Inferenzmethoden

Einheit 7

Alternative Deduktionsverfahren I

1. Tableaux-Verfahren
2. Modellelimination
3. Inverse Methode
4. Semantische Bäume

Deduktionsverfahren

Unabhängig entstanden, dennoch ähnlich

- **Natürliches Schließen/Sequenzenkalküle** Gentzen 1935
- **Analytische Tableaux** Beth 1955, Smullyan 1971
- **Semantische Bäume**

- **Aussagenlogische Reduktionstechniken** Davis & Putnam 1960, Prawitz 1960
- **Resolution** Robinson 1965
- **Maslov-Verfahren (Inverse Methode)** Maslov 1968
- **Modellelimination** Loveland 1969
- **Extensionsverfahren:** Bibel 1981, Andrews 1981
- **Konsolution** Eder 1991

Systematische Entwicklung von Widerspruchsbeweisen

Gegeben: Zu widerlegende signierte Formel X^F

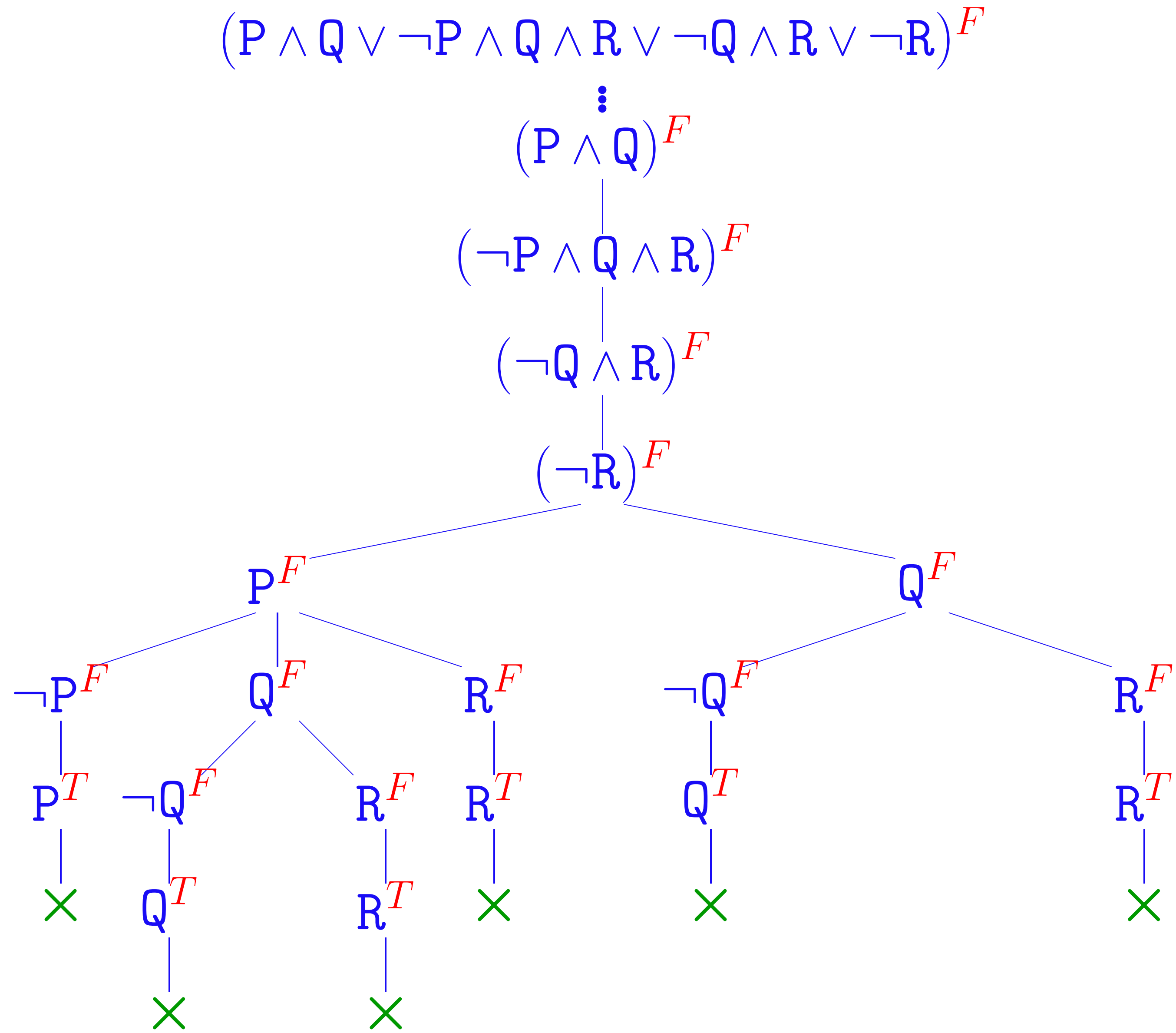
Start: Tableaubaum $\mathcal{T}$, bestehend aus der Wurzel X^F

Regeln: Wähle (unbenutzen) Knoten Y von $\mathcal{T}$.
Erweitere jeden offenen Zweig um α_1,α_2, falls Y vom Typ α
Verzweige durch Erweiterung mit β_1 bzw. β_2, falls Y vom Typ β
Erweitere um $\gamma(x)$ bzw. $\delta(a)$, falls Y vom Typ γ oder δ

Ziel: Alle Äste von $\mathcal{T}$ abgeschlossen (enthalten σ-komplementäres Paar von Formeln für eine Substitution σ)

Rechtfertigung: Jede Regel erzeugt Folgerungen der Ausgangsformel, wobei eine β-Regel die zwei möglichen Alternativen generiert. Die Äste des Baumes sind genau dann abgeschlossen, wenn die Wurzel von $\mathcal{T}$ unerfüllbar ist, also genau dann, wenn X gültig ist.

Tableauxbeweis für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$



Tableauxbeweise vs. Extensionsverfahren

- **Äste im Tableau $\hat{=}$ Pfade durch die Matrix**

α-Regel (Pfadverlängerung)	$\hat{=}$	Extension
β-Regel (Verzweigung)	$\hat{=}$	Noch offene Literale
γ-Regel	$\hat{=}$	Freilegung einer Variablen
δ-Regel	$\hat{=}$	Einführung einer Konstanten
Abgeschlossener Ast	$\hat{=}$	Komplementäre Konnektion im Pfad

- **Konnektionsmethode verdichtet Tableauxbeweise**
  - Kompaktheit: operiere nur auf atomaren Teilformeln
  - Konnektionenorientierung: gezielte Auswahl beweisrelevanter Teilformeln
  - Unifikation: gezielte Instantiierung der Quantoren
    (Integriert in die obige Variante des Tableauxverfahrens)

Simplifiziertes Verfahren für Normalform

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ mit $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$
Menge von Konnektionen $\{k_1, \ldots, k_m\}$ mit $k_j = \{{P_{i_j}}^T, {P_{i'_j}}^F\}$

Start: Ein Knoten markiert mit der Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$

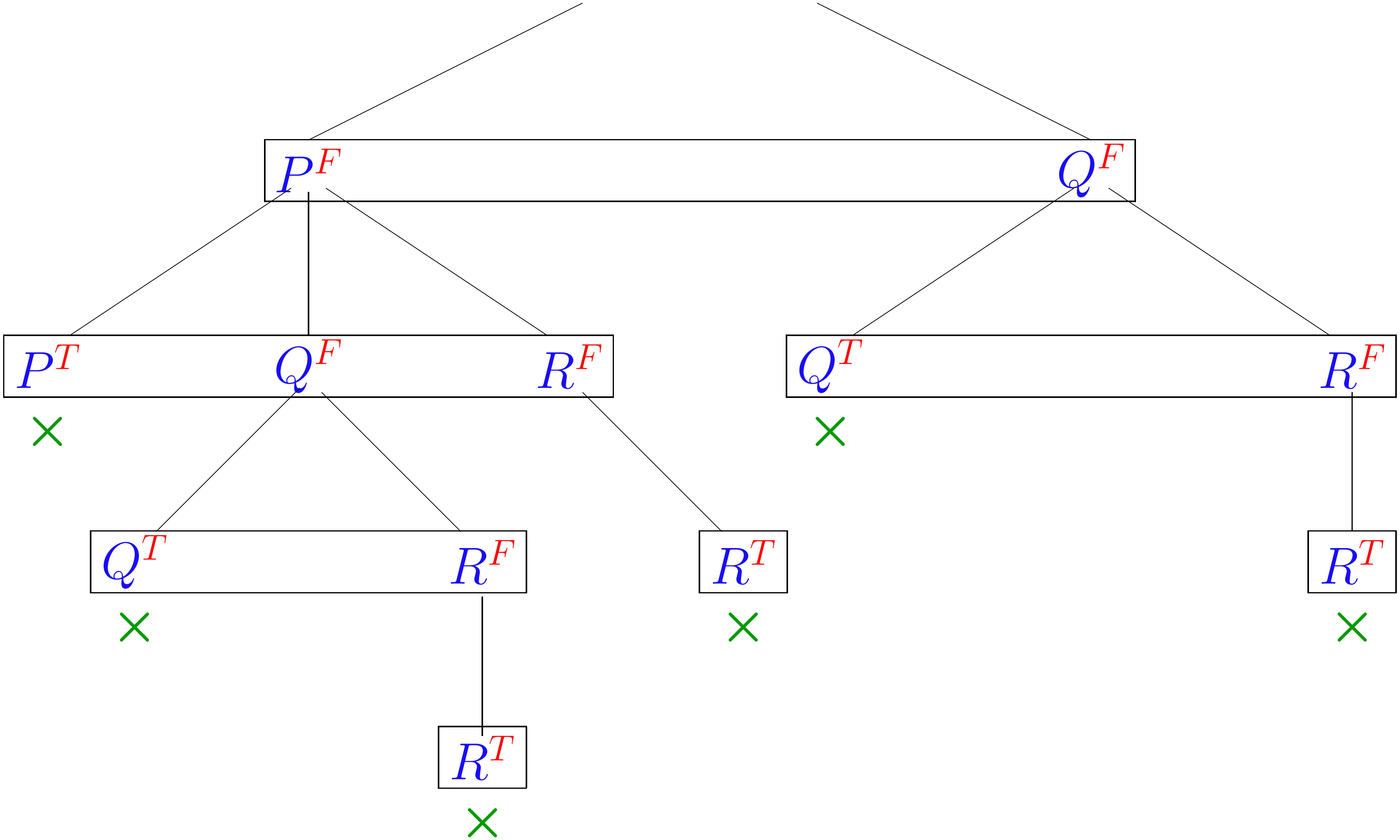
Regeln: Wähle Klausel $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$.
Generiere m_i Nachfolger, markiert mit $L_{i1}, \ldots, L_{im_i}$

Ziel: Alle Äste abgeschlossen (enthalten σ-komplementäre Konnektion)

Rechtfertigung: Äste entsprechen Teilpfaden durch die Matrix. Die Äste des Baumes sind genau dann abgeschlossen, wenn jeder Pfad durch die Matrix komplementär ist.

Tableaux-Ableitung für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\{\{P^F, Q^F\}, \{P^T, Q^F, R^F\}, \{Q^T, R^F\}, \{R^T\}\}$$



Zeige, daß kein Modell die Matrix falsifizieren kann

Beweis für $\boldsymbol{P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R}$

1. Um die erste Klausel falsch werden zu lassen, muß P oder Q falsch sein. Wir nehmen an, P sei falsch, und betrachten die weiteren Klauseln
2. Unter der Annahme ist $\neg P$ wahr. Klausel 2 wird trotzdem falsch, wenn zusätzlich Q falsch ist oder R falsch ist. Wir nehmen an, Q sei falsch.
3. Unter den Annahmen ist $\neg Q$ wahr. Klausel 3 wird trotzdem falsch, wenn zusätzlich R falsch ist.
4. Unter den Annahmen ist $\neg R$ (Klausel 4) wahr. Sie führen also nicht zu einem Gegenmodell und wir müssen weitere Alternativen betrachten.
5. Wenn R wahr wäre, würde Klausel 3 wahr, also müssen wir andere Alternativen betrachten.
6. Wenn Q wahr wäre, würde Klausel 2 wahr – es sei denn, R wäre falsch. Unter dieser Annahme wird aber Klausel 4 wahr und somit gibt es kein Gegenmodell, in dem P falsch ist.

⋮

Die Konnektionsmethode ist maschinennahe Modellelimination

Erzeuge Modelle, bis alle eine Klausel erfüllen

Beweis für $\boldsymbol{P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R}$

1. Es gilt entweder R oder $\neg R$.
2. Da $\neg R$ die 4. Klausel erfüllt, müssen wir nur den ersten Fall betrachten
3. Im Fall R wissen wir, daß auch Q oder $\neg Q$ gilt. Da R und $\neg Q$ die 3. Klausel erfüllt, müssen wir nur noch den ersten betrachten.
4. Wir unterscheiden nun P oder $\neg P$.
5. Im ersten Fall haben wir P, Q (und R), also die 1. Klausel erfüllt
6. Im zweiten Fall haben wir $\neg P$, Q und R, also die 2. Klausel erfüllt
7. Damit erfüllt jede Alternative mindestens eine der 4 Klauseln
   (Keine Alternative kann alle 4 Klauseln falsifizieren)

Duale Form der Modellelimination

Semantische Bäume in Matrix-Denkweise

Gegeben: Matrix $\{c_1,\ldots,c_n\}$ mit $c_i = \{L_{i1},\ldots,L_{im_i}\}$

Menge von Konnektionen $\{k_1,\ldots,k_m\}$ mit $k_j = \{P_{i_j}{}^T, P_{i'_j}{}^F\}$

Start: Ein Knoten markiert mit der Matrix $\{c_1,\ldots,c_n\}$

Regeln: Wähle Konnektion $k_j = \{P_{i_j}{}^T, P_{i'_j}{}^F\}$.

(Prädikatenlogische Form: mit σ instantiierte Konnektion)

Generiere 2 Nachfolger, markiert mit $P_{i_j}{}^T$ und $P_{i'_j}{}^F$

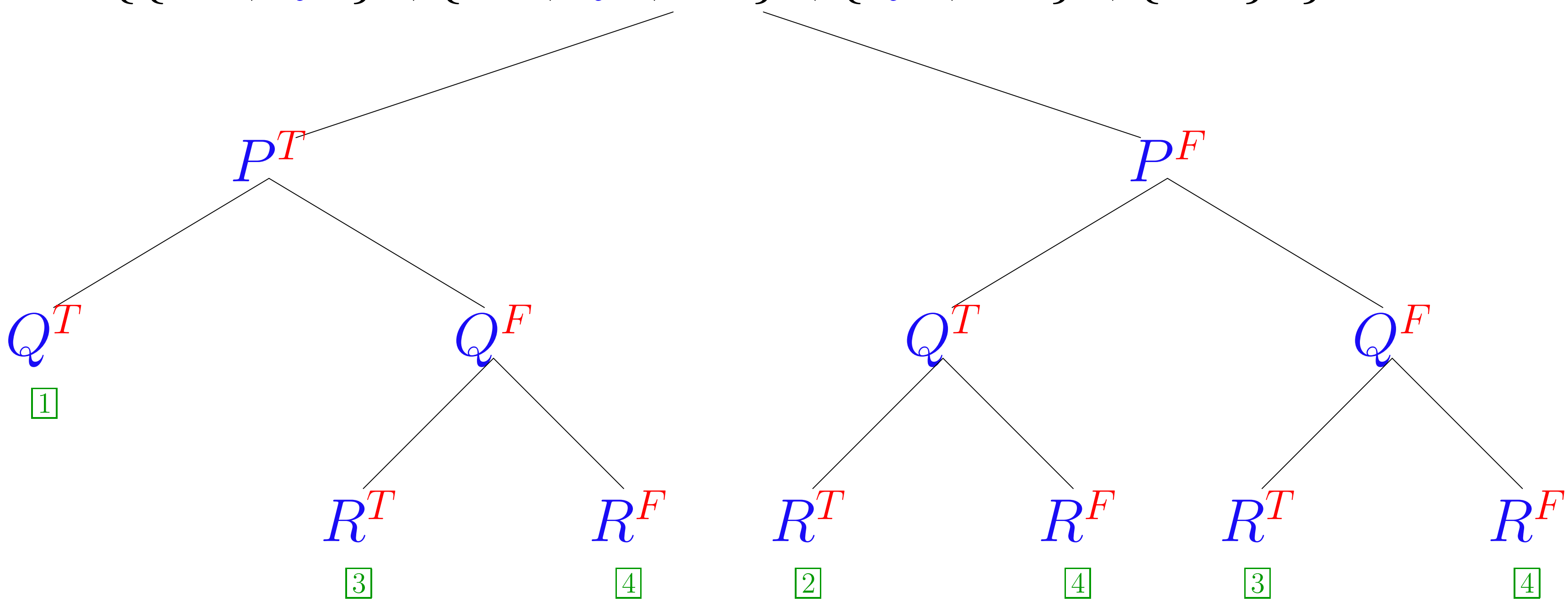
Ziel: Alle Äste abgeschlossen (enthalten eine Klausel der Matrix)

Rechtfertigung: Jeder Ast beschreibt ein mögliches Modell, welches eine der Klauseln erfüllen muß.

Gut für Normalform – schwer zu verallgemeinern

Semantischer Baum für $P \land Q \lor \neg P \land Q \land R \lor \neg Q \land R \lor \neg R$

$$\{\{P^T, Q^T\}^{\boxed{1}}, \{P^F, Q^T, R^T\}^{\boxed{2}}, \{Q^F, R^T\}^{\boxed{3}}, \{R^F\}^{\boxed{4}}\}$$



Strategie hat mehr Einfluß als die Methode selbst

Maslov-Verfahren (Inverse Methode)

Zielorientierte synthetische Beweisführung

Gegeben: Signierte Formel X^F und eine Menge von Axiomensequenzen der Form P^T,P^F, wobei P Literal von X ist

Regel: Wähle eine kleinste neue Teilformel Y von X^F, eine Regel des (synthetischen) Sequenzenkalküls, deren Schlußfolgerung die Form Γ,Y hat, und bereits abgeleitete Sequenzen Γ_1,Y_1 (und ggf. Γ_2,Y_2), welche mit den Prämissen der Regel unifizieren.
Leite die Sequenz Γ_1,Γ_2,Y ab

Ziel: Abgeleitete Sequenz X^F (ohne alternative Formeln)

Rechtfertigung: Das Verfahren sucht nach einer Folge von Anwendungen von Sequenzenregeln, die von Axiomen der Form $P \vee \neg P$ zur Zielformel X^F führen. Es nutzt dabei die Teilformeleigenschaft von Sequenzenkalkülen aus (der Wahrheitswert der Teilformeln bestimmt den der Ausgangsformel) und speichert unverarbeitete Alternativen in der Sequenz.
Achtung: Im Original ist das Verfahren als Widerlegungskalkül formuliert. Die Axiome sind grundsätzliche Widersprüche. Das Beweisziel ist die Widerlegung von X^F ohne zusätzliche Bedingungen.

Maslov-Ableitung für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

P^T, P^F $\quad$ Q^T, Q^F $\quad$ R^T, R^F	**Teilformel**
$P^F, Q^F,\ P \wedge Q^T$	$P \wedge Q^T$
$Q^F, R^F,\ P \wedge Q^T,\ \neg P \wedge Q \wedge R^T$	$\neg P \wedge Q \wedge R^T$
$R^F,\ P \wedge Q^T,\ \neg P \wedge Q \wedge R^T,\ \neg Q \wedge R^T$	$\neg Q \wedge R^T$
$P \wedge Q^T,\ \neg P \wedge Q \wedge R^T,\ \neg Q \wedge R^T,\ \neg R^T$	$\neg R^T$
$(P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R)^T$	

Maslov-Verfahren in Matrix-Denkweise

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ mit $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$
Menge von Konnektionen $\{k_1, \ldots, k_m\}$ mit $k_j = \{P_{i_j}{}^T, P_{i'_j}{}^F\}$

Start: m Knoten markiert mit Konnektionen k_j=$P_{i_j}{}^T$,$P_{i'_j}{}^F$

Regeln: Wähle Klausel $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$.
und m_i Knoten markiert mit $K_1 \cup \{L'_{i1}\} \ldots K_{m_i} \cup \{L'_{im_i}\}$.
(K_j sind Klauselmengen, die L'_{im_i} unifizieren mit den L_{im_i})
Generiere einen Nachfolger, markiert mit $K_1 \cup \ldots \cup K_{m_i}$

Ziel: Ein Knoten, der mit $\{\}$ markiert ist

Rechtfertigung: Die Regel entspricht dem Ableitungsschritt einer veränderten Abarbeitungsreihenfolge bei der Suche nach Komplementarität. Statt Tiefensuche werden ganze Klauseln (Breitensuche) verarbeitet und Teilpfade, die alle Pfade durch die bisher betrachteten Klauseln mit Sicherheit komplementär machen würden, auf einen Stack gelegt. Erscheint dabei der leere Pfad, so ist jeder Pfad durch die Matrix komplementär.

Maslov-Ableitung für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

	Klausel
$\{P^T, P^F\}$ $\{Q^T, Q^F\}$ $\{R^T, R^F\}$	
$\{P^F, Q^F\}$	$\{P^T, Q^T\}$
$\{Q^F, R^F\}$	$\{P^F, Q^T, R^T\}$
$\{R^F\}$	$\{Q^F, R^T\}$
$\{\,\}$	$\{R^F\}$

Kurze Beweise, aber Beweissuche oft mühsam

Maslov-Ableitung als inverse Konnektionsmethode

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \boxed{\{P^F,Q^F\}} \vdash$$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \boxed{\{Q^F,R^F\}} \vdash$$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \boxed{\{R^F\}} \vdash \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \boxed{\{\}}$$

Maslov-Ableitung prädikatenlogisch

$$\begin{bmatrix} & Qxy^T & Ry^F & Rz^T \\ Pa^T & Px^F & Qyz^F & Qzy^F \\ & & Pz^F & Py^F \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & Qay^T & Ry^F & Rz^T \\ Pa^T & Pa^F & Qyz^F & Qzy^F \\ & & Pz^F & Py^F \end{bmatrix}\boxed{\{Pa^F\}} \vdash \begin{bmatrix} & Qay^T & Ry^F & Rz^T \\ Pa^T & Pa^F & Qyz^F & Qzy^F \\ & & Pz^F & Py^F \end{bmatrix} \vdash$$

$$\begin{bmatrix} & Qaa^T & Ra^F & Ra^T \\ Pa^T & Pa^F & Qaa^F & Qaa^F \\ & & Pa^F & Pa^F \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & Qaa^T & Ra^F & Ra^T \\ Pa^T & Pa^F & Qaa^F & Qaa^F \\ & & Pa^F & Pa^F \end{bmatrix}\boxed{\{Qaa^F\}} \vdash \begin{bmatrix} & Qaa^T & Ra^F & Ra^T \\ Pa^T & Pa^F & Qaa^F & Qaa^F \\ & & Pa^F & Pa^F \end{bmatrix} \vdash$$

$$\begin{bmatrix} & Qaa^T & Ra^F & Ra^T \\ Pa^T & Pa^F & Qaa^F & Qaa^F \\ & & Pa^F & Pa^F \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & Qaa^T & Ra^F & Ra^T \\ Pa^T & Pa^F & Qaa^F & Qaa^F \\ & & Pa^F & Pa^F \end{bmatrix}\boxed{\{Ra^T\}} \vdash^3 \begin{bmatrix} & Qaa^T & Ra^F & Ra^T \\ Pa^T & Pa^F & Qaa^F & Qaa^F \\ & & Pa^F & Pa^F \end{bmatrix} \boxed{\{\}}$$

Beweis mit Extensionsverfahren

$$
\begin{bmatrix} & Qxy^T & Ry^F & Rz^T \\ Pa^T & Px^F & Qyz^F & Qzy^F \\ & & Pz^F & Py^F \end{bmatrix}
\vdash
\begin{bmatrix} & Qay^T & Ry^F & Rz^T \\ \boxed{Pa^T} & Pa^F & Qyz^F & Qzy^F \\ & & Pz^F & Py^F \end{bmatrix}
\vdash
$$

$$
\begin{bmatrix} & \boxed{Qaa^T} & Ra^F & Ra^T \\ \boxed{Pa^T} & Pa^F & Qaa^F & Qaa^F \\ & & Pa^F & Pa^F \end{bmatrix}
\vdash
\begin{bmatrix} & \boxed{Qaa^T} & \boxed{Ra^F} & Ra^T \\ \boxed{Pa^T} & Pa^F & Qaa^F & Qaa^F \\ & & Pa^F & Pa^F \end{bmatrix}
\sim^4
$$

$$
\begin{bmatrix} & Qaa^T & Ra^F & Ra^T \\ Pa^T & Pa^F & Qaa^F & Qaa^F \\ & & Pa^F & Pa^F \end{bmatrix}
$$