Inferenzmethoden

Einheit 10

Spezielle Deduktionstechniken

1. Matrix-Reduktion von Prawitz
2. Davis-Putnam Verfahren
3. Clause Linking

Prawitz - Matrixreduktionsverfahren

$$\begin{bmatrix} & K_1 & L_1 \\ \mathcal{M} & \vdots & \vdots \\ & K_m & L_n \\ & P^T & P^F \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & K_1 & \\ \mathcal{M} & \vdots & \\ & K_m & \\ & & P^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & L_1 \\ \mathcal{M} & & \vdots \\ & & L_n \\ & P^T & \end{bmatrix}$$

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ und eine Menge von Konnektionen

Regel: Wähle Klausel mit einem Literal P^T und eine zweite mit P^F
Untersuche in separaten Teilmatrizen:
– Pfade, die dieses Auftreten von P^T aber nicht von P^F enthalten
– Pfade, die dieses Auftreten von P^F aber nicht von P^T enthalten

Ziel: Alle Teilmatrizen enthalten eine leere Klausel

Rechtfertigung: Die Ursprungsmatrix ist komplementär, wenn alle obengenannten Pfade (also beide Teilmatrizen) komplementär sind. Klauseln in den reduzierten Matrizen sind kleiner als zuvor, also terminiert das Verfahren bei gültigen Matrizen immer. Das Verfahren ist vollständig, aber ohne Einsatz von Reduktionen nicht effizienter als komplette Pfadsuche.

Prawitzverfahren am Beispiel

$$
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}
\longmapsto
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & P^F & & \\ P^T & Q^T & R^T & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & & Q^F & \\ P^T & & & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}
\longmapsto
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & & & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & P^F & & R^F \\ P^T & Q^T & \boxed{\square} & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & & & \\ & & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & P^F & & R^F \\ & & \boxed{\square} & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}
\longmapsto
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ \boxed{\square} & & & \\ & & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & \boxed{\square} & Q^F & R^F \\ P^T & & & \\ & & & \end{bmatrix}
$$

Erweiterbar auf Nicht-Normalform und komplementäre Teilmatrizen

Davis–Putnam Verfahren

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ und eine Menge von Konnektionen

Regeln: **Spaltung**: Wähle komplementäres Literalpaar $\{P^T, P^F\}$.

Ersetze eine Klauselmenge durch zwei reduzierte Klauselmengen

1. Klauseln, die P^T nicht enthalten, reduziert um P^F
2. Klauseln, die P^F nicht enthalten, reduziert um P^T

Reduktion: Entferne tautologische Klauseln (TAUT)

Entferne Klauseln mit nichtkonnektierten Literalen (PURE)

Entferne subsumierte Klauseln (SUBS)

Entferne Literale mit Komplementen in Einerklauseln (UNIT)

Ziel: Alle Teilmatrizen enthalten eine leere Klausel

Rechtfertigung: Die Spaltungsregel kann als Kombination der Prawitzschen Matrixreduktion mit FACTOR und PURE verstanden werden.

Davis–Putnam Verfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\mathsf{SPLIT(P)}} \quad \begin{bmatrix} P^F & Q^F & R^F \\ Q^T & R^T & \\ R^T & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ P^T & R^T & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\mathsf{UNIT}(R^F)} \quad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ Q^T & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ & & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\mathsf{UNIT}(Q^F)} \quad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ \boxed{\square} & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ \boxed{\square} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Schnellstes Verfahren für Aussagenlogik – nicht erweiterbar

Reduktion von Prädikatenlogik auf Aussagenlogik

Vorwegnahme von Unifikation und Klauselkopien

– Behandlung des Restes mit aussagenlogischen Verfahren / Reduktionen

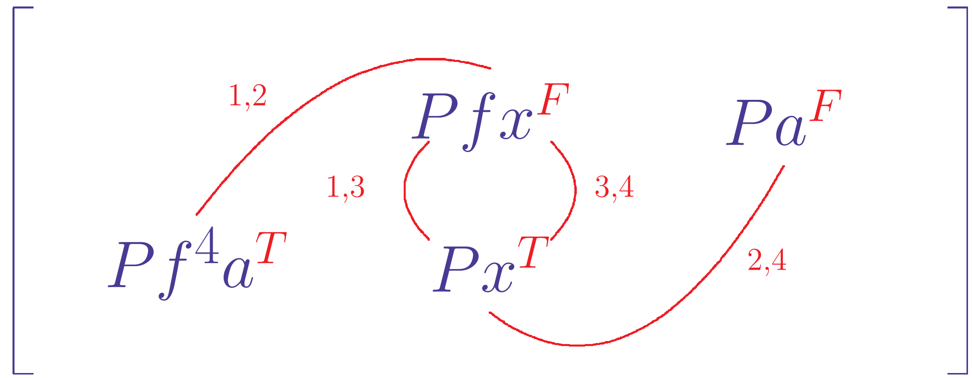
$$\left[\begin{array}{ccc} & Pfx^F & Pa^F \\ Pfa^T & Px^T & \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc} & Pfa^F & Pfx^F & Pa^F \\ Pfa^T & Pa^T & Px^T & \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc} & Pfa^F & Pfk^F & Pa^F \\ Pfa^T & Pa^T & Pk^T & \end{array}\right]$$

1. **Ergänze instantiierte Kopien aller Klauseln**
   – Bestimme Unifikator σ von Konnektionen aller Literale in c
   – Ergänze Klausel $\sigma(c)$, wobei Duplikate ignoriert werden
2. **Ersetze jede Variable durch dieselbe Konstante**
3. **Überprüfe aussagenlogische Gültigkeit der Matrix**
   – Davis-Putnam: UNIT mit Pfa^T und Pa^F führt zur leeren Klausel

Präzisierung des CLIN-Verfahrens

- **Wichtige Konzepte**
  - **Hyper-Link einer Klausel $c = \{L_1, \ldots, L_n\} \in \mathcal{M}$:**
    Menge unifizierbarer Konnektionen $\{(L_1, \overline{L_1}), \ldots, (L_n, \overline{L_n})\}$
    ($\overline{L_i} \in \mathcal{M}$ beliebig, gemeinsame Variablen umbenannt)
  - **Hyper-Link Instanz von $c = \{L_1, \ldots, L_n\}$:** Klausel $\sigma(c)$,
    wobei σ allgemeinster Unifikator des Hyperlinks $\{(L_1, \overline{L_1}), \ldots, (L_n, \overline{L_n}))\}$
  - **Ground-Set einer Matrix $\mathcal{M}$:** Matrix $\sigma(\mathcal{M})$,
    wobei $\sigma(x) = k$ für alle Variablen $x \in \mathcal{M}$ (k neue Konstante)
- **CLIN Verfahren**
  1. **Ergänze alle nichtredundanten Hyper-Link Instanzen aller Klauseln zur bisherigen Matrix**
  2. **Überprüfe den Ground Set der Matrix aussagenlogisch**
     (modifiziertes Davis-Putnam Verfahren mit Faktorisierung)
  3. **Im Erfolgsfall ist die ursprüngliche Formel gültig andernfalls fahre fort bei Schritt 1**
  - Bis zu exponentieller Geschwindigkeitsteigerung möglich
  - Sehr aufwendig im Detail (viele Klauseln werden generiert)

Hyper-Links und -Instanzen am Beispiel



Klausel	Hyper-Link Kandidat	σ	Instanz
c_1:	$\{(Pf^4a^T, Pfx^F)\}$	$[f^3a/x]$	$\{Pf^4a^T\}$
c_2 (1):	$\{(Pfx^F, Pf^4a^T), (Px^T, Pfy^F)\}$	$[f^3a/x, f^2a/y]$	$\{Pf^4a^F, Pf^3a^T\}$
c_2 (2):	$\{(Pfx^F, Pf^4a^T), (Px^T, Pa^F)\}$	—	—
c_2 (3):	$\{(Pfx^F, Py^T), (Px^T, Pfz^F)\}$	$[fz/x, f^2z/y]$	$\{Pf^2z^F, Pfz^T\}$
c_2 (4):	$\{(Pfx^F, Py^T), (Px^T, Pa^F)\}$	$[a/x, fa/y]$	$\{Pfa^F, Pa^T\}$
c_3	$\{(Pa^F, Px^T)\}$	$[a/x]$	$\{Pa^F\}$

3 neue, 2 redundante Klauseln

CLIN-Verfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & Pfx^F & Pa^F \\ Pf^4a^T & Px^T & \end{bmatrix}$$

- **Startzustand: Prüfe Ground Set der Ausgangsmatrix**

$$\begin{bmatrix} & Pfc^F & Pa^F \\ Pf^4a^T & Pc^T & \end{bmatrix}$$

Ground Set nicht tautologisch

- **Erste Iteration: Ergänze 3 Klauseln**

$$\begin{bmatrix} & \boxed{Pf^4a^F} & \boxed{Pf^2z^F} & Pfx^F & \boxed{Pfa^F} & Pa^F \\ Pf^4a^T & \boxed{Pf^3a^T} & \boxed{Pfz^T} & Px^T & \boxed{Pa^T} & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & Pf^4a^F & Pf^2c^F & Pfc^F & Pfa^F & Pa^F \\ Pf^4a^T & Pf^3a^T & Pfc^T & Pc^T & Pa^T & \end{bmatrix}$$

Ground Set nicht tautologisch

- **Zweite Iteration:: Ergänze weitere 3 Klauseln**

$$\begin{bmatrix} & Pf^4a^F & \boxed{Pf^3a^F} & \boxed{Pf^3y^F} & Pf^2z^F & Pfx^F & \boxed{Pf^2a^F} & Pfa^F & Pa^F \\ Pf^4a^T & Pf^3a^T & \boxed{Pf^2a^T} & \boxed{Pf^2y^T} & Pfz^T & Px^T & \boxed{Pfa^T} & Pa^T & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & Pf^4a^F & Pf^3a^F & Pf^3c^F & Pf^2c^F & Pfc^F & Pf^2a^F & Pfa^F & Pa^F \\ Pf^4a^T & Pf^3a^T & Pf^2a^T & Pf^2c^T & Pfc^T & Pc^T & Pfa^T & Pa^T & \end{bmatrix}$$

Tautologisch

Deduktionsverfahren im Rückblick

- **Extensionsverfahren**: Folge Konnektionen und halte als aktuellen Pfad, was noch nicht als komplentär erkannt wurde. Halte unbetrachtete Literale der beteiligten Klauseln auf dem Stack.
- **Analytische Tableaux**: andere Technik um Pfade aufzuschreiben und zu stoppen, wenn sie komplementär sind.
- **Modellelimination**: Elimination von Modellen, welche die Matrix falsifizieren könnten
- **Resolution**: leite aus zwei Klauseln mit komplementären Literalen eine Resolvente ab, die erfüllbar ist, genau dann wenn die Teilmatrix der Elternklauseln erfüllbar ist
- **Semantische Bäume**: Beginne alle Modelle aufzuschreiben und stoppe, wenn ein Modell durch eine Klausel erfüllt (widerlegt) wird.
- **Konsolution**: Notiere *alle* Pfadmengen, die durch die Vorgängerklauseln gehen und noch nicht als komplementär nachgewiesen wurden.
- **Maslov-Verfahren (Inverse Methode)**: Verarbeite Klauseln und leite dabei – beginnend mit den Konnektionen – Teilpfade ab, die alle offenen Pfade garantiert komplementär machen.
- **Prawitz-Matrixreduktion** Zerlegung in unabhängige Teilmatrizen
- **Davis Putnam**: Iterative Anwendung von Reduktionstechniken und Spaltungsregel
- **CLIN**: Reduktion von Prädikatenlogik auf Aussagenlogik über "minimalen Modellen"
- **Wahrheitstafeln**: Vollständige Überprüfung aller Alternativen