Inferenzmethoden

Einheit 9

Reduktions- und Optimierungstechniken

1. Klausel- und Literalreduktionen
2. Ein lineares Verfahren für Hornklauseln
3. Lemmata

Reduktionen

- **Transformation in "kleineres" Problem**
  - Weniger Klauseln, Literale, oder Pfade
  - Große Effizienzsteigerungen, da Gültigkeitsproblem co-NP-vollständig

Reduktionen

- **Transformation in “kleineres” Problem**
  - Weniger Klauseln, Literale, oder Pfade
  - Große Effizienzsteigerungen, da Gültigkeitsproblem co-NP-vollständig
- **Notwendiges Kriterium: gültigkeitserhaltend**
  - Gültigkeit des reduzierten Problems impliziert die des Ausgangsproblems
    - Immer erfüllt bei Entfernung ganzer Klauseln
  - Umkehrung erwünscht aber nicht notwendig $\mapsto$ “Modellerhaltend”
    - Immer erfüllt bei Entfernung einzelner Literale

Reduktionen

- **Transformation in "kleineres" Problem**
  - Weniger Klauseln, Literale, oder Pfade
  - Große Effizienzsteigerungen, da Gültigkeitsproblem co-NP-vollständig
- **Notwendiges Kriterium: gültigkeitserhaltend**
  - Gültigkeit des reduzierten Problems impliziert die des Ausgangsproblems
    - Immer erfüllt bei Entfernung ganzer Klauseln
  - Umkehrung erwünscht aber nicht notwendig $\mapsto$ "Modellerhaltend"
    - Immer erfüllt bei Entfernung einzelner Literale
- **Wichtiges Kriterium: Effizienz**
  - Schneller Test auf Anwendbarkeit
  - Schnelle Ausführung im Vergleich zu eigentlichem Beweisverfahren

Reduktionen

- **Transformation in "kleineres" Problem**
  - Weniger Klauseln, Literale, oder Pfade
  - Große Effizienzsteigerungen, da Gültigkeitsproblem co-NP-vollständig
- **Notwendiges Kriterium: gültigkeitserhaltend**
  - Gültigkeit des reduzierten Problems impliziert die des Ausgangsproblems
    - Immer erfüllt bei Entfernung ganzer Klauseln
  - Umkehrung erwünscht aber nicht notwendig $\mapsto$ "Modellerhaltend"
    - Immer erfüllt bei Entfernung einzelner Literale
- **Wichtiges Kriterium: Effizienz**
  - Schneller Test auf Anwendbarkeit
  - Schnelle Ausführung im Vergleich zu eigentlichem Beweisverfahren
- **Anwendung statisch oder dynamisch**
  - Statisch: Vorverarbeitung der Matrix
  - Dynamisch: Integration in laufenden Beweisprozeß

MULT-Reduktion

Eliminiere mehrfaches Vorkommen von Literalen in einer Klausel

$$\left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ P & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ P & \\ \vdots & \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{MULT}} \left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ P & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ \vdots & \\ & \end{array}\right]$$

MULT-Reduktion

Eliminiere mehrfaches Vorkommen von Literalen in einer Klausel

$$\begin{bmatrix} \vdots & \\ P & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ P & \\ \vdots & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{MULT}} \begin{bmatrix} \vdots & \\ P & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ \vdots & \\ & \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um ein Literal kleiner**

MULT-Reduktion

Eliminiere mehrfaches Vorkommen von Literalen in einer Klausel

$$\begin{bmatrix} \vdots & \\ P & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ P & \\ \vdots & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{MULT}} \begin{bmatrix} \vdots & \\ P & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ \vdots & \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um ein Literal kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  – Pfade durch erste und zweite Kopie des Literals sind identisch
  – Anwendbarkeitstest quadratisch in Anzahl der Literale in der Matrix
  – Ausführung in konstanter Zeit

MULT-Reduktion

Eliminiere mehrfaches Vorkommen von Literalen in einer Klausel

$$\left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ P & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ P & \\ \vdots & \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{MULT}} \left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ P & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ \vdots & \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ Pcx^T & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ Pyc^T & \\ \vdots & \end{array}\right]_{[]} \vdash_{\mathsf{MULT}} \left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ Pcc^T & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ \vdots & \end{array}\right]_{[c/x,\,c/y]}$$

- **Matrix wird um ein Literal kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Pfade durch erste und zweite Kopie des Literals sind identisch
  - Anwendbarkeitstest quadratisch in Anzahl der Literale in der Matrix
  - Ausführung in konstanter Zeit
- **Prädikatenlogische Erweiterung dynamisch möglich**
  - Literale müssen unifizierbar unter σ sein
  - MULT erzeugt eventuell weitere Alternativen im Beweis (Rücksetzung!)
  - Nur noch gültigkeitserhaltend (wähle $\mathcal{M} = \{\{Pcd^F, Pdc^F\}\}$)

PURE-Reduktion

Eliminiere Klauseln mit unkonnektierten Literalen

$$\begin{bmatrix} L_1 & L'_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ & \vdots & \mathcal{M} \\ L_k & \vdots & \\ \vdots & L'_j & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} L'_1 & \\ \vdots & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ \vdots & \\ L'_j & \end{bmatrix}$$

PURE-Reduktion

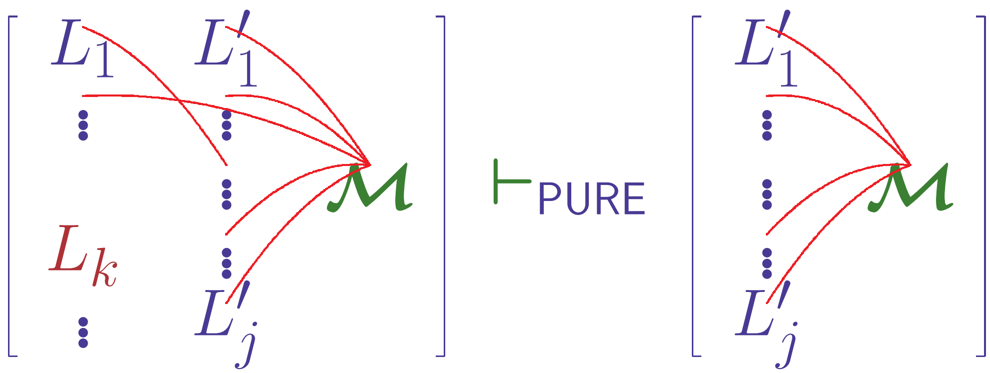
Eliminiere Klauseln mit unkonnektierten Literalen

$$\begin{bmatrix} L_1 & L'_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ & \vdots & \mathcal{M} \\ L_k & \vdots & \\ \vdots & L'_j & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} L'_1 & \\ \vdots & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ \vdots & \\ L'_j & \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**

PURE-REDUKTION

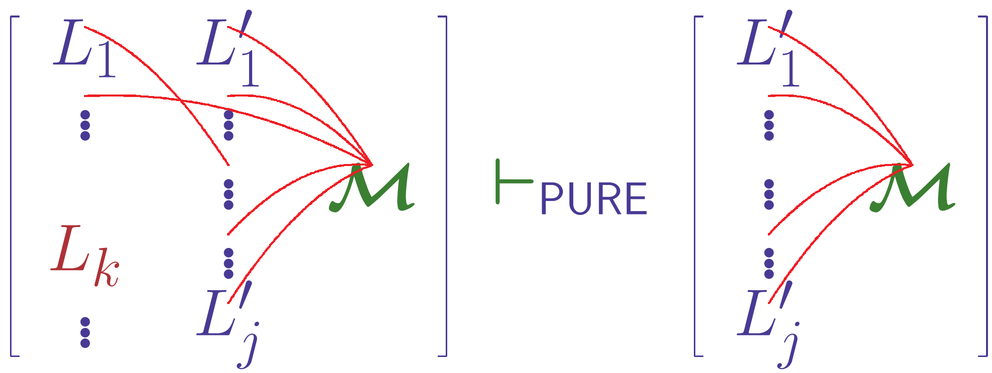
Eliminiere Klauseln mit unkonnektierten Literalen



- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Pfade durch Restmatrix sind “identisch” mit Pfaden durch das unkonnektierte Literal in der Originalmatrix
  - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell

PURE-Reduktion

Eliminiere Klauseln mit unkonnektierten Literalen



- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Pfade durch Restmatrix sind “identisch” mit Pfaden durch das unkonnektierte Literal in der Originalmatrix
  - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell
- **Prädikatenlogische Erweiterung dynamisch möglich**
  - Literale dürfen nicht unifizierbar unter σ sein

TAUT-Reduktion

Eliminiere tautologische (selbstkomplementäre) Klauseln

$$\left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ P^{T} & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ P^{F} & \\ \vdots & \end{array}\right] \quad \vdash_{\mathsf{TAUT}} \quad \left[\begin{array}{c} \mathcal{M} \end{array}\right]$$

TAUT-Reduktion

Eliminiere tautologische (selbstkomplementäre) Klauseln

$$\begin{bmatrix} \vdots & \\ P^T & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ P^F & \\ \vdots & \end{bmatrix} \quad \vdash_{\mathsf{TAUT}} \quad \begin{bmatrix} \\ \mathcal{M} \\ \\ \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**

TAUT-Reduktion

Eliminiere tautologische (selbstkomplementäre) Klauseln

$$\left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ P^T & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ P^F & \\ \vdots & \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{TAUT}} \left[\begin{array}{c} \mathcal{M} \end{array}\right]$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Komplementarität der Pfade durch $\mathcal{M}$ kann nicht von P abhängen
  - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell

TAUT-Reduktion

Eliminiere tautologische (selbstkomplementäre) Klauseln

$$\begin{bmatrix} \vdots & \\ P^T & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ P^F & \\ \vdots & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{TAUT}} \begin{bmatrix} \mathcal{M} \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Komplementarität der Pfade durch $\mathcal{M}$ kann nicht von P abhängen
  - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell
- **Prädikatenlogische Erweiterung dynamisch möglich**
  - Analoge Bedingungen und Effekte wie bei MULT-Reduktion

SUBS-Reduktion

Eliminiere Klauseln, die von anderen "subsumiert" werden

$$\begin{bmatrix} P & P & \\ \vdots & \vdots & \\ Q & Q & \mathcal{M} \\ K & & \\ \vdots & & \\ L & & \end{bmatrix} \quad \vdash_{\mathsf{SUBS}} \quad \begin{bmatrix} P & \\ \vdots & \\ Q & \mathcal{M} \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

SUBS-Reduktion

Eliminiere Klauseln, die von anderen “subsumiert” werden

$$\begin{bmatrix} P & P & \\ \vdots & \vdots & \\ Q & Q & \mathcal{M} \\ K & & \\ \vdots & & \\ L & & \end{bmatrix} \quad \vdash_{\mathsf{SUBS}} \quad \begin{bmatrix} P & \\ \vdots & \\ Q & \mathcal{M} \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**

SUBS-Reduktion

Eliminiere Klauseln, die von anderen "subsumiert" werden

$$\begin{bmatrix} P & P & \\ \vdots & \vdots & \\ Q & Q & \mathcal{M} \\ K & & \\ \vdots & & \\ L & & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{SUBS}} \begin{bmatrix} P & \\ \vdots & \\ Q & \mathcal{M} \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Komplementarität der Pfade durch Restmatrix kann nicht von den Literalen $K ... L$ abhängen
  - Anwendbarkeitstest aufwendiger als bisher, Ausführung sehr schnell

SUBS-Reduktion

Eliminiere Klauseln, die von anderen "subsumiert" werden

$$\left[\begin{array}{ccc} P & P & \\ \vdots & \vdots & \\ Q & Q & \mathcal{M} \\ K & & \\ \vdots & & \\ L & & \end{array}\right] \quad \vdash_{\mathsf{SUBS}} \quad \left[\begin{array}{cc} P & \\ \vdots & \\ Q & \mathcal{M} \\ & \\ & \\ & \end{array}\right]$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Komplementarität der Pfade durch Restmatrix kann nicht von den Literalen $K...L$ abhängen
  - Anwendbarkeitstest aufwendiger als bisher, Ausführung sehr schnell
- **Prädikatenlogische Erweiterung aufwendig**
  - Bedingungen und Effekte ähnlich wie bei MULT-Reduktion

UNIT-Reduktion

Eliminiere Literale, die komplementär zu einer Einerklausel sind

$$\left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ P^T & P^F & \mathcal{M} \\ \vdots & & \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{UNIT}} \left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \vdots & P^F & \mathcal{M} \end{array}\right]$$

UNIT-Reduktion

Eliminiere Literale, die komplementär zu einer Einerklausel sind

$$\left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ P^T & P^F & \mathcal{M} \\ \vdots & & \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{UNIT}} \left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \vdots & P^F & \mathcal{M} \end{array}\right]$$

- **Matrix wird um ein Literal kleiner**

UNIT-Reduktion

Eliminiere Literale, die komplementär zu einer Einerklausel sind

$$\left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ P^T & P^F & \mathcal{M} \\ \vdots & & \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{UNIT}} \left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \vdots & P^F & \mathcal{M} \\ & & \end{array}\right]$$

- **Matrix wird um ein Literal kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  – Pfade durch reduzierte Matrix sind identisch mit Pfaden durch die nicht mit P^F konnektierten Literale in der Originalmatrix
  – Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell

UNIT-Reduktion

Eliminiere Literale, die komplementär zu einer Einerklausel sind

$$\begin{bmatrix} \vdots & & \\ P^T & P^F & \mathcal{M} \\ \vdots & & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} \vdots & & \\ \vdots & P^F & \mathcal{M} \\ & & \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um ein Literal kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Pfade durch reduzierte Matrix sind identisch mit Pfaden durch die nicht mit P^F konnektierten Literale in der Originalmatrix
  - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell
- **Prädikatenlogische Erweiterung analog zu MULT**

ISOL-Reduktion

Ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch Resolvente

$$\left[\begin{array}{ccc} P^T & P^F & \\ K & K' & \mathcal{M} \\ \vdots & \vdots & \\ L & L' & \end{array}\right] \quad \vdash_{\mathsf{ISOL}} \quad \left[\begin{array}{cc} K & \\ \vdots & \\ L & \mathcal{M} \\ K' & \\ \vdots & \\ L' & \end{array}\right]$$

(P^T und P^F kommen nicht in $\mathcal{M}$ vor)

ISOL-Reduktion

Ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch Resolvente

$$\left[\begin{array}{ccc} P^T & P^F & \\ K & K' & \mathcal{M} \\ \vdots & \vdots & \\ L & L' & \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{ISOL}} \left[\begin{array}{cc} K & \\ \vdots & \\ L & \mathcal{M} \\ K' & \\ \vdots & \\ L' & \end{array}\right]$$

(P^T und P^F kommen nicht in $\mathcal{M}$ vor)

- **Matrix wird um zwei Literale kleiner**

ISOL-Reduktion

Ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch Resolvente

$$\begin{bmatrix} & & \\ P^T & P^F & \\ K & K' & \mathcal{M} \\ \vdots & \vdots & \\ L & L' & \\ & & \end{bmatrix} \quad \vdash_{\mathsf{ISOL}} \quad \begin{bmatrix} K & \\ \vdots & \\ L & \mathcal{M} \\ K' & \\ \vdots & \\ L' & \end{bmatrix}$$

(P^T und P^F kommen nicht in $\mathcal{M}$ vor)

- **Matrix wird um zwei Literale kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Pfade durch reduzierte Matrix sind identisch mit Pfaden durch P^F und eines der K...L oder P^T und eines der K'...L'
  - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell

ISOL-Reduktion

Ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch Resolvente

$$\left[\begin{array}{ccc} P^T & P^F & \\ K & K' & \mathcal{M} \\ \vdots & \vdots & \\ L & L' & \end{array}\right] \quad \vdash_{\mathsf{ISOL}} \quad \left[\begin{array}{cc} K & \\ \vdots & \\ L & \mathcal{M} \\ K' & \\ \vdots & \\ L' & \end{array}\right]$$

(P^T und P^F kommen nicht in $\mathcal{M}$ vor)

- **Matrix wird um zwei Literale kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Pfade durch reduzierte Matrix sind identisch mit Pfaden durch P^F und eines der $K...L$ oder P^T und eines der $K'...L'$
  - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell
- **Prädikatenlogische Erweiterung analog zu MULT**

Lineares Beweisverfahren für Hornklauseln

Jede gültige Horn-Matrix hat mindestens eine negative Einerklausel

(Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative Klausel)

Lineares Beweisverfahren für Hornklauseln

Jede gültige Horn-Matrix hat mindestens eine negative Einerklausel

(Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative Klausel)

1. Existiert keine negative Einerklausel, so ist F ungültig

Lineares Beweisverfahren für Hornklauseln

Jede gültige Horn-Matrix hat mindestens eine negative Einerklausel

(Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative Klausel)

1. Existiert keine negative Einerklausel, so ist F ungültig

2. Wähle eine rein negative Einerklausel $\{P^F\}$

Lineares Beweisverfahren für Hornklauseln

Jede gültige Horn-Matrix hat mindestens eine negative Einerklausel

(Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative Klausel)

1. **Existiert keine negative Einerklausel, so ist F ungültig**
2. **Wähle eine rein negative Einerklausel $\{P^F\}$**
3. **Mit UNIT eliminiere jedes Vorkommen von P^T**
   Entsteht dadurch eine leere Klausel, so ist F gültig

Lineares Beweisverfahren für Hornklauseln

Jede gültige Horn-Matrix hat mindestens eine negative Einerklausel

(Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative Klausel)

1. **Existiert keine negative Einerklausel, so ist F ungültig**
2. **Wähle eine rein negative Einerklausel $\{P^F\}$**
3. **Mit UNIT eliminiere jedes Vorkommen von P^T**
   Entsteht dadurch eine leere Klausel, so ist F gültig
4. **Mit SUBS eliminiere alle anderen Klauseln, die P^F enthalten**

Lineares Beweisverfahren für Hornklauseln

Jede gültige Horn-Matrix hat mindestens eine negative Einerklausel

(Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative Klausel)

1. **Existiert keine negative Einerklausel, so ist F ungültig**
2. **Wähle eine rein negative Einerklausel $\{P^F\}$**
3. **Mit UNIT eliminiere jedes Vorkommen von P^T**
   Entsteht dadurch eine leere Klausel, so ist F gültig
4. **Mit SUBS eliminiere alle anderen Klauseln, die P^F enthalten**
5. **Mit PURE eliminiere die Einerklausel**

Lineares Beweisverfahren für Hornklauseln

Jede gültige Horn-Matrix hat mindestens eine negative Einerklausel
(Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative Klausel)

1. **Existiert keine negative Einerklausel, so ist F ungültig**
2. **Wähle eine rein negative Einerklausel $\{P^F\}$**
3. **Mit UNIT eliminiere jedes Vorkommen von P^T**
   Entsteht dadurch eine leere Klausel, so ist F gültig
4. **Mit SUBS eliminiere alle anderen Klauseln, die P^F enthalten**
5. **Mit PURE eliminiere die Einerklausel**
6. **Wenn noch Klauseln übrig sind, gehe zurück nach 1**

Beweis für $P \wedge Q \ \vee\ \neg P \wedge Q \wedge R \ \vee\ \neg Q \wedge R \ \vee\ \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \;\vee\; \neg P \wedge Q \wedge R \;\vee\; \neg Q \wedge R \;\vee\; \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \uparrow \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \uparrow \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \land Q \lor \neg P \land Q \land R \lor \neg Q \land R \lor \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \\ & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \\ & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \\ & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \\ & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \\ & & \uparrow \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \;\vee\; \neg P \wedge Q \wedge R \;\vee\; \neg Q \wedge R \;\vee\; \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \uparrow \end{bmatrix} \quad \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & & \\ & & \uparrow \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \;\vee\; \neg P \wedge Q \wedge R \;\vee\; \neg Q \wedge R \;\vee\; \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \\ & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \\ & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \\ & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & & \\ & & \\ & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^F \\ P^T & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \;\vee\; \neg P \wedge Q \wedge R \;\vee\; \neg Q \wedge R \;\vee\; \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \\ & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \\ & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \\ & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^F & Q^F \\ P^T & & \\ & & \\ & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^F \\ P^T & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^F \\ P^T & \\ & \\ & \uparrow \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \;\vee\; \neg P \wedge Q \wedge R \;\vee\; \neg Q \wedge R \;\vee\; \neg R$

$$\left[\begin{array}{cccc} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \\ & & & \uparrow \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{UNIT}} \left[\begin{array}{cccc} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \\ & & & \uparrow \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{PURE}} \left[\begin{array}{ccc} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \\ & & \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} & P^F & Q^F \\ P^T & Q^T & \\ Q^T & & \\ & & \uparrow \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{UNIT}} \left[\begin{array}{ccc} & P^F & Q^F \\ P^T & & \\ & & \\ & & \uparrow \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{PURE}} \left[\begin{array}{cc} & P^F \\ P^T & \\ & \\ & \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} & P^F \\ P^T & \\ & \\ & \uparrow \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{UNIT}} \left[\begin{array}{cc} & P^F \\ \boxed{\square} & \\ & \\ & \uparrow \end{array}\right]$$

FACTOR-Reduktion

Gleiche Literale in verschiedenen Klauseln werden ausfaktorisiert

$$\begin{bmatrix} K & K' & \\ \vdots & \vdots & \mathcal{M} \\ L & L' & \\ P & P & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K & K' \\ \vdots & \vdots \\ L & L' \end{bmatrix} & \mathcal{M} \\ P & \end{bmatrix}$$

FACTOR-Reduktion

Gleiche Literale in verschiedenen Klauseln werden ausfaktorisiert

$$\begin{bmatrix} K & K' & \\ \vdots & \vdots & \mathcal{M} \\ L & L' & \\ P & P & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K & K' \\ \vdots & \vdots \\ L & L' \end{bmatrix} & \mathcal{M} \\ P & \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um viele Pfade kleiner**
  - Faktorisierung erzeugt Nicht-Normalform-Matrizen

FACTOR-Reduktion

Gleiche Literale in verschiedenen Klauseln werden ausfaktorisiert

$$\begin{bmatrix} K & K' & \\ \vdots & \vdots & \mathcal{M} \\ L & L' & \\ P & P & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K & K' \\ \vdots & \vdots \\ L & L' \end{bmatrix} & \mathcal{M} \\ P & \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um viele Pfade kleiner**
  - Faktorisierung erzeugt Nicht-Normalform-Matrizen
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  - Komplementarität von Pfaden, die durch P und eines der $K..L, K'..L'$ gehen, hängt nicht von diesen Literalen ab
  - Pfade durch reduzierte Matrix “sind” Pfade in der Originalmatrix
  - Anwendbarkeitstest und Ausführung schnell

FACTOR-Reduktion

Gleiche Literale in verschiedenen Klauseln werden ausfaktorisiert

$$\begin{bmatrix} K & K' & \\ \vdots & \vdots & \mathcal{M} \\ L & L' & \\ P & P & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K & K' \\ \vdots & \vdots \\ L & L' \end{bmatrix} & \mathcal{M} \\ P & \end{bmatrix}$$

- **Matrix wird um viele Pfade kleiner**
  – Faktorisierung erzeugt Nicht-Normalform-Matrizen
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
  – Komplementarität von Pfaden, die durch P und eines der $K..L, K'..L'$ gehen, hängt nicht von diesen Literalen ab
  – Pfade durch reduzierte Matrix "sind" Pfade in der Originalmatrix
  – Anwendbarkeitstest und Ausführung schnell
- **Prädikatenlogische Erweiterung sehr aufwendig**

Faktorisierung einer vollständigen Matrix

$$\begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F & Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \\ R^T & R^T & R^T & R^T & R^F & R^F & R^F & R^F \end{bmatrix}$$

Faktorisierung einer vollständigen Matrix

$$\begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F & Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \\ R^T & R^T & R^T & R^T & R^F & R^F & R^F & R^F \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\mathsf{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \end{bmatrix} \\ R^T & R^F \end{bmatrix}$$

Faktorisierung einer vollständigen Matrix

$$\begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F & Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \\ R^T & R^T & R^T & R^T & R^F & R^F & R^F & R^F \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\mathsf{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \end{bmatrix} \\ R^T & R^F \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\mathsf{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [P^T\ P^F] & [P^T\ P^F] \\ Q^T & Q^F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [P^T\ P^F] & [P^T\ P^F] \\ Q^T & Q^F \end{bmatrix} \\ R^T & R^F \end{bmatrix}$$

Faktorisierung einer vollständigen Matrix

$$\begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F & Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \\ R^T & R^T & R^T & R^T & R^F & R^F & R^F & R^F \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\mathsf{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \end{bmatrix} \\ R^T & R^F \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\mathsf{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [P^T\ P^F] & [P^T\ P^F] \\ Q^T & Q^F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [P^T\ P^F] & [P^T\ P^F] \\ Q^T & Q^F \end{bmatrix} \\ R^T & R^F \end{bmatrix}$$

Anzahl der Pfade sinkt von 6561 (3^8) **auf 25** $((2^2+1) * (2^2+1))$

Lemmata

Verkürzung von Beweisen durch Strukturierung

Lemmata

Verkürzung von Beweisen durch Strukturierung

- **Standardtechnik der Mathematik**
  - Generische Hilfsbehauptung wird separat beweisen und dann angewandt
  - Entspricht Anwendung der Schnittregel in Sequenzenbeweisen
  - Superexponentielle Verkürzung der Beweislänge möglich

Lemmata

Verkürzung von Beweisen durch Strukturierung

- **Standardtechnik der Mathematik**
  - Generische Hilfsbehauptung wird separat beweisen und dann angewandt
  - Entspricht Anwendung der Schnittregel in Sequenzenbeweisen
  - Superexponentielle Verkürzung der Beweislänge möglich
- $\boldsymbol{(P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q) \wedge R \;\vee\; (S \vee T \vee \neg S \wedge \neg T) \wedge \neg R}$
  - Aussage $P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ erscheint in 2 Varianten
  - Lemma wäre $\forall P, Q.\ P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ (höhere Ordnung)
  - First-Order Realisierung: Ausfaktorisieren der gemeinsamen Teilformel: $(P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q) \;\wedge\; (R \vee \neg R)$

Verkürzung von Beweisen durch Strukturierung

- **Standardtechnik der Mathematik**
  - Generische Hilfsbehauptung wird separat beweisen und dann angewandt
  - Entspricht Anwendung der Schnittregel in Sequenzenbeweisen
  - Superexponentielle Verkürzung der Beweislänge möglich
- $\boldsymbol{(P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q) \wedge R \;\vee\; (S \vee T \vee \neg S \wedge \neg T) \wedge \neg R}$
  - Aussage $P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ erscheint in 2 Varianten
  - Lemma wäre $\forall P, Q.\ P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ (höhere Ordnung)
  - First-Order Realisierung: Ausfaktorisieren der gemeinsamen Teilformel: $(P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q) \;\wedge\; (R \vee \neg R)$
- **Problem: Identifikation relevanter Lemmata**
  - Automatisches Erkennen gleichartiger Teilformeln
  - Ohne Benutzerführung bisher nicht zufriedenstellend gelöst

Reduktionen im Überblick

MULT: eliminiere mehrfaches Vorkommen eines Literals in einer Klausel

PURE: eliminiere Klauseln mit Literalen, die nicht konnektiert sind

TAUT: eliminiere tautologische Klauseln

SUBS: eliminiere Klauseln, die von anderen subsumiert werden

UNIT: eliminiere Literale, die komplementär zu einer Einerklausel sind

ISOL: ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch die Resolvente

FACTOR: faktorisiere gleiche Literale in verschiedenen Klauseln aus

LEMMA: faktorisiere gleichartige Teilmatrizen aus

Reduktionen im Überblick

MULT: eliminiere mehrfaches Vorkommen eines Literals in einer Klausel

PURE: eliminiere Klauseln mit Literalen, die nicht konnektiert sind

TAUT: eliminiere tautologische Klauseln

SUBS: eliminiere Klauseln, die von anderen subsumiert werden

UNIT: eliminiere Literale, die komplementär zu einer Einerklausel sind

ISOL: ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch die Resolvente

FACTOR: faktorisiere gleiche Literale in verschiedenen Klauseln aus

LEMMA: faktorisiere gleichartige Teilmatrizen aus

MONOT: entferne eine Klauselmenge, wenn die Restmatrix noch eine Untermenge von ihr enthält

CIRC: eliminiere tautologische Zyklen (sehr subtile Details)

Reduktionen im Überblick

- **MULT**: eliminiere mehrfaches Vorkommen eines Literals in einer Klausel
- **PURE**: eliminiere Klauseln mit Literalen, die nicht konnektiert sind
- **TAUT**: eliminiere tautologische Klauseln
- **SUBS**: eliminiere Klauseln, die von anderen subsumiert werden
- **UNIT**: eliminiere Literale, die komplementär zu einer Einerklausel sind
- **ISOL**: ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch die Resolvente
- **FACTOR**: faktorisiere gleiche Literale in verschiedenen Klauseln aus
- **LEMMA**: faktorisiere gleichartige Teilmatrizen aus
- **MONOT**: entferne eine Klauselmenge, wenn die Restmatrix noch eine Untermenge von ihr enthält
- **CIRC**: eliminiere tautologische Zyklen (sehr subtile Details)
- **POLYN**: prüfe Anwendbarkeit polynomieller Verfahren für spezielle Formelklassen