

Inferenzmethoden

Einheit 9

Reduktions- und Optimierungstechniken



1. Klausel- und Literalreduktionen
2. Ein lineares Verfahren für Hornklauseln
3. Lemmata

REDUKTIONEN

- **Transformation in “kleineres” Problem**
 - Weniger Klauseln, Literale, oder Pfade
 - Große Effizienzsteigerungen, da Gültigkeitsproblem **co-NP**-vollständig
- **Notwendiges Kriterium: gültigkeitserhaltend**
 - Gültigkeit des reduzierten Problems impliziert die des Ausgangsproblems
 - Immer erfüllt bei Entfernung ganzer Klauseln
 - Umkehrung erwünscht aber nicht notwendig \mapsto “Modellerhaltend”
 - Immer erfüllt bei Entfernung einzelner Literale
- **Wichtiges Kriterium: Effizienz**
 - Schneller Test auf Anwendbarkeit
 - Schnelle Ausführung im Vergleich zu eigentlichem Beweisverfahren
- **Anwendung statisch oder dynamisch**
 - Statisch: Vorverarbeitung der Matrix
 - Dynamisch: Integration in laufenden Beweisprozeß

MULT-REDUKTION

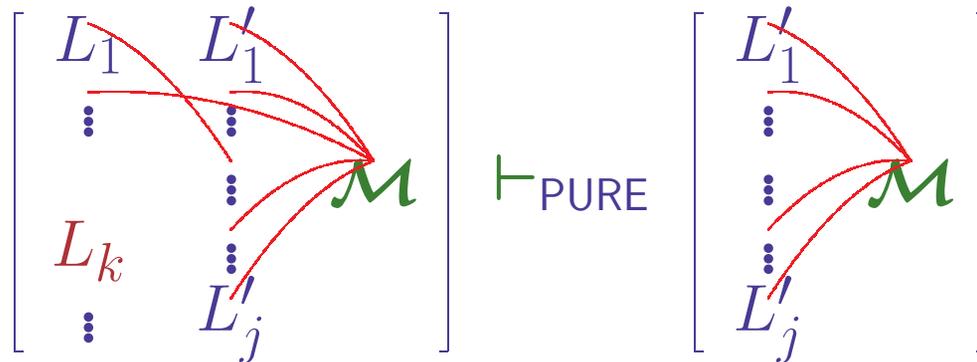
Eliminiere mehrfaches Vorkommen von Literalen in einer Klausel

$$\begin{array}{c} \vdots \\ P \\ \vdots \\ P \\ \vdots \end{array} \mathcal{M} \vdash_{\text{MULT}} \begin{array}{c} \vdots \\ P \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathcal{M} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ Pcx^T \\ \vdots \\ Pyc^T \\ \vdots \end{array} \mathcal{M} \vdash_{\text{MULT}} \begin{array}{c} \vdots \\ Pcc^T \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathcal{M} \quad [c/x, c/y]$$

- Matrix wird um ein Literal kleiner
- Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik
 - Pfade durch erste und zweite Kopie des Literals sind identisch
 - Anwendbarkeitstest quadratisch in Anzahl der Literale in der Matrix
 - Ausführung in konstanter Zeit
- Prädikatenlogische Erweiterung dynamisch möglich
 - Literale müssen unifizierbar unter σ sein
 - MULT erzeugt eventuell weitere Alternativen im Beweis (Rücksetzung!)
 - Nur noch gültigkeitserhaltend (wähle $\mathcal{M} = \{\{Pcd^F, Pdc^F\}\}$)

PURE-REDUKTION

Eliminiere Klauseln mit unkonnectierten Literalen



- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
 - Pfade durch Restmatrix sind “identisch” mit Pfaden durch das unkonnectierte Literal in der Originalmatrix
 - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell
- **Prädikatenlogische Erweiterung dynamisch möglich**
 - Literale dürfen nicht unifizierbar unter σ sein

TAUT-REDUKTION

Eliminiere tautologische (selbstkomplementäre) Klauseln

$$\left[\begin{array}{c} \vdots \\ P^T \\ \vdots \\ P^F \\ \vdots \end{array} \right] \mathcal{M} \vdash_{\text{TAUT}} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \mathcal{M}$$

- Matrix wird um eine Klausel kleiner
- Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik
 - Komplementarität der Pfade durch \mathcal{M} kann nicht von P abhängen
 - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell
- Prädikatenlogische Erweiterung dynamisch möglich
 - Analoge Bedingungen und Effekte wie bei MULT-Reduktion

SUBS-REDUKTION

Eliminiere Klauseln, die von anderen “subsumiert” werden

$$\left[\begin{array}{cc} P & P \\ \vdots & \vdots \\ Q & Q \\ K & \\ \vdots & \\ L & \end{array} \right] \quad \vdash_{\text{SUBS}} \quad \left[\begin{array}{cc} P & \\ \vdots & \\ Q & \\ & \mathcal{M} \end{array} \right]$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
 - Komplementarität der Pfade durch Restmatrix kann nicht von den Literalen $K\dots L$ abhängen
 - Anwendbarkeitstest aufwendiger als bisher, Ausführung sehr schnell
- **Prädikatenlogische Erweiterung aufwendig**
 - Bedingungen und Effekte ähnlich wie bei MULT-Reduktion

UNIT-REDUKTION

Eliminiere Literale, die komplementär zu einer Einerklausel sind

$$\left[\begin{array}{c} \vdots \\ P^T \quad P^F \\ \vdots \end{array} \mathcal{M} \right] \vdash_{\text{UNIT}} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ P^F \\ \vdots \end{array} \mathcal{M} \right]$$

- Matrix wird um ein Literal kleiner
- Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik
 - Pfade durch reduzierte Matrix sind identisch mit Pfaden durch die nicht mit P^F konnektierten Literale in der Originalmatrix
 - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell
- Prädikatenlogische Erweiterung analog zu MULT

ISOL-REDUKTION

Ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch Resolvente

$$\left[\begin{array}{cc} P^T & P^F \\ K & K' \\ \vdots & \vdots \\ L & L' \end{array} \right] \mathcal{M} \quad \vdash_{\text{ISOL}} \quad \left[\begin{array}{c} K \\ \vdots \\ L \\ K' \\ \vdots \\ L' \end{array} \right] \mathcal{M}$$

(P^T und P^F kommen nicht in \mathcal{M} vor)

- **Matrix wird um zwei Literale kleiner**
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
 - Pfade durch reduzierte Matrix sind identisch mit Pfaden durch P^F und eines der $K...L$ oder P^T und eines der $K'...L'$
 - Anwendbarkeitstest und Ausführung sehr schnell
- **Prädikatenlogische Erweiterung analog zu MULT**

LINEARES BEWEISVERFAHREN FÜR HORNKLAUSELN

Jede gültige Horn-Matrix hat mindestens eine negative Einerklausel

(Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative Klausel)

1. Existiert **keine negative Einerklausel**, so ist F **ungültig**
2. Wähle eine **rein negative Einerklausel** $\{P^F\}$
3. Mit UNIT eliminiere jedes Vorkommen von P^T
Entsteht dadurch eine **leere Klausel**, so ist F **gültig**
4. Mit SUBS **eliminiere alle anderen Klauseln**, die P^F enthalten
5. Mit PURE **eliminiere die Einerklausel**
6. Wenn noch Klauseln übrig sind, gehe zurück nach 1

BEWEIS FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc}
 & P^F & Q^F & R^F \\
 P^T & Q^T & R^T & \\
 Q^T & R^T & & \\
 & & & \uparrow
 \end{array} \right] \vdash_{\text{UNIT}} \left[\begin{array}{cccc}
 & P^F & Q^F & R^F \\
 P^T & Q^T & & \\
 Q^T & & & \\
 & & & \uparrow
 \end{array} \right] \vdash_{\text{PURE}} \left[\begin{array}{ccc}
 & P^F & Q^F \\
 P^T & Q^T & \\
 Q^T & & \\
 & & \uparrow
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc}
 & P^F & Q^F \\
 P^T & Q^T & \\
 Q^T & & \\
 & & \uparrow
 \end{array} \right] \vdash_{\text{UNIT}} \left[\begin{array}{ccc}
 & P^F & Q^F \\
 P^T & & \\
 & & \uparrow
 \end{array} \right] \vdash_{\text{PURE}} \left[\begin{array}{c}
 P^F \\
 P^T \\
 \uparrow
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 P^F \\
 P^T \\
 \uparrow
 \end{array} \right] \vdash_{\text{UNIT}} \left[\begin{array}{c}
 P^F \\
 \square \\
 \uparrow
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

FACTOR-REDUKTION

Gleiche Literale in verschiedenen Klauseln werden ausfaktoriert

$$\left[\begin{array}{cc} K & K' \\ \vdots & \vdots \\ L & L' \\ P & P \end{array} \mathcal{M} \right] \vdash_{\text{FACTOR}} \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} K & K' \\ \vdots & \vdots \\ L & L' \end{array} \right] & \\ P & \mathcal{M} \end{array} \right]$$

- **Matrix wird um viele Pfade kleiner**
 - Faktorisierung erzeugt Nicht-Normalform-Matrizen
- **Modellerhaltend & statisch in der Aussagenlogik**
 - Komplementarität von Pfaden, die durch P und eines der $K..L, K'..L'$ gehen, hängt nicht von diesen Literalen ab
 - Pfade durch reduzierte Matrix “sind” Pfade in der Originalmatrix
 - Anwendbarkeitstest und Ausführung schnell
- **Prädikatenlogische Erweiterung sehr aufwendig**

FAKTORISIERUNG EINER VOLLSTÄNDIGEN MATRIX

$$\begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F & Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \\ R^T & R^T & R^T & R^T & R^F & R^F & R^F & R^F \end{bmatrix}$$

$$\vdash \text{FACTOR} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \end{bmatrix} \\ R^T & R^F \end{bmatrix}$$

$$\vdash \text{FACTOR} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [P^T \ P^F] & [P^T \ P^F] \\ Q^T & Q^F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [P^T \ P^F] & [P^T \ P^F] \\ Q^T & Q^F \end{bmatrix} \\ R^T & R^F \end{bmatrix}$$

Anzahl der Pfade sinkt von **6561** (3^8) auf **25** ($((2^2+1) * (2^2+1))$)

Verkürzung von Beweisen durch Strukturierung

- **Standardtechnik der Mathematik**

- Generische Hilfsbehauptung wird separat bewiesen und dann angewandt
- Entspricht Anwendung der Schnittregel in Sequenzenbeweisen
- Superexponentielle Verkürzung der Beweislänge möglich

- $(P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q) \wedge R \vee (S \vee T \vee \neg S \wedge \neg T) \wedge \neg R$

- Aussage $P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ erscheint in 2 Varianten
- Lemma wäre $\forall P, Q. P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ (höhere Ordnung)
- First-Order Realisierung: Ausfaktorisieren der gemeinsamen Teilformel: $(P \vee Q \vee \neg P \wedge \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)$

- **Problem: Identifikation relevanter Lemmata**

- Automatisches Erkennen gleichartiger Teilformeln
- Ohne Benutzerführung bisher nicht zufriedenstellend gelöst

REDUKTIONEN IM ÜBERBLICK

MULT: eliminiere mehrfaches Vorkommen eines Literals in einer Klausel

PURE: eliminiere Klauseln mit Literalen, die nicht konnektiert sind

TAUT: eliminiere tautologische Klauseln

SUBS: eliminiere Klauseln, die von anderen subsumiert werden

UNIT: eliminiere Literale, die komplementär zu einer Einerklausel sind

ISOL: ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch die Resolvente

FACTOR: faktorisiere gleiche Literale in verschiedenen Klauseln aus

LEMMA: faktorisiere gleichartige Teilmatrizen aus

MONOT: entferne eine Klauselmengemenge, wenn die Restmatrix noch eine Untermengemenge von ihr enthält

CIRC: eliminiere tautologische Zyklen (sehr subtile Details)

POLYN: prüfe Anwendbarkeit polynomieller Verfahren für spezielle Formelklassen