

- **Alternativenmengen nicht leer?**
  1. Gehe zurück auf Literal des aktuellen Pfades, von dem aus
     (a) eine alternative Unifikation möglich war oder
     (b) eine alternative Konnektion beginnt
  2. Stelle die damalige Konfiguration und Substitution wieder her
  3. Streiche die neu betrachtete Konnektion / Unifikation aus der entsprechenden Alternativenmenge
- **Alternativenmengen leer?**
  Versuche Neustart mit alternativer Startklausel oder Klauselkopie

Prädikatenlogischer Extensionsbeweis

$$\left[\begin{array}{ccccc} & Hy^F & Sx^F & Ax^F & Hd^T \\ Hc^T & Sx^T & Ax^T & Hx^F & \\ & & & Sd^F & \end{array}\right] [\,]$$

$$\vdash \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^F\,. & Sx^F & Ax^F & Hd^T \\ \boxed{Hc^T} & Sx^T & Ax^T & Hx^F & \\ & & & Sd^F & \end{array}\right] [c/y]$$

$$\vdash \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^F\,. & Sx^F\,. & Ax^F & Hd^T \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & Ax^T & Hx^F & \\ & & & Sd^F & \end{array}\right] [c/y]$$

$$\vdash \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^F\,. & Sx^F\,. & Ax^F\,. & Hd^T \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & \boxed{Ax^T} & Hx^F\,. & \\ & & & Sd^F & \end{array}\right] [c/y, c/x]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^F\,. & Sx^F\,. & Ax^F\,. & Hd^T \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & \boxed{Ax^T} & Hx^F & \\ & & & Sd^F\,. & \end{array}\right] [c/y, d/x]$$

$$\vdash \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^F\,. & Sx^F\,. & Ax^F\,. & Hd^T\,. \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & \boxed{Ax^T} & \boxed{Hx^F} & \\ & & & Sd^F\,. & \end{array}\right] [c/y, d/x]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^F\,. & Sx^F\,. & Ax^F\,. & Hd^T \\ \boxed{Hc^T} & \boxed{Sx^T} & \boxed{Ax^T} & Hx^F\,. & \\ & & & Sd^F\,. & \end{array}\right] [c/y, d/x]$$

$$\sim^4 \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^F & Sx^F & Ax^F & Hd^T \\ Hc^T & Sx^T & Ax^T & Hx^F & \\ & & & Sd^F & \end{array}\right] [c/y, d/x]$$

Allgemeine Rücksetzung: Klauselkopie

$$\left[\begin{array}{ccc} \boxed{Pc^F} & Pfx^F & Pffy^T \\ & Px^T. & \end{array}\right]_{[c/x]} \quad \begin{array}{c}\mapsto \\ \vdash\end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} \boxed{Pc^F} & \boxed{Pfx_1^F} & \boxed{Pfx_2^F} & Pffy^T. \\ & Px_1^T. & Px_2^T. & \end{array}\right]_{[c/x_1,\, fc/x_2,\, c/y]}$$

- **Extensionsschritt undurchführbar**
  - $[c/x]$ widerspricht $[fy/x]$
- **Formel** $(\forall x\, Px \Rightarrow Pfx) \wedge Pc \;\Rightarrow\; \exists y\, Pffy$ **gültig**
  - Argument $\forall x\, (Px \Rightarrow Pfx)$ kann doppelt verwendet werden
- **Extensionsbeweis benötigt Klauselkopie**
- **Offene Fragen**
  - Automatische Erzeugung von Kopien bei Rücksetzung?
    - Tiefensuche: Kopien frühzeitig dynamisch erzeugen
    - Breitensuche: Kopien nach erfolgloser Beweisführung
  - **Suche terminiert nicht immer**, da Prädikatenlogik unentscheidbar

Prädikatenlogischer Extensionsbeweis mit Klauselkopie

$$\begin{bmatrix} Pc^F & Pfx_1^F \; Pfx_2^F \; Pffy^T \\ & Px_1^T \quad Px_2^T \end{bmatrix} []
\quad \vdash \quad
\begin{bmatrix} \boxed{Pc^F} & Pfx_1^F \; Pfx_2^F \; Pffy^T \\ & Px_1^T . \quad Px_2^T \end{bmatrix} [c/x_1]$$

$$\vdash \begin{bmatrix} \boxed{Pc^F} & \boxed{Pfx_1^F}\boxed{Pfx_2^F} \; Pffy^T \\ & Px_1^T . \quad Px_2^T . \end{bmatrix} [c/x_1, fc/x_2]
\quad \vdash \quad
\begin{bmatrix} \boxed{Pc^F} & \boxed{Pfx_1^F}\boxed{Pfx_2^F} \; Pffy^T . \\ & Px_1^T . \quad Px_2^T . \end{bmatrix} [c/x_1, fc/x_2, c/y]$$

$$\sim^3 \begin{bmatrix} Pc^F & Pfx_1^F \; Pfx_2^F \; Pffy^T \\ & Px_1^T \quad Px_2^T \end{bmatrix} [c/x_1, fc/x_2, c/y]$$

Klauselkopien und Konnektionen implizit verwaltet

Allgemeine Prädikatenlogische Rücksetzung

$$\left[\begin{array}{llll} \boxed{Pc^F} & Pfx^F & Pffy^T & Pfz^F \\ & Px^T\,. & & \end{array}\right][c/x] \;\; \begin{array}{c}\mapsto\\ \vdash\end{array} \;\; \left[\begin{array}{lllll} Pc^F & Pfx^F & Pffy^T & . & \boxed{Pfz^F} \\ & Px^T & & & \end{array}\right][ffy/z]$$

$$\left[\begin{array}{lll} \boxed{Pc^F} & Pfx^F & Pffy^T \\ & Px^T\,. & \end{array}\right][c/x] \;\; \begin{array}{c}\mapsto\\ \vdash\end{array} \;\; \left[\begin{array}{lllll} \boxed{Pc^F} & \boxed{Pfx_1^F} & \boxed{Pfx_2^F} & Pffy_1^T & Pffy_2^T \\ & Px_1^T\,. & Px_2^T\,. & & \end{array}\right][c/x_1, fc/x_2, c/y_1]$$

- **Alternativenmengen nicht leer?**
  1. Gehe zurück auf Literal des aktuellen Pfades, von dem aus
     (a) eine alternative Unifikation möglich war oder
     (b) eine alternative Konnektion beginnt
  2. Stelle die damalige Konfiguration und Substitution wieder her
  3. Streiche neu betrachtete Konnektion / Unifikation aus entsprechender Alternativenmenge
- **Alternativenmengen leer?**
  (a) Wähle alternative Startklausel, falls vorhanden, und beginne neu
  (b) Erzeuge Kopie aller (γ-)Klauseln und starte Verfahren erneut

Prädikatenlogisches Extensionsverfahren CP_1^1

- **5 mögliche Alternativen zu verwalten**
  - Startklausel (statt Separation) ALT_s
  - Klausel, die mit dem Literal konnektiert ist ALT_c
  - Teilmenge der konnektierten Literale in der Klausel und Unifikator σ-List
  - Literal von dem die Konnektion ausgeht $\nearrow$-List
  - Offene Pfade, die ggf. eine Kopie der Matrix benötigen paths_i
- **Extensionen von allen Literalen des aktuellen Pfades**
- **Verwaltung der Alternativenmengen ALT_s, ALT_c, σ-List ersetzt Rücksetzung und Separation**
- **Klauselkopien werden nur dann erzeugt, wenn alle anderen Alternativen abgearbeitet sind**
  - Speichere Matrix im Original für mögliche Kopien

Vollständiges Verfahren, nicht auf Effizienz getrimmt

DAS PRÄDIKATENLOGISCHE EXTENSIONSVERFAHREN CP_1^1

Falls F ohne Existenzquantor, verwende effizientes Verfahre für Aussagenlogik (*"Davis-Putnam"*)
$\nearrow$-List $\leftarrow$ []; ALT$_s$ $\leftarrow$ []; ALT$_c$ $\leftarrow$ []; σ-List $\leftarrow$ []; paths$_1$ $\leftarrow$ []; paths$_2$ $\leftarrow$ [] *Initialisierung*
$i \leftarrow 1$; $M \leftarrow F$; $\sigma \leftarrow$ []; $p \leftarrow \{\}$
Wähle Klausel $c \in M$; streiche c aus M; erweitere ALT$_s$ um alternative Klauseln aus M *Startklausel*
Solange kein Beweis gefunden
  Wähle Literal $L \in c$; streiche L aus c *$\rightarrow$Pfaderweiterung*
  Falls $c \neq \{\}$, ergänze Markierung (c, p, M) zu $\nearrow$-List
  Erweitere p um L; ergänze Markierung $(L, M, \sigma, p, \nearrow$-List$)$ zu paths$_{i+1}$ *offene Pfade ablegen*
  Falls es $d \in M$ und $L' \in d$ gibt, das komplementär zu p ist *$\rightarrow$Extensionsklausel*
  Dann Ergänze Markierungen $(L, d', M, \sigma, p, \nearrow$-List$)$ zu ALT$_c$ für alternative Klauseln d'
    Streiche d aus M
    Wähle $e \subseteq d$ und τ, so daß alle $P \in e$ unter $\sigma\tau$ komplementär zu p sind *$\rightarrow$Extensionsmenge*
    Ergänze Markierungen $(d, e', M, \sigma, \tau', p, \nearrow$-List$)$ zu σ-List für alternative e' und τ'
    $c \leftarrow d$-e; $\sigma \leftarrow \sigma\tau$ *$\rightarrow$Extension*
    Falls $c = \{\}$
    Dann Falls $\nearrow$-List $=$ [] so ist F gültig. Das Verfahren bricht ab $\boxed{\text{Erfolg}}$
      Wähle (c, p, M) als letzte Markierung aus $\nearrow$-List; streiche diese *Bereinigung*
  Sonst Falls σ-List$\neq$[] *Alternative Extensionsmenge/Unifikator*
    Dann Wähle und streiche $(c, e, M, \sigma, \tau, p, \nearrow$-List$)$ aus σ-List; Setze Extensionschritt fort
    Sonst Falls ALT$_c \neq$[] *Alternative Extensionsklausel*
      Dann Wähle und streiche letztes $(L, d, M, \sigma, p, \nearrow$-List$)$ aus ALT$_c$
        Setze Extensionsschritt fort mit der Wahl einer neuen Extensionsmenge
      Sonst Falls ALT$_s \neq$[] *Alternative Startklausel*
        Dann Wähle und streiche letzte Klausel c aus ALT$_s$; $M \leftarrow F$-$\{c\}$; $\sigma \leftarrow$ []; $p \leftarrow \{\}$
          Wähle und streiche $L \in c$; Erweitere p und ggf. $\nearrow$-List
        Sonst Falls paths$_i$=[], so erhöhe i *Alternativer Kopienstart*
          Wähle und streiche eine offene Pfadsituation $(L, M, \sigma, p, \nearrow$-List$)$ aus paths$_i$
          Erweitere M um Kopie von F; Setze Extensionsschritt fort mit Wahl der Extensionsklausel