Inferenzmethoden

Einheit 11

Termersetzungssysteme

1. Motivation und Grundbegriffe
2. Knuth-Bendix Vervollständigung
3. Narrowing
4. Unifikation durch Transformation

Effiziente Verarbeitung von Gleichheiten

Effiziente Verarbeitung von Gleichheiten

- **Mechanismus zur Lösung des Wortproblems**
  - Wortproblem: Sind s und t gleich aufgrund der Axiome einer Theorie?
  - Methode: Vereinfachung der Ausdrücke bis textliche Identität erreicht
  - Hilfsmittel: Zielgerichtete Anwendung einer Menge von Gleichungen

Effiziente Verarbeitung von Gleichheiten

- **Mechanismus zur Lösung des Wortproblems**
  - Wortproblem: Sind s und t gleich aufgrund der Axiome einer Theorie?
  - Methode: Vereinfachung der Ausdrücke bis textliche Identität erreicht
  - Hilfsmittel: Zielgerichtete Anwendung einer Menge von Gleichungen
- **Gleichheiten als Vereinfachung betrachtet**
  - Gleichheiten $a = b$ erhalten Richtung $a \longrightarrow b$
  - Reduktion: Ersetzung von Teiltermen durch einfachere gleiche Terme

Effiziente Verarbeitung von Gleichheiten

- **Mechanismus zur Lösung des Wortproblems**
  - Wortproblem: Sind s und t gleich aufgrund der Axiome einer Theorie?
  - Methode: Vereinfachung der Ausdrücke bis textliche Identität erreicht
  - Hilfsmittel: Zielgerichtete Anwendung einer Menge von Gleichungen
- **Gleichheiten als Vereinfachung betrachtet**
  - Gleichheiten $a = b$ erhalten Richtung $a \longrightarrow b$
  - Reduktion: Ersetzung von Teiltermen durch einfachere gleiche Terme
- **Eigenständiges Forschungsgebiet Rewriting**
  - Eigenschaften von Systemen syntaktischer Transformationsregeln
  - Verwendet eigene, z.T. abweichende Notationen

Effiziente Verarbeitung von Gleichheiten

- **Mechanismus zur Lösung des Wortproblems**
  - Wortproblem: Sind s und t gleich aufgrund der Axiome einer Theorie?
  - Methode: Vereinfachung der Ausdrücke bis textliche Identität erreicht
  - Hilfsmittel: Zielgerichtete Anwendung einer Menge von Gleichungen
- **Gleichheiten als Vereinfachung betrachtet**
  - Gleichheiten $a = b$ erhalten Richtung $a \longrightarrow b$
  - Reduktion: Ersetzung von Teiltermen durch einfachere gleiche Terme
- **Eigenständiges Forschungsgebiet Rewriting**
  - Eigenschaften von Systemen syntaktischer Transformationsregeln
  - Verwendet eigene, z.T. abweichende Notationen
- **Vielfältige Anwendungen**
  - Integration in Theorembeweiser durch erweiterte Unifikationsalgorithmen
  - Mögliche Methode zur Implementierung von Theoriekonnektionen
  - Schlüssel für Unifikationstheorie, Logiksysteme, Berechnungsmodelle

- **Basisaxiome einer Gruppe mit Verknüpfung ·**

$e \cdot x \doteq x$	*linksseitiges Einselement*
$x \cdot e \doteq x$	*rechtsseitiges Einselement*
$\overline{y} \cdot y \doteq e$	*Linksinverses*
$(u \cdot v) \cdot w \doteq u \cdot (v \cdot w)$	*Assoziativität*

Termersetzung am Beispiel der Gruppentheorie

- **Basisaxiome einer Gruppe mit Verknüpfung $\cdot$**

$e \cdot x \doteq x$	*linksseitiges Einselement*
$x \cdot e \doteq x$	*rechtsseitiges Einselement*
$\overline{y} \cdot y \doteq e$	*Linksinverses*
$(u \cdot v) \cdot w \doteq u \cdot (v \cdot w)$	*Assoziativität*

- **Als Reduktionsregeln**

$\mathbf{r_1}$	$e \cdot x \longrightarrow x$
$\mathbf{r_2}$	$x \cdot e \longrightarrow x$
$\mathbf{r_3}$	$\overline{y} \cdot y \longrightarrow e$
$\mathbf{r_4}$	$(u \cdot v) \cdot w \longrightarrow u \cdot (v \cdot w)$

Termersetzung am Beispiel der Gruppentheorie

- **Basisaxiome einer Gruppe mit Verknüpfung $\cdot$**

$e \cdot x \doteq x$	*linksseitiges Einselement*
$x \cdot e \doteq x$	*rechtsseitiges Einselement*
$\overline{y} \cdot y \doteq e$	*Linksinverses*
$(u \cdot v) \cdot w \doteq u \cdot (v \cdot w)$	*Assoziativität*

- **Als Reduktionsregeln**

$\mathbf{r_1}$	$e \cdot x \longrightarrow x$
$\mathbf{r_2}$	$x \cdot e \longrightarrow x$
$\mathbf{r_3}$	$\overline{y} \cdot y \longrightarrow e$
$\mathbf{r_4}$	$(u \cdot v) \cdot w \longrightarrow u \cdot (v \cdot w)$

- **Anwendung von Regeln zur Beweisführung**

$$(\overline{a} \cdot a) \cdot b \doteq (e \cdot \overline{a}) \cdot (a \cdot b)$$

Termersetzung am Beispiel der Gruppentheorie

- **Basisaxiome einer Gruppe mit Verknüpfung $\cdot$**

$$e \cdot x \doteq x \qquad \textit{linksseitiges Einselement}$$

$$x \cdot e \doteq x \qquad \textit{rechtsseitiges Einselement}$$

$$\overline{y} \cdot y \doteq e \qquad \textit{Linksinverses}$$

$$(u \cdot v) \cdot w \doteq u \cdot (v \cdot w) \qquad \textit{Assoziativität}$$

- **Als Reduktionsregeln**

$$\mathbf{r_1} \qquad e \cdot x \longrightarrow x$$

$$\mathbf{r_2} \qquad x \cdot e \longrightarrow x$$

$$\mathbf{r_3} \qquad \overline{y} \cdot y \longrightarrow e$$

$$\mathbf{r_4} \qquad (u \cdot v) \cdot w \longrightarrow u \cdot (v \cdot w)$$

- **Anwendung von Regeln zur Beweisführung**

$$(\overline{a} \cdot a) \cdot b \doteq (e \cdot \overline{a}) \cdot (a \cdot b)$$

$$\xrightarrow{r_1} \quad (\overline{a} \cdot a) \cdot b \doteq \overline{a} \cdot (a \cdot b)$$

Termersetzung am Beispiel der Gruppentheorie

- **Basisaxiome einer Gruppe mit Verknüpfung $\cdot$**

$e \cdot x \doteq x$	*linksseitiges Einselement*
$x \cdot e \doteq x$	*rechtsseitiges Einselement*
$\overline{y} \cdot y \doteq e$	*Linksinverses*
$(u \cdot v) \cdot w \doteq u \cdot (v \cdot w)$	*Assoziativität*

- **Als Reduktionsregeln**

$\mathbf{r_1}$	$e \cdot x \longrightarrow x$
$\mathbf{r_2}$	$x \cdot e \longrightarrow x$
$\mathbf{r_3}$	$\overline{y} \cdot y \longrightarrow e$
$\mathbf{r_4}$	$(u \cdot v) \cdot w \longrightarrow u \cdot (v \cdot w)$

- **Anwendung von Regeln zur Beweisführung**

$$(\overline{a} \cdot a) \cdot b \doteq (e \cdot \overline{a}) \cdot (a \cdot b)$$
$$\xrightarrow{r_1} \quad (\overline{a} \cdot a) \cdot b \doteq \overline{a} \cdot (a \cdot b)$$
$$\xrightarrow{r_4} \quad \overline{a} \cdot (a \cdot b) \doteq \overline{a} \cdot (a \cdot b)$$

Rewriting: Grundbegriffe

- **Termersetzungssystem $(\mathcal{A},\mathcal{R})$**
  – $\mathcal{A}$ Alphabet, $\mathcal{R}$ Menge von Reduktionsregeln über $\mathcal{A}^*$

Rewriting: Grundbegriffe

- **Termersetzungssystem $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  - $\mathcal{A}$ Alphabet, $\mathcal{R}$ Menge von Reduktionsregeln über $\mathcal{A}^*$
- **Reduktionsregel $t \longrightarrow s$** (t, s Terme über $\mathcal{A}$)
  - t (Redex) keine Variable
  - Alle Variablen von s (Kontraktum) kommen in t vor

Rewriting: Grundbegriffe

- **Termersetzungssystem $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  - $\mathcal{A}$ Alphabet, $\mathcal{R}$ Menge von Reduktionsregeln über $\mathcal{A}^*$
- **Reduktionsregel $t \longrightarrow s$** (t, s Terme über $\mathcal{A}$)
  - t (Redex) keine Variable
  - Alle Variablen von s (Kontraktum) kommen in t vor
- **$u \xrightarrow{r} v$: Regelanwendung von $r = t \longrightarrow s$ auf u**
  - Teiltermmatching: Bestimme Substitution σ, so daß $t\sigma$ Teilterm von u
  - Ersetzung: Ersetze $t\sigma$ durch $s\sigma$

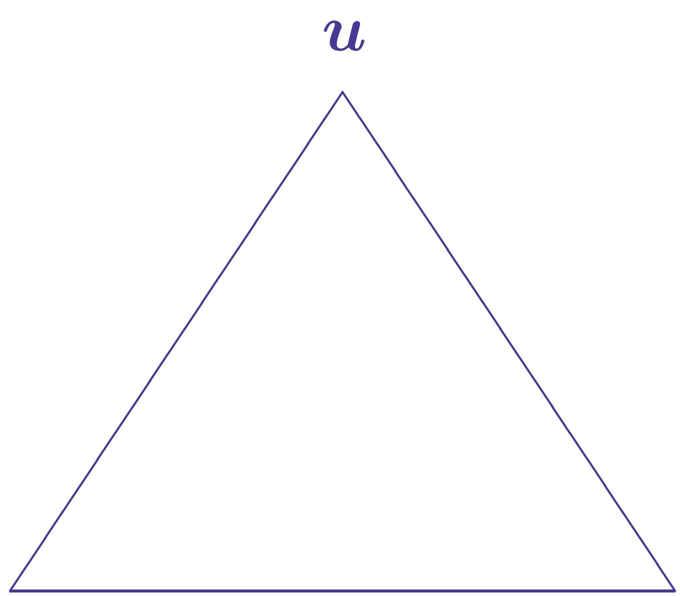
Rewriting: Grundbegriffe

- **Termersetzungssystem $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  – $\mathcal{A}$ Alphabet, $\mathcal{R}$ Menge von Reduktionsregeln über $\mathcal{A}^*$
- **Reduktionsregel $t{\longrightarrow}s$** (t, s Terme über $\mathcal{A}$)
  – t (Redex) keine Variable
  – Alle Variablen von s (Kontraktum) kommen in t vor
- **$u \xrightarrow{r} v$: Regelanwendung von $r = t{\longrightarrow}s$ auf u**
  – Teiltermmatching: Bestimme Substitution σ, so daß $t\sigma$ Teilterm von u
  – Ersetzung: Ersetze $t\sigma$ durch $s\sigma$
- **$u \xrightarrow{*} w$: Iterierte Anwendung von Regeln**
  – $u \xrightarrow{*} u$ (ohne Anwendung von Regeln)
  – $u \xrightarrow{*} w$, falls es ein $v \in \mathcal{A}^*$ gibt mit $u \xrightarrow{r} v$ und $v \xrightarrow{*} w$

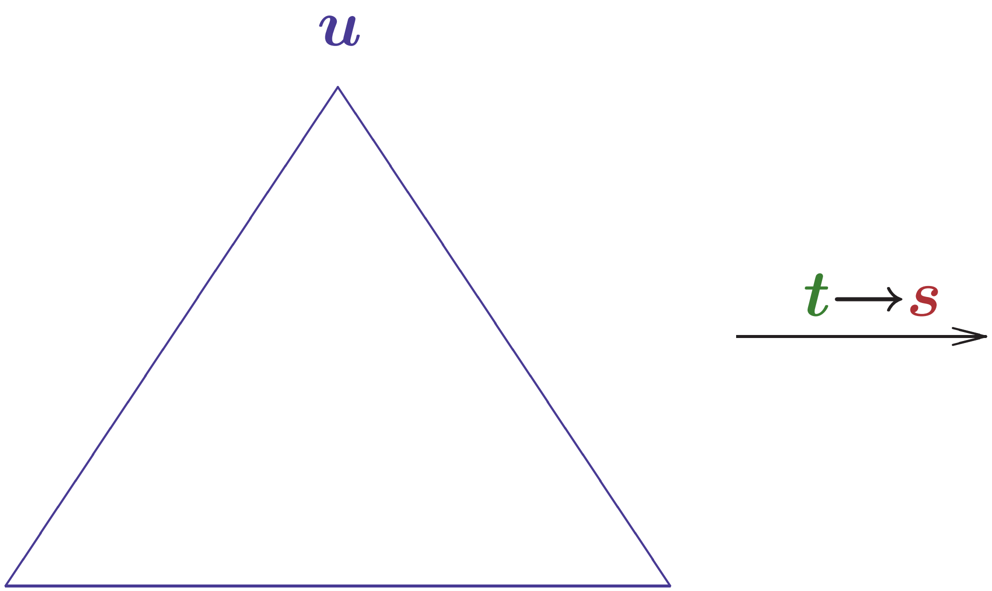
Rewriting: Grundbegriffe

- **Termersetzungssystem $(\mathcal{A},\mathcal{R})$**
  – $\mathcal{A}$ Alphabet, $\mathcal{R}$ Menge von Reduktionsregeln über $\mathcal{A}^*$
- **Reduktionsregel $t{\longrightarrow}s$** (t,s Terme über $\mathcal{A}$)
  – t (Redex) keine Variable
  – Alle Variablen von s (Kontraktum) kommen in t vor
- **$u \xrightarrow{r} v$: Regelanwendung von $r = t{\longrightarrow}s$ auf u**
  – Teiltermmatching: Bestimme Substitution σ, so daß $t\sigma$ Teilterm von u
  – Ersetzung: Ersetze $t\sigma$ durch $s\sigma$
- **$u \xrightarrow{*} w$: Iterierte Anwendung von Regeln**
  – $u \xrightarrow{*} u$ (ohne Anwendung von Regeln)
  – $u \xrightarrow{*} w$, falls es ein $v \in \mathcal{A}^*$ gibt mit $u \xrightarrow{r} v$ und $v \xrightarrow{*} w$
- **Normalform: nichtreduzierbarer Term**
  – Term v, der nicht durch Regelanwendungen “reduziert” werden kann
  – **Wert von u**: Normalform v mit $u \xrightarrow{*} v$

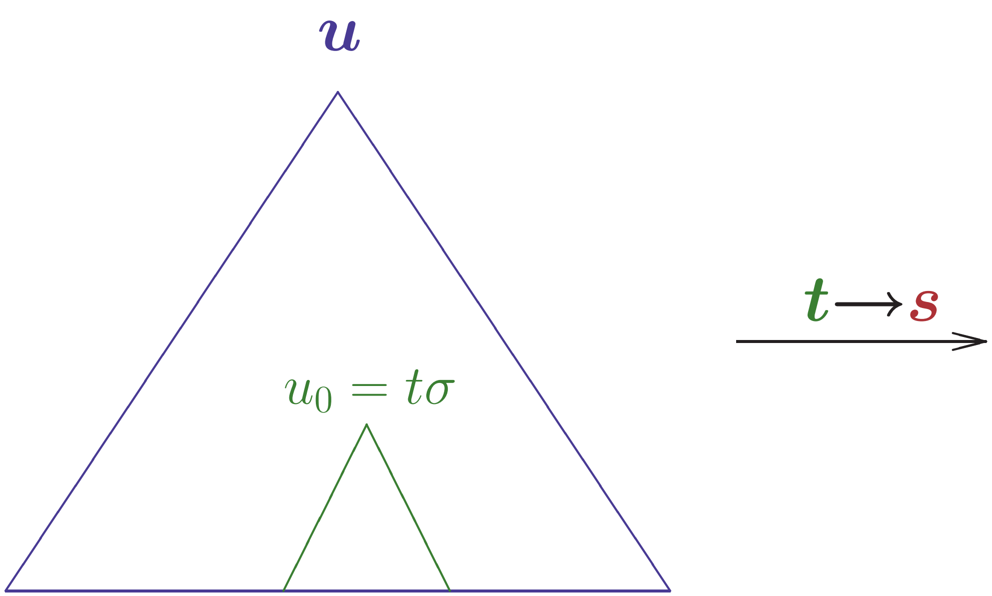
Anwendung der Termersetzungsregel $u \xrightarrow{r} v \quad (r = t{\longrightarrow}s)$



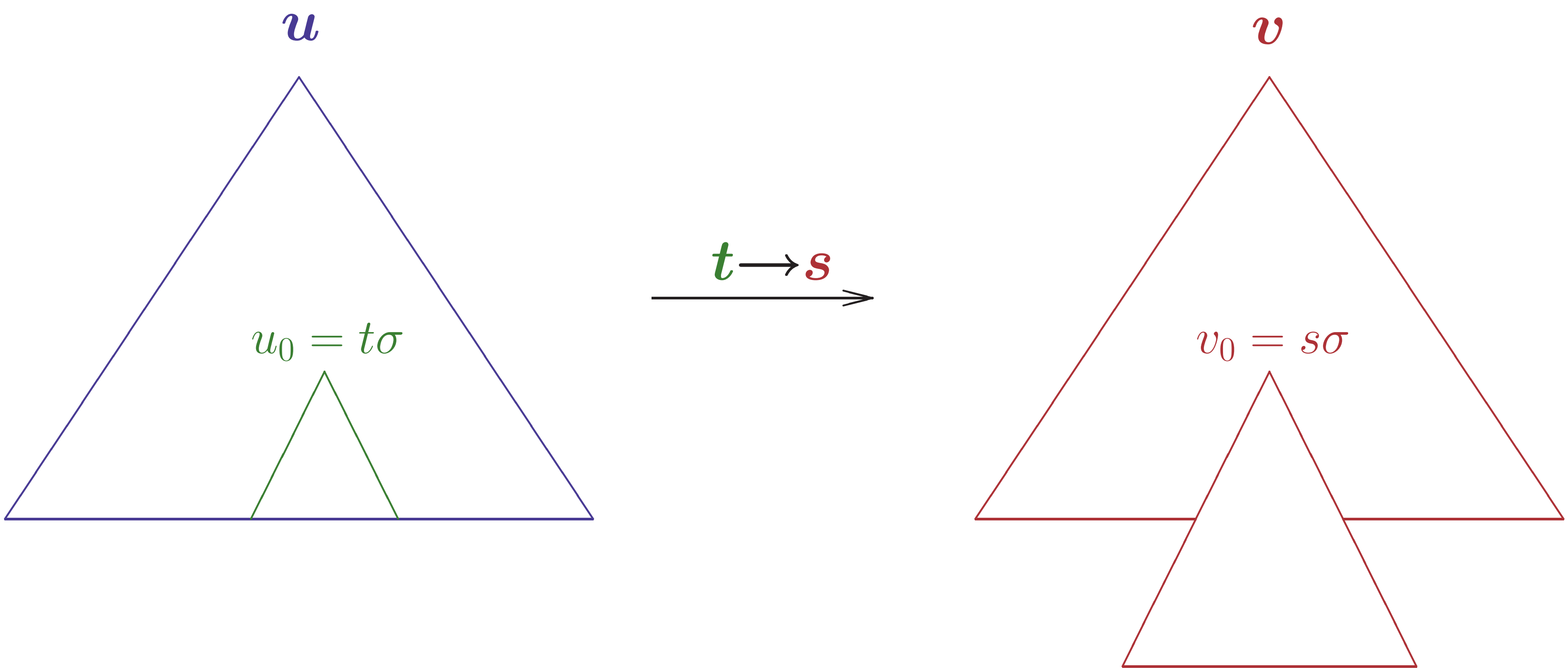
Anwendung der Termersetzungsregel $u \xrightarrow{r} v \quad (r = t \longrightarrow s)$



Anwendung der Termersetzungsregel $u \xrightarrow{r} v \quad (r = t{\longrightarrow}s)$



Anwendung der Termersetzungsregel $u \xrightarrow{r} v \quad (r = t{\rightarrow}s)$



Konfluenz

Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

Konfluenz

Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$a(\cdot\overline{a}) \cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  - $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_4} a \cdot (\overline{a} \cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$a(\cdot\overline{a})\cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(a\cdot\overline{a})\cdot b \xrightarrow{r_3} e\cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  - $(a\cdot\overline{a})\cdot b \xrightarrow{r_4} a\cdot(\overline{a}\cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

- **Konfluenz von $(\mathcal{A},\mathcal{R})$**
  - Ketten von Regelanwendungen sind immer zusammenführbar

    Aus $\boldsymbol{t\!\uparrow\! s}$ $(u \xrightarrow{*} t$ und $u \xrightarrow{*} s$ für ein $u)$

    folgt $\boldsymbol{t\!\downarrow\! s}$ $(t \xrightarrow{*} v$ und $s \xrightarrow{*} v$ für ein $v)$

$t\!\uparrow\! s$

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[dl, "\star"'] \arrow[dr, "\star"] & \\ s & & t \end{tikzcd}$$

Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

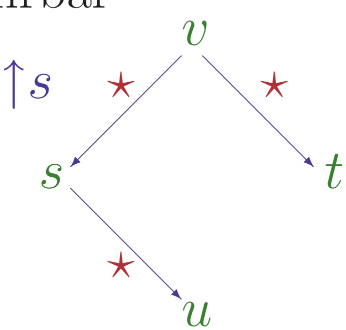
- **$a(\cdot\overline{a}) \cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  - $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_4} a \cdot (\overline{a} \cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

- **Konfluenz von $(\mathcal{A},\mathcal{R})$**
  - Ketten von Regelanwendungen sind immer zusammenführbar

    Aus $\boldsymbol{t{\uparrow}s}$ $(u \xrightarrow{*} t$ und $u \xrightarrow{*} s$ für ein $u)$

    folgt $\boldsymbol{t{\downarrow}s}$ $(t \xrightarrow{*} v$ und $s \xrightarrow{*} v$ für ein $v)$

$t{\uparrow}s$



Konfluenz

Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$a(\cdot\overline{a})\cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(a\cdot\overline{a})\cdot b \xrightarrow{r_3} e\cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  - $(a\cdot\overline{a})\cdot b \xrightarrow{r_4} a\cdot(\overline{a}\cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

- **Konfluenz von $(\mathcal{A},\mathcal{R})$**
  - Ketten von Regelanwendungen sind immer zusammenführbar

    Aus $\boldsymbol{t{\uparrow}s}$ $(u \xrightarrow{*} t$ und $u \xrightarrow{*} s$ für ein $u)$

    folgt $\boldsymbol{t{\downarrow}s}$ $(t \xrightarrow{*} v$ und $s \xrightarrow{*} v$ für ein $v)$

$$
t{\uparrow}s \quad
\begin{tikzcd}
 & v \arrow[dl, "\star"'] \arrow[dr, "\star"] & \\
s \arrow[dr, "\star"'] & & t \arrow[dl, "\star"] \\
 & u &
\end{tikzcd}
\quad t{\downarrow}s
$$

Konfluenz

Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$a(\cdot\overline{a}) \cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  - $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_4} a \cdot (\overline{a} \cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

- **Konfluenz von $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  - Ketten von Regelanwendungen sind immer zusammenführbar

    Aus $\boldsymbol{t{\uparrow}s}$ $(u \xrightarrow{*} t$ und $u \xrightarrow{*} s$ für ein $u)$

    folgt $\boldsymbol{t{\downarrow}s}$ $(t \xrightarrow{*} v$ und $s \xrightarrow{*} v$ für ein $v)$
  - Regeln entsprechen “echten” Gleichungen

    Gleiche Beweiskraft wie Anwendung der Gleichheiten

$t{\uparrow}s$

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[dl, "\star"'] \arrow[dr, "\star"] & \\ s \arrow[dr, "\star"'] & & t \arrow[dl, "\star"] \\ & u & \end{tikzcd}$$

$t{\downarrow}s$

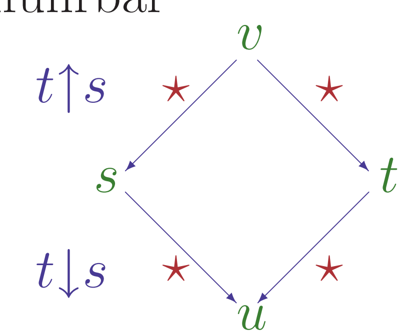
Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$a(\cdot\overline{a})\cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(a\cdot\overline{a})\cdot b \xrightarrow{r_3} e\cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  - $(a\cdot\overline{a})\cdot b \xrightarrow{r_4} a\cdot(\overline{a}\cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

- **Konfluenz von $(\mathcal{A},\mathcal{R})$**
  - Ketten von Regelanwendungen sind immer zusammenführbar

    Aus $\boldsymbol{t\!\uparrow\!s}$ ($u \xrightarrow{*} t$ und $u \xrightarrow{*} s$ für ein u)

    folgt $\boldsymbol{t\!\downarrow\!s}$ ($t \xrightarrow{*} v$ und $s \xrightarrow{*} v$ für ein v)



  - Regeln entsprechen “echten” Gleichungen

    Gleiche Beweiskraft wie Anwendung der Gleichheiten

Das einfache Regelsystem für die Gruppentheorie ist nicht konfluent

Normalisierbarkeit

Hat jeder Term eine Normalform?

Normalisierbarkeit

Hat jeder Term eine Normalform?

- **Regeln für Gruppentheorie sind unvollständig**
  - Gleichung der Assoziativität gilt in zwei Richtungen
  - Naive Lösung: Zusatzregel für Rückwärtsanwendung der Assoziativität

$$\begin{array}{lrcl}
\mathbf{r_1} & e \cdot x & \rightarrow & x \\
\mathbf{r_2} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
\mathbf{r_3} & \overline{y} \cdot y & \rightarrow & e \\
\mathbf{r_4} & (u \cdot v) \cdot w & \rightarrow & u \cdot (v \cdot w) \\
\mathbf{r_5} & u \cdot (v \cdot w) & \rightarrow & (u \cdot v) \cdot w
\end{array}$$

Normalisierbarkeit

Hat jeder Term eine Normalform?

- **Regeln für Gruppentheorie sind unvollständig**
  - Gleichung der Assoziativität gilt in zwei Richtungen
  - Naive Lösung: Zusatzregel für Rückwärtsanwendung der Assoziativität

r₁	$e \cdot x \longrightarrow x$
r₂	$x \cdot e \longrightarrow x$
r₃	$\overline{y} \cdot y \longrightarrow e$
r₄	$(u \cdot v) \cdot w \longrightarrow u \cdot (v \cdot w)$
r₅	$u \cdot (v \cdot w) \longrightarrow (u \cdot v) \cdot w$

  - Reduktionskette $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \stackrel{r_4}{\longrightarrow} a \cdot (\overline{a} \cdot b) \stackrel{r_5}{\longrightarrow} (a \cdot \overline{a}) \cdot b \stackrel{r_4}{\longrightarrow} ..$ terminiert nicht

Hat jeder Term eine Normalform?

- **Regeln für Gruppentheorie sind unvollständig**
  - Gleichung der Assoziativität gilt in zwei Richtungen
  - Naive Lösung: Zusatzregel für Rückwärtsanwendung der Assoziativität

$$
\begin{array}{lr}
\mathbf{r_1} & e \cdot x \rightarrow x \\
\mathbf{r_2} & x \cdot e \rightarrow x \\
\mathbf{r_3} & \overline{y} \cdot y \rightarrow e \\
\mathbf{r_4} & (u \cdot v) \cdot w \rightarrow u \cdot (v \cdot w) \\
\mathbf{r_5} & u \cdot (v \cdot w) \rightarrow (u \cdot v) \cdot w
\end{array}
$$

  - Reduktionskette $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_4} a \cdot (\overline{a} \cdot b) \xrightarrow{r_5} (a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_4} ..$ terminiert nicht
  - Normalform existiert dennoch: $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} \boldsymbol{b}$

Normalisierbarkeit

Hat jeder Term eine Normalform?

- **Regeln für Gruppentheorie sind unvollständig**
  - Gleichung der Assoziativität gilt in zwei Richtungen
  - Naive Lösung: Zusatzregel für Rückwärtsanwendung der Assoziativität

$\mathbf{r_1}$	$e \cdot x \longrightarrow x$
$\mathbf{r_2}$	$x \cdot e \longrightarrow x$
$\mathbf{r_3}$	$\overline{y} \cdot y \longrightarrow e$
$\mathbf{r_4}$	$(u \cdot v) \cdot w \longrightarrow u \cdot (v \cdot w)$
$\mathbf{r_5}$	$u \cdot (v \cdot w) \longrightarrow (u \cdot v) \cdot w$

  - Reduktionskette $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_4} a \cdot (\overline{a} \cdot b) \xrightarrow{r_5} (a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_4} ..$ terminiert nicht
  - Normalform existiert dennoch: $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} \boldsymbol{b}$

- **Schwache Normalisierbarkeit**
  - Jeder Term besitzt eine Normalform
  - Der λ-Kalkül ist nicht schwach normalisierbar (z.B. $(\lambda x.x\,x)(\lambda x.x\,x)$)

Normalisierbarkeit

Hat jeder Term eine Normalform?

- **Regeln für Gruppentheorie sind unvollständig**
  - Gleichung der Assoziativität gilt in zwei Richtungen
  - Naive Lösung: Zusatzregel für Rückwärtsanwendung der Assoziativität

$\mathbf{r_1}$	$e \cdot x \rightarrow x$
$\mathbf{r_2}$	$x \cdot e \rightarrow x$
$\mathbf{r_3}$	$\overline{y} \cdot y \rightarrow e$
$\mathbf{r_4}$	$(u \cdot v) \cdot w \rightarrow u \cdot (v \cdot w)$
$\mathbf{r_5}$	$u \cdot (v \cdot w) \rightarrow (u \cdot v) \cdot w$

  - Reduktionskette $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_4} a \cdot (\overline{a} \cdot b) \xrightarrow{r_5} (a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_4} ..$ terminiert nicht
  - Normalform existiert dennoch: $(a \cdot \overline{a}) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} \boldsymbol{b}$
- **Schwache Normalisierbarkeit**
  - Jeder Term besitzt eine Normalform
  - Der λ-Kalkül ist nicht schwach normalisierbar (z.B. $(\lambda x.x\,x)(\lambda x.x\,x)$)
- **Starke Normalisierbarkeit** ($(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ **noethersch**)
  - Jede Kette von Regelanwendungen terminiert

Nachweis starker Normalisierbarkeit

Das System $r_1..r_4$ ist stark normalisierbar

Nachweis starker Normalisierbarkeit

Das System $r_1..r_4$ ist stark normalisierbar

- **Definiere wohlfundierte $\succ$ Ordnung auf $\mathcal{A}^*$**
  – z.B. lexikographische Ordnung: Länge und Ordnung im Alphabet
  – Sinnvolle Ordnung auf $\mathcal{A}$ ist z.B. $(\succ) \succ \cdot \succ z \succ \ldots \succ a$

Nachweis starker Normalisierbarkeit

Das System $r_1..r_4$ ist stark normalisierbar

- **Definiere wohlfundierte $\succ$ Ordnung auf $\mathcal{A}^*$**
  - z.B. lexikographische Ordnung: Länge und Ordnung im Alphabet
  - Sinnvolle Ordnung auf $\mathcal{A}$ ist z.B. $(\succ) \succ \cdot \succ z \succ ... \succ a$
- **Zeige, daß jede Regel $t \longrightarrow s$ die Ordnung respektiert**
  - $r_1 :\ \ e \cdot x \succ x$
  - $r_2 :\ \ x \cdot e \succ x$
  - $r_3 :\ \ \overline{y} \cdot y \succ e$
  - $r_4 :\ \ (u \cdot v) \cdot w \succ u \cdot (v \cdot w)$

Nachweis starker Normalisierbarkeit

Das System $r_1..r_4$ ist stark normalisierbar

- **Definiere wohlfundierte $\succ$ Ordnung auf $\mathcal{A}^*$**
  - z.B. lexikographische Ordnung: Länge und Ordnung im Alphabet
  - Sinnvolle Ordnung auf $\mathcal{A}$ ist z.B. $(\succ) \succ \cdot \succ z \succ ... \succ a$
- **Zeige, daß jede Regel $t \longrightarrow s$ die Ordnung respektiert**
  - $r_1 : \;\; e \cdot x \succ x$
  - $r_2 : \;\; x \cdot e \succ x$
  - $r_3 : \;\; \overline{y} \cdot y \succ e$
  - $r_4 : \;\; (u \cdot v) \cdot w \succ u \cdot (v \cdot w)$
- **Konsequenz: Jede Reduktionsfolge terminiert**
  - Jede Reduktionsfolge liefert eine bzgl. $\succ$ absteigende Kette von Termen
  - Wohlfundiertheit von $\succ$: es gibt keine unendlichen absteigenden Ketten

Steuerung von Termersetzungsystemen

- **Vermeide nicht normalisierbare Regelsysteme**
  – Terme ohne Normalform sind für automatisches Schließen ungeeignet
  – λ-Kalkül ist Logik höherer Stufe und hochgradig unentscheidbar

Steuerung von Termersetzungsystemen

- **Vermeide nicht normalisierbare Regelsysteme**
  – Terme ohne Normalform sind für automatisches Schließen ungeeignet
  – λ-Kalkül ist Logik höherer Stufe und hochgradig unentscheidbar
- **Verwende heuristische Steuerung bei schwacher Normalisierbarkeit**
  – Strategische Steuerung vermeidet nichtterminierende Reduktionsketten

Steuerung von Termersetzungssystemen

- **Vermeide nicht normalisierbare Regelsysteme**
  - Terme ohne Normalform sind für automatisches Schließen ungeeignet
  - λ-Kalkül ist Logik höherer Stufe und hochgradig unentscheidbar
- **Verwende heuristische Steuerung bei schwacher Normalisierbarkeit**
  - Strategische Steuerung vermeidet nichtterminierende Reduktionsketten
- **Konfluenz ist sehr wichtig**
  - Andernfalls wird Backtracking über Reduktionen erforderlich um Gleichheit von Termen nachzuweisen

Steuerung von Termersetzungssystemen

- **Vermeide nicht normalisierbare Regelsysteme**
  – Terme ohne Normalform sind für automatisches Schließen ungeeignet
  – λ-Kalkül ist Logik höherer Stufe und hochgradig unentscheidbar
- **Verwende heuristische Steuerung bei schwacher Normalisierbarkeit**
  – Strategische Steuerung vermeidet nichtterminierende Reduktionsketten
- **Konfluenz ist sehr wichtig**
  – Andernfalls wird Backtracking über Reduktionen erforderlich um Gleichheit von Termen nachzuweisen
- **Optimal: vollständige Termersetzungssysteme**
  – $(\mathcal{A},\mathcal{R})$ noethersch und konfluent

  Der Einsatz vollständiger Termersetzungssysteme führt immer zum Ziel!

Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  - Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie

Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t{\rightarrow}s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich

Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t{\longrightarrow}s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig

Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t \longrightarrow s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln r_i, r_j**

$\boldsymbol{r_3}$**:** $\overline{x}\cdot x \longrightarrow e$

$\boldsymbol{r_4}$**:** $(x\cdot y)\cdot z \longrightarrow x\cdot(y\cdot z)$

Erzeugung vollständiger Regelsysteme

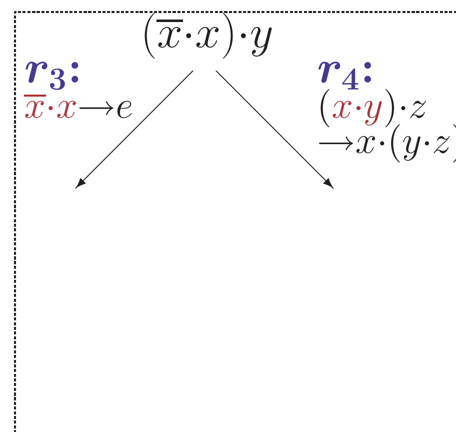
- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t \longrightarrow s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln r_i, r_j**
  – Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln

$\boldsymbol{r_3}$**:** $\overline{x}{\cdot}x \longrightarrow e$

$\boldsymbol{r_4}$**:** $(x{\cdot}y){\cdot}z \longrightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)$

Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  - Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  - Regel $t \longrightarrow s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  - Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  - Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  - Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  - Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln r_i, r_j**
  - Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln
  - Bilde kritischen Term t aus instantiierten Teiltermen



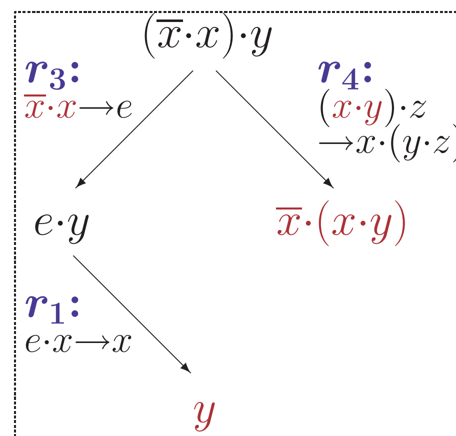
Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  - Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  - Regel $t \longrightarrow s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  - Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  - Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  - Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  - Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln r_i, r_j**
  - Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln
  - Bilde kritischen Term t aus instantiierten Teiltermen
  - Bilde Termpaar s, s' mit $t \xrightarrow{r} s$ und $t \xrightarrow{r'} s'$:

$$\begin{tikzcd}
 & (\overline{x}\cdot x)\cdot y \arrow[dl, "{r_3\text{:}\ \overline{x}\cdot x \longrightarrow e}"'] \arrow[dr, "{r_4\text{:}\ (x\cdot y)\cdot z \longrightarrow x\cdot(y\cdot z)}"] & \\
e\cdot y & & \overline{x}\cdot(x\cdot y)
\end{tikzcd}$$

Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t{\longrightarrow}s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln $\boldsymbol{r_i, r_j}$**
  – Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln
  – Bilde kritischen Term t aus instantiierten Teiltermen
  – Bilde Termpaar s, s' mit $t \xrightarrow{r} s$ und $t \xrightarrow{r'} s'$:
  – Normalisiere s, s' in $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ zu kritischem Termpaar u, v



Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t{\longrightarrow}s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln $\boldsymbol{r_i, r_j}$**
  – Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln
  – Bilde kritischen Term t aus instantiierten Teiltermen
  – Bilde Termpaar s, s' mit $t \xrightarrow{r} s$ und $t \xrightarrow{r'} s'$:
  – Normalisiere s, s' in $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ zu kritischem Termpaar u, v
  – Falls $u{\neq}v$ bilde neue Regel $u{\longrightarrow}v$ (bzw. $v{\longrightarrow}u$, falls $v \succ u$)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (\overline{x}\cdot x)\cdot y \arrow[dl, "\boldsymbol{r_3}:\ \overline{x}\cdot x\longrightarrow e"'] \arrow[dr, "\boldsymbol{r_4}:\ (x\cdot y)\cdot z \longrightarrow x\cdot(y\cdot z)"] & \\
e\cdot y \arrow[dr, "\boldsymbol{r_1}:\ e\cdot x\longrightarrow x"'] & & \overline{x}\cdot(x\cdot y) \arrow[dl, dashed, "\boldsymbol{r}"] \\
 & y &
\end{tikzcd}$$

Vervollständigung durch Superposition

Knuth Bendix Vervollständigung

Vervollständigung durch Superposition

- **Ausgangspunkt: noethersches Regelsystem**
  - i.a. einfache Umwandlung eines Gleichungssystems

Knuth Bendix Vervollständigung

Vervollständigung durch Superposition

- **Ausgangspunkt: noethersches Regelsystem**
  - i.a. einfache Umwandlung eines Gleichungssystems
- **Ziel: vollständiges Regelsystem**

Knuth Bendix Vervollständigung

Vervollständigung durch Superposition

- **Ausgangspunkt: noethersches Regelsystem**
  – i.a. einfache Umwandlung eines Gleichungssystems
- **Ziel: vollständiges Regelsystem**
- **Methode: schrittweise Superposition aller Regeln**
  – unter Verwendung einer wohlfundierten Termordnung $\succ$

Vervollständigung durch Superposition

- **Ausgangspunkt: noethersches Regelsystem**
  - i.a. einfache Umwandlung eines Gleichungssystems
- **Ziel: vollständiges Regelsystem**
- **Methode: schrittweise Superposition aller Regeln**
  - unter Verwendung einer wohlfundierten Termordnung $\succ$
- **Abbruchkriterium: lokale Konfluenz**
  - Je zwei Regelanwendungen sind zusammenführbar

$$\begin{tikzcd}
& v \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "r'"] & \\
s \arrow[dr, "\star"'] & & t \arrow[dl, "\star"] \\
& u &
\end{tikzcd}$$

Knuth Bendix Vervollständigung

Vervollständigung durch Superposition

- **Ausgangspunkt: noethersches Regelsystem**
  – i.a. einfache Umwandlung eines Gleichungssystems
- **Ziel: vollständiges Regelsystem**
- **Methode: schrittweise Superposition aller Regeln**
  – unter Verwendung einer wohlfundierten Termordnung $\succ$
- **Abbruchkriterium: lokale Konfluenz**
  – Je zwei Regelanwendungen sind zusammenführbar

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "r'"] & \\ s \arrow[dr, "\star"'] & & t \arrow[dl, "\star"] \\ & u & \end{tikzcd}$$

- **Korrektheit:**
  – Starke Normalisierbarkeit: neue Regeln erhalten die Termordnung $\succ$
  – Konfluenz folgt aus lokaler Konfluenz und starker Normalisierbarkeit

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ **stark normalisierbar, lokal konfluent** $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ **konfluent**

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ **stark normalisierbar, lokal konfluent** $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ **konfluent**

- **Für jeden Term** v **gibt es ein** n**, so daß jede in** v **beginnende Reduktionsfolge in maximal** n **Schritten terminiert**

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ **stark normalisierbar, lokal konfluent** $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ **konfluent**

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  – Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ **stark normalisierbar, lokal konfluent** $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ **konfluent**

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ **stark normalisierbar, lokal konfluent** $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ **konfluent**

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ stark normalisierbar, lokal konfluent $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ konfluent

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  – Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  – Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ stark normalisierbar, lokal konfluent $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ konfluent

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  $n{=}0$: Es folgt $v{=}t{=}s$, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ stark normalisierbar, lokal konfluent $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ konfluent

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  – Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  – Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  $n{=}0$: Es folgt $v{=}t{=}s$, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

  $n{+}1$: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann $v{=}t$ oder $v{=}s$

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ **stark normalisierbar, lokal konfluent** $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ **konfluent**

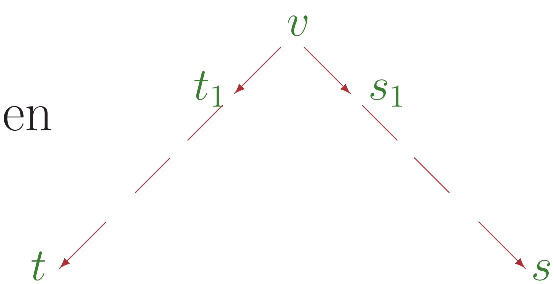
- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  $n{=}0$: Es folgt $v{=}t{=}s$, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

  $n{+}1$: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann $v{=}t$ oder $v{=}s$

  Ansonsten $v \xrightarrow{r} t_1 \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{r} s_1 \xrightarrow{*} s$



Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ stark normalisierbar, lokal konfluent $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ konfluent

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl

- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

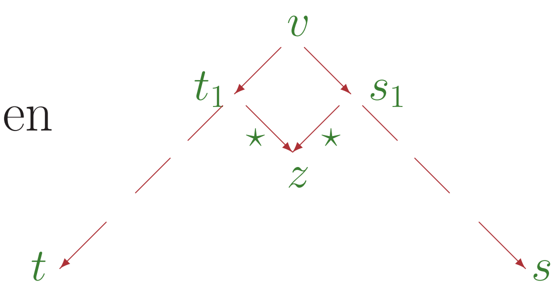
  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  $n{=}0$: Es folgt $v{=}t{=}s$, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

  $n{+}1$: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann $v{=}t$ oder $v{=}s$

  Ansonsten $v \xrightarrow{r} t_1 \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{r} s_1 \xrightarrow{*} s$

  Lokale Konfluenz: $t_1{\downarrow}s_1$ mit einem Term z



DAS DIAMOND LEMMA

$\xrightarrow{r}$ stark normalisierbar, lokal konfluent $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ konfluent

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

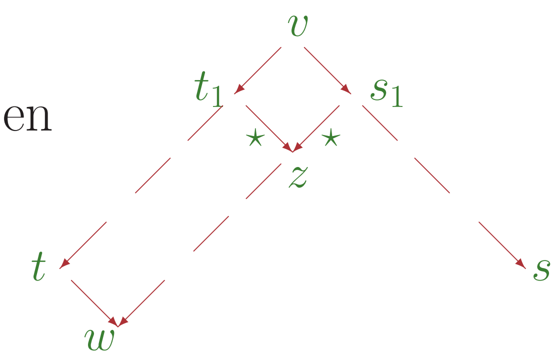
  $n{=}0$: Es folgt $v{=}t{=}s$, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

  $n{+}1$: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann $v{=}t$ oder $v{=}s$

  Ansonsten $v \xrightarrow{r} t_1 \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{r} s_1 \xrightarrow{*} s$

  Lokale Konfluenz: $t_1{\downarrow}s_1$ mit einem Term z

  Induktionsannahme für t_1: $t_1 \xrightarrow{*} t$, $t_1 \xrightarrow{*} z$ also $t{\downarrow}z$ mit w



Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ stark normalisierbar, lokal konfluent $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ konfluent

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  n=0: Es folgt v=t=s, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

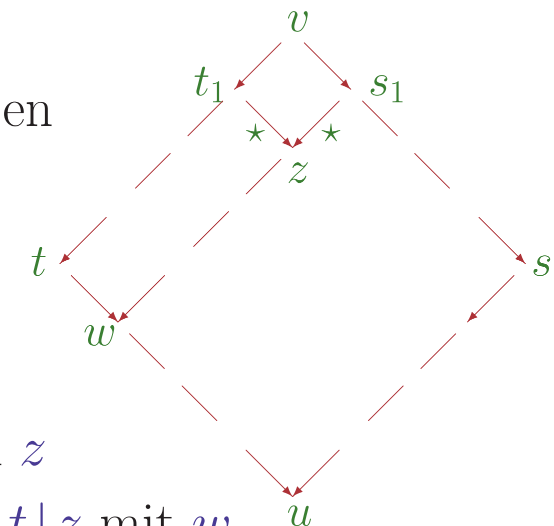
  n+1: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann v=t oder v=s

  Ansonsten $v \xrightarrow{r} t_1 \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{r} s_1 \xrightarrow{*} s$

  Lokale Konfluenz: $t_1{\downarrow}s_1$ mit einem Term z

  Induktionsannahme für t_1: $t_1 \xrightarrow{*} t$, $t_1 \xrightarrow{*} z$ also $t{\downarrow}z$ mit w

  Induktionsannahme für s_1: $s_1 \xrightarrow{*} z \xrightarrow{*} w$, $s_1 \xrightarrow{*} s$ also $w{\downarrow}s$ mit u



Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ **stark normalisierbar, lokal konfluent** $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ **konfluent**

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl

- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  $n{=}0$: Es folgt $v{=}t{=}s$, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

  $n{+}1$: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann $v{=}t$ oder $v{=}s$

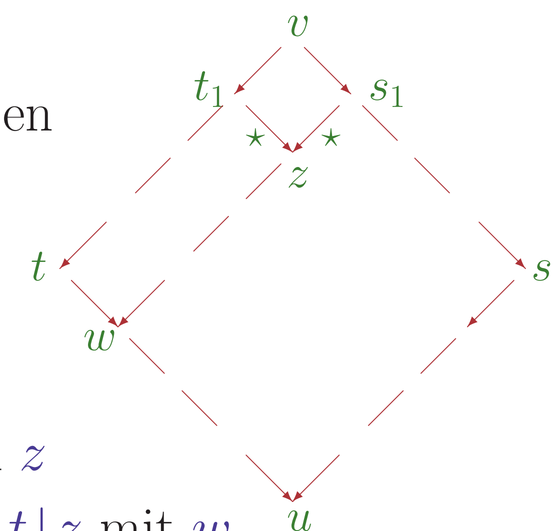
  Ansonsten $v \xrightarrow{r} t_1 \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{r} s_1 \xrightarrow{*} s$

  Lokale Konfluenz: $t_1{\downarrow}s_1$ mit einem Term z

  Induktionsannahme für t_1: $t_1 \xrightarrow{*} t$, $t_1 \xrightarrow{*} z$ also $t{\downarrow}z$ mit w

  Induktionsannahme für s_1: $s_1 \xrightarrow{*} z \xrightarrow{*} w$, $s_1 \xrightarrow{*} s$ also $w{\downarrow}s$ mit u

  Insgesamt $t \xrightarrow{*} w \xrightarrow{*} u$ und $s \xrightarrow{*} u$, also $\boldsymbol{t{\downarrow}s}$



Knuth–Bendix Verfahren

Eingabe: Endliche Menge $\mathcal{G}$ von Axiomgleichungen, Termordnung $\succ$.
Ausgabe: Bei Terminierung vollständiges Termersetzungssystem
oder Fehlermeldung

Initialisiere Regelmenge $\mathcal{R} := \emptyset$
Solange $\mathcal{G}$ nicht leer
  Wähle Gleichung aus $\mathcal{G}$ und reduziere sie mit Regeln aus $\mathcal{R}$
  Falls reduzierte Gleichung nicht von der Form $x \doteq x$
  Dann Falls reduzierte Gleichung läßt sich nicht mit $\succ$ zu neuer Regel richten
    Dann Abbruch '*Termordnung nicht ausreichend*'
    Sonst Bilde neue Regel und füge sie zu $\mathcal{R}$ hinzu;
      Reduziere alle Regeln aus $\mathcal{R}$ untereinander;
      Falls eine der reduzierten Regeln die Termordnung $\succ$ verletzt
      Dann entferne sie aus $\mathcal{R}$ und
        nehme sie in $\mathcal{G}$ auf, sofern sie nicht von der Gestalt $x \doteq x$ ist;
      Bilde alle kritischen Paare zwischen der neuen Regel
      und den übrigen Regeln und füge sie als Gleichungen zu $\mathcal{G}$ hinzu
Ergebnis $\mathcal{R}$

Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

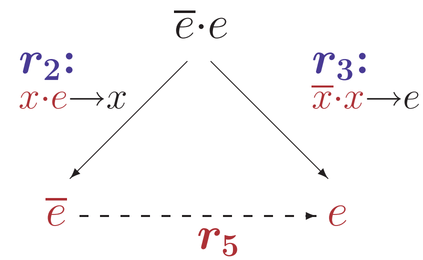
- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{r_1} & e{\cdot}x \longrightarrow x \\
\mathbf{r_2} & x{\cdot}e \longrightarrow x \\
\mathbf{r_3} & \overline{x}{\cdot}x \longrightarrow e \\
\mathbf{r_4} & (x{\cdot}y){\cdot}z \longrightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)
\end{array}$$

Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$\mathbf{r_1}$	$e{\cdot}x \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x{\cdot}e \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}{\cdot}x \longrightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x{\cdot}y){\cdot}z \longrightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \longrightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3



Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

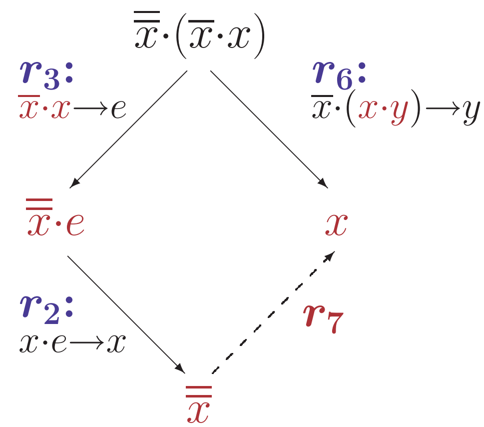
- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$\mathbf{r_1}$	$e\cdot x \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x\cdot e \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}\cdot x \longrightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x\cdot y)\cdot z \longrightarrow x\cdot(y\cdot z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \longrightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}\cdot(x\cdot y) \longrightarrow y$	Superposition von r_3 und r_4

$$
\begin{tikzcd}
 & (\overline{x}\cdot x)\cdot y \arrow[dl, "\boldsymbol{r_3}\text{:}\ \overline{x}\cdot x\to e"'] \arrow[dr, "\boldsymbol{r_4}\text{:}\ (x\cdot y)\cdot z \to x\cdot(y\cdot z)"] & \\
e\cdot y \arrow[dr, "\boldsymbol{r_1}\text{:}\ e\cdot x\to x"'] & & \overline{x}\cdot(x\cdot y) \arrow[dl, dashed, "\boldsymbol{r_6}"] \\
 & y &
\end{tikzcd}
$$

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$\mathbf{r_1}$	$e{\cdot}x \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x{\cdot}e \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}{\cdot}x \longrightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x{\cdot}y){\cdot}z \longrightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \longrightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}{\cdot}(x{\cdot}y) \longrightarrow y$	Superposition von r_3 und r_4
$\mathbf{r_7}$	$\overline{\overline{x}} \longrightarrow x$	Superposition von r_3 und r_6



Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$$\begin{tikzcd} & \overline{\overline{x}}\cdot\overline{x} \arrow[dl, "\boldsymbol{r_7}\text{:}\ \overline{\overline{x}}\to x"'] \arrow[dr, "\boldsymbol{r_3}\text{:}\ \overline{x}\cdot x\to e"] & \\ x\cdot\overline{x} \arrow[rr, dashed, "\boldsymbol{r_8}"'] & & e \end{tikzcd}$$

$\mathbf{r_1}$	$e\cdot x \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x\cdot e \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}\cdot x \longrightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x\cdot y)\cdot z \longrightarrow x\cdot(y\cdot z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \longrightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}\cdot(x\cdot y) \longrightarrow y$	Superposition von r_3 und r_4
$\mathbf{r_7}$	$\overline{\overline{x}} \longrightarrow x$	Superposition von r_3 und r_6
$\mathbf{r_8}$	$x\cdot\overline{x} \longrightarrow e$	Superposition von r_3 und r_7

Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

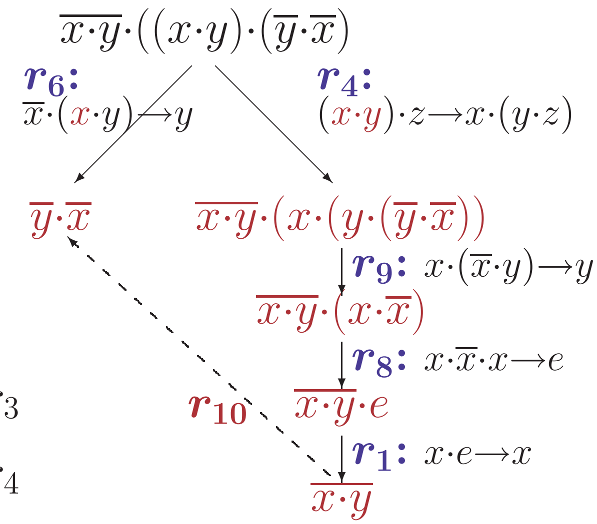
$$\begin{tikzcd} & \overline{\overline{x}}\cdot(\overline{x}\cdot y) \arrow[dl, "\mathbf{r_7}\text{:}\ \overline{\overline{x}}\to x"'] \arrow[dr, "\mathbf{r_6}\text{:}\ \overline{x}\cdot(x\cdot y)\to y"] & \\ x\cdot(\overline{x}\cdot y) \arrow[rr, dashed, "\mathbf{r_9}"'] & & y \end{tikzcd}$$

$\mathbf{r_1}$	$e\cdot x \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x\cdot e \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}\cdot x \longrightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x\cdot y)\cdot z \longrightarrow x\cdot(y\cdot z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \longrightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}\cdot(x\cdot y) \longrightarrow y$	Superposition von r_3 und r_4
$\mathbf{r_7}$	$\overline{\overline{x}} \longrightarrow x$	Superposition von r_3 und r_6
$\mathbf{r_8}$	$x\cdot\overline{x} \longrightarrow e$	Superposition von r_3 und r_7
$\mathbf{r_9}$	$x\cdot(\overline{x}\cdot y) \longrightarrow y$	Superposition von r_6 und r_7

Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$\mathbf{r_1}$	$e{\cdot}x \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x{\cdot}e \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}{\cdot}x \longrightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x{\cdot}y){\cdot}z \longrightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \longrightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}{\cdot}(x{\cdot}y) \longrightarrow y$	Superposition von r_3 und r_4
$\mathbf{r_7}$	$\overline{\overline{x}} \longrightarrow x$	Superposition von r_3 und r_6
$\mathbf{r_8}$	$x{\cdot}\overline{x} \longrightarrow e$	Superposition von r_3 und r_7
$\mathbf{r_9}$	$x{\cdot}(\overline{x}{\cdot}y) \longrightarrow y$	Superposition von r_6 und r_7
$\mathbf{r_{10}}$	$\overline{(x{\cdot}y)} \longrightarrow \overline{y}{\cdot}\overline{x}$	Superposition von r_4, r_6, r_8, r_9 (aufwendig)



Theorieunifikation mit Termersetzung

- **Komplementarität von Theoriekonnektionen**

$$\begin{bmatrix} & R(z\cdot(\overline{c}\cdot c),\, z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F \\ R\overset{\text{Group}}{(c,b)}^T & \end{bmatrix} \quad \sigma=[c/z]$$

  – Konnektion benutzt Theorieunifikation für Gruppentheorie

Theorieunifikation mit Termersetzung

- **Komplementarität von Theoriekonnektionen**

$$\left[\begin{array}{cc} & R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F \\ R(c,b)^T & \end{array}\right] \quad \sigma{=}[c/z]$$

Group

  – Konnektion benutzt Theorieunifikation für Gruppentheorie

- **Unifikation von $\boldsymbol{R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F}$ und $\boldsymbol{R(c,b)^T}$**

$$R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b)$$

Theorieunifikation mit Termersetzung

- **Komplementarität von Theoriekonnektionen**

$$\left[\begin{array}{cc} & R(z{\cdot}(\overline{c}{\cdot}c), z{\cdot}(\overline{z}{\cdot}b))^F \\ R(c,b)^T & \end{array}\right] \quad \sigma{=}[c/z]$$

Group

  – Konnektion benutzt Theorieunifikation für Gruppentheorie

- **Unifikation von $\boldsymbol{R(z{\cdot}(\overline{c}{\cdot}c), z{\cdot}(\overline{z}{\cdot}b))^F}$ und $\boldsymbol{R(c,b)^T}$**

$$R(z{\cdot}(\overline{c}{\cdot}c), z{\cdot}(\overline{z}{\cdot}b)) = R(c,b)$$

$$\xrightarrow{r_3} \ R(z{\cdot}e, z{\cdot}(\overline{z}{\cdot}b)) = R(c,b)$$

Theorieunifikation mit Termersetzung

- **Komplementarität von Theoriekonnektionen**

$$\left[\begin{array}{cc} & R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F \\ R(c,b)^T & \end{array}\right] \quad \sigma = [c/z]$$

Group

  – Konnektion benutzt Theorieunifikation für Gruppentheorie

- **Unifikation von $R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F$ und $R(c,b)^T$**

$$R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b)$$
$$\xrightarrow{r_3} \; R(z\cdot e, z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b)$$
$$\xrightarrow{r_9} \; R(z\cdot e, b) = R(c,b)$$

Theorieunifikation mit Termersetzung

- **Komplementarität von Theoriekonnektionen**

$$\left[\begin{array}{cc} & R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F \\ R(c,b)^T & \end{array}\right] \quad \sigma{=}[c/z]$$

Group

  – Konnektion benutzt Theorieunifikation für Gruppentheorie

- **Unifikation von $R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F$ und $R(c,b)^T$**

$$\begin{aligned} & R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_3}\ & R(z\cdot e, z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_9}\ & R(z\cdot e, b) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_2}\ & R(z,b) = R(c,b) \end{aligned}$$

Theorieunifikation mit Termersetzung

- **Komplementarität von Theoriekonnektionen**

$$\left[\begin{array}{cc} & R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F \\ R(c,b)^T & \end{array}\right] \quad \sigma{=}[c/z]$$

Group

  – Konnektion benutzt Theorieunifikation für Gruppentheorie

- **Unifikation von $R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F$ und $R(c,b)^T$**

$$\begin{array}{ll} & R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_3} & R(z\cdot e, z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_9} & R(z\cdot e, b) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_2} & R(z, b) = R(c,b) \\ \xrightarrow{unif} & R(c,b) = R(c,b) \qquad \sigma{=}[c/z] \end{array}$$

Theorieunifikation mit Termersetzung

- **Komplementarität von Theoriekonnektionen**

$$\left[\quad R(c,b)^T \qquad R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F \quad\right] \quad \sigma{=}[c/z]$$

Group

– Konnektion benutzt Theorieunifikation für Gruppentheorie

- **Unifikation von $R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F$ und $R(c,b)^T$**

$$\begin{array}{ll} & R(z\cdot(\overline{c}\cdot c), z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_3} & R(z\cdot e, z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_9} & R(z\cdot e, b) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_2} & R(z,b) = R(c,b) \\ \xrightarrow{unif} & R(c,b) = R(c,b) \qquad \sigma{=}[c/z] \end{array}$$

- **Integriere Unifikation und Termersetzung**

– Bestimme Substitution während der Ersetzung

Verallgemeinerte Anwendung von Rewrite-Regeln

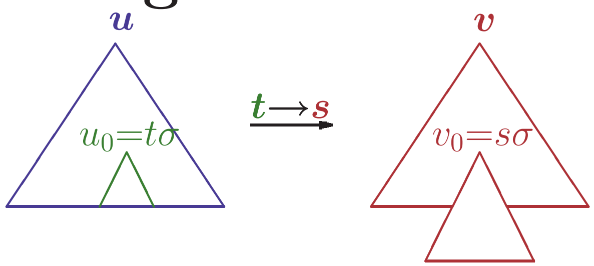
Narrowing

Verallgemeinerte Anwendung von Rewrite-Regeln

- **Rewriting einer Gleichung mit der Regel $t{\longrightarrow}s$:**

  $u = w \quad \longrightarrow \quad v = w$

  v entsteht aus u durch Ersetzung eines Teilterms $t\sigma$ mit $s\sigma$

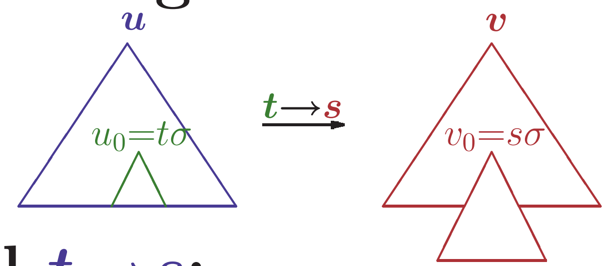


Verallgemeinerte Anwendung von Rewrite-Regeln

- **Rewriting einer Gleichung mit der Regel $t{\longrightarrow}s$:**

  $$u = w \quad \longrightarrow \quad v = w$$

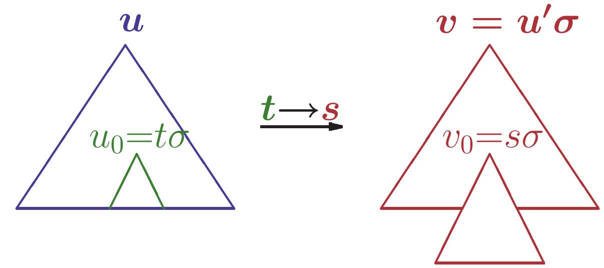
  v entsteht aus u durch Ersetzung
  eines Teilterms $t\sigma$ mit $s\sigma$



- **Einfaches Verengen mit der Regel $t{\longrightarrow}s$:**

  $$u = w, E \quad \longrightarrow \quad v = w, E$$

  v entsteht aus u durch Ersetzung
  eines Teilterms $t\sigma$ mit s und anschließender
  Anwendung von σ auf den ganzen Term



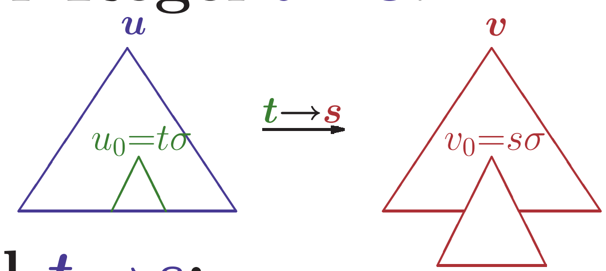
Narrowing

Verallgemeinerte Anwendung von Rewrite-Regeln

- **Rewriting einer Gleichung mit der Regel $t \longrightarrow s$:**

  $u = w \quad \longrightarrow \quad v = w$

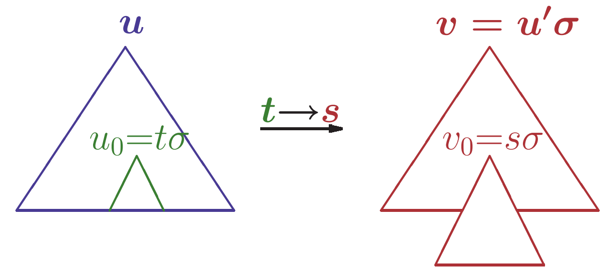
  v entsteht aus u durch Ersetzung
  eines Teilterms $t\sigma$ mit $s\sigma$



- **Einfaches Verengen mit der Regel $t \longrightarrow s$:**

  $u = w, E \quad \longrightarrow \quad v = w, E$

  v entsteht aus u durch Ersetzung
  eines Teilterms $t\sigma$ mit s und anschließender
  Anwendung von σ auf den ganzen Term



- **Lässiges Verengen mit der Regel $f t_1 \ldots t_n \longrightarrow s$:**

  $u = w,\ E \quad \longrightarrow \quad v = w,\ u_1 = t_1, \ldots, u_n = t_n,\ E$

  v entsteht aus u durch Ersetzung des Auftretens von $f u_1 \ldots u_n$ durch s.

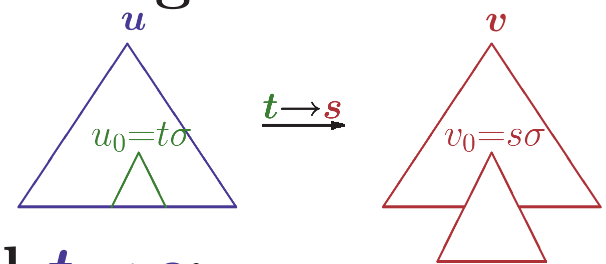
Narrowing

Verallgemeinerte Anwendung von Rewrite-Regeln

- **Rewriting einer Gleichung mit der Regel $t \longrightarrow s$:**

  $u = w \quad \longrightarrow \quad v = w$

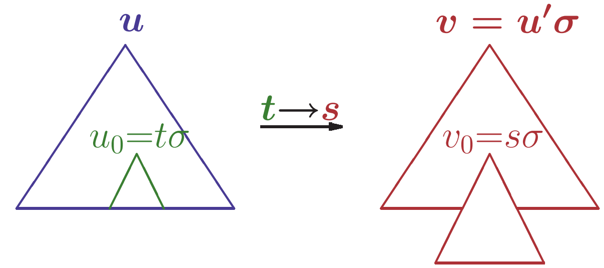
  v entsteht aus u durch Ersetzung
  eines Teilterms $t\sigma$ mit $s\sigma$



- **Einfaches Verengen mit der Regel $t \longrightarrow s$:**

  $u = w, E \quad \longrightarrow \quad v = w, E$

  v entsteht aus u durch Ersetzung
  eines Teilterms $t\sigma$ mit s und anschließender
  Anwendung von σ auf den ganzen Term



- **Lässiges Verengen mit der Regel $f t_1 \ldots t_n \longrightarrow s$:**

  $u = w,\ E \quad \longrightarrow \quad v = w,\ u_1 = t_1, \ldots, u_n = t_n,\ E$

  v entsteht aus u durch Ersetzung des Auftretens von $f u_1 \ldots u_n$ durch s.

  Bestimmung der Substitution wird in Gleichungssystem verschoben

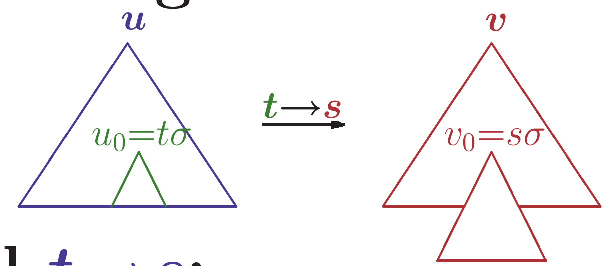
Narrowing

Verallgemeinerte Anwendung von Rewrite-Regeln

- **Rewriting einer Gleichung mit der Regel $t \longrightarrow s$:**

  $$u = w \quad \longrightarrow \quad v = w$$

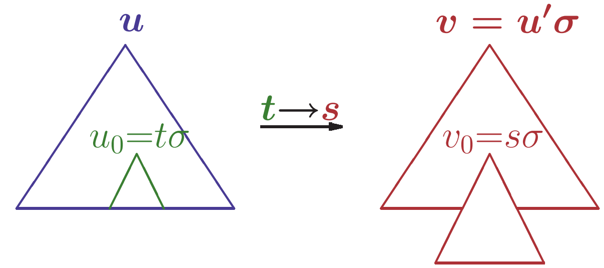
  v entsteht aus u durch Ersetzung
  eines Teilterms $t\sigma$ mit $s\sigma$



- **Einfaches Verengen mit der Regel $t \longrightarrow s$:**

  $$u = w, E \quad \longrightarrow \quad v = w, E$$

  v entsteht aus u durch Ersetzung
  eines Teilterms $t\sigma$ mit s und anschließender
  Anwendung von σ auf den ganzen Term



- **Lässiges Verengen mit der Regel $f t_1 \ldots t_n \longrightarrow s$:**

  $$u = w,\ E \quad \longrightarrow \quad v = w,\ u_1 = t_1, \ldots, u_n = t_n,\ E$$

  v entsteht aus u durch Ersetzung des Auftretens von $f u_1 \ldots u_n$ durch s.

  Bestimmung der Substitution wird in Gleichungssystem verschoben

  Verengen + Martelli–Montanari–Regeln liefert vollständiges (Unifikations-) Verfahren für Lösung einer Menge von Gleichungen unter einer Theorie

Arithmetische Regeln für ganze Zahlen

$\mathbf{r_1}$	$v(n(x)) \rightarrow x$	Vorgänger/Nachfolger
$\mathbf{r_2}$	$0 + x \rightarrow x$	Null als Linksidentität
$\mathbf{r_3}$	$x + 0 \rightarrow x$	Null als Rechtsidentität
$\mathbf{r_4}$	$n(x) + y \rightarrow n(x + y)$	Addition links
$\mathbf{r_5}$	$x + n(y) \rightarrow n(x + y)$	Addition rechts
$\mathbf{r_6}$	$x + v(y) \rightarrow v(x + y)$	Subtraktion

Termersetzungssystem für einfache Arithmetik

Arithmetische Regeln für ganze Zahlen

$\mathbf{r_1}$	$v(n(x)) \longrightarrow x$	Vorgänger/Nachfolger
$\mathbf{r_2}$	$0 + x \longrightarrow x$	Null als Linksidentität
$\mathbf{r_3}$	$x + 0 \longrightarrow x$	Null als Rechtsidentität
$\mathbf{r_4}$	$n(x) + y \longrightarrow n(x+y)$	Addition links
$\mathbf{r_5}$	$x + n(y) \longrightarrow n(x+y)$	Addition rechts
$\mathbf{r_6}$	$x + v(y) \longrightarrow v(x+y)$	Subtraktion

Martelli–Montanari–Regeln

Termdekomposition	$\{f(s_1,..s_n)\doteq f(t_1,..t_n)\}\cup E \longrightarrow \{s_1\doteq t_1,..s_n\doteq t_n\}\cup E$	
Ausdünnen	$\{x\doteq x\}\cup E \longrightarrow E$	
Umstellung	$\{t\doteq x\}\cup E \longrightarrow \{x\doteq t\}\cup E$	$(t \notin \mathcal{V})$
Variablenelimination	$\{x\doteq t\}\cup E \longrightarrow \{x\doteq t\}\cup E\{x\backslash t\}$	$(x \notin t,\ x \in E)$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0)$, $x_1=x+x$, $v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0)$, $x_1=x+x$, $y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0)$, $x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0)$, $n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	angewandte Regeln
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	angewandte Regeln
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	angewandte Regeln
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$
$n(0)=n(x_5+y_5),\ x_4=x_5,\ n(x_4)=n(y_5)$	lässige Verengung mit r_5

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$
$n(0)=n(x_5+y_5),\ x_4=x_5,\ n(x_4)=n(y_5)$	lässige Verengung mit r_5
$n(0)=n(x_5+y_5),\ n(x_5)=n(y_5)$	Variablenelimination $x_4=x_5$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$
$n(0)=n(x_5+y_5),\ x_4=x_5,\ n(x_4)=n(y_5)$	lässige Verengung mit r_5
$n(0)=n(x_5+y_5),\ n(x_5)=n(y_5)$	Variablenelimination $x_4=x_5$
$0=x_5+y_5,\ n(x_5)=n(y_5)$	Termdekomposition

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$
$n(0)=n(x_5+y_5),\ x_4=x_5,\ n(x_4)=n(y_5)$	lässige Verengung mit r_5
$n(0)=n(x_5+y_5),\ n(x_5)=n(y_5)$	Variablenelimination $x_4=x_5$
$0=x_5+y_5,\ n(x_5)=n(y_5)$	Termdekomposition
$0=x_5+y_5,\ x_5=y_5$	Termdekomposition

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$
$n(0)=n(x_5+y_5),\ x_4=x_5,\ n(x_4)=n(y_5)$	lässige Verengung mit r_5
$n(0)=n(x_5+y_5),\ n(x_5)=n(y_5)$	Variablenelimination $x_4=x_5$
$0=x_5+y_5,\ n(x_5)=n(y_5)$	Termdekomposition
$0=x_5+y_5,\ x_5=y_5$	Termdekomposition
$0=y_5+y_5$	Variablenelimination $x_5=y_5$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$
$n(0)=n(x_5+y_5),\ x_4=x_5,\ n(x_4)=n(y_5)$	lässige Verengung mit r_5
$n(0)=n(x_5+y_5),\ n(x_5)=n(y_5)$	Variablenelimination $x_4=x_5$
$0=x_5+y_5,\ n(x_5)=n(y_5)$	Termdekomposition
$0=x_5+y_5,\ x_5=y_5$	Termdekomposition
$0=y_5+y_5$	Variablenelimination $x_5=y_5$
$0=x_6,\ y_5=0,\ y_5=x_6$	lässige Verengung mit r_2

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	angewandte Regeln
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$
$n(0)=n(x_5+y_5),\ x_4=x_5,\ n(x_4)=n(y_5)$	lässige Verengung mit r_5
$n(0)=n(x_5+y_5),\ n(x_5)=n(y_5)$	Variablenelimination $x_4=x_5$
$0=x_5+y_5,\ n(x_5)=n(y_5)$	Termdekomposition
$0=x_5+y_5,\ x_5=y_5$	Termdekomposition
$0=y_5+y_5$	Variablenelimination $x_5=y_5$
$0=x_6,\ y_5=0,\ y_5=x_6$	lässige Verengung mit r_2
$0=x_6,\ 0=x_6$	Variablenelimination $y_5=0$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	angewandte Regeln
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$
$n(0)=n(x_5+y_5),\ x_4=x_5,\ n(x_4)=n(y_5)$	lässige Verengung mit r_5
$n(0)=n(x_5+y_5),\ n(x_5)=n(y_5)$	Variablenelimination $x_4=x_5$
$0=x_5+y_5,\ n(x_5)=n(y_5)$	Termdekomposition
$0=x_5+y_5,\ x_5=y_5$	Termdekomposition
$0=y_5+y_5$	Variablenelimination $x_5=y_5$
$0=x_6,\ y_5=0,\ y_5=x_6$	lässige Verengung mit r_2
$0=x_6,\ 0=x_6$	Variablenelimination $y_5=0$
$0=x_6,\ x_6=0$	Umstellung

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$
$n(0)=n(x_5+y_5),\ x_4=x_5,\ n(x_4)=n(y_5)$	lässige Verengung mit r_5
$n(0)=n(x_5+y_5),\ n(x_5)=n(y_5)$	Variablenelimination $x_4=x_5$
$0=x_5+y_5,\ n(x_5)=n(y_5)$	Termdekomposition
$0=x_5+y_5,\ x_5=y_5$	Termdekomposition
$0=y_5+y_5$	Variablenelimination $x_5=y_5$
$0=x_6,\ y_5=0,\ y_5=x_6$	lässige Verengung mit r_2
$0=x_6,\ 0=x_6$	Variablenelimination $y_5=0$
$0=x_6,\ x_6=0$	Umstellung
$0=0$	Variablenelimination $x_6=0$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	**angewandte Regeln**
$(x+x)+v(0)=n(0)$	
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ v(y_1)=v(0)$	lässige Verengung mit r_6
$v(x_1+y_1)=n(0),\ x_1=x+x,\ y_1=0$	Termdekomposition
$v(x_1+0)=n(0),\ x_1=x+x$	Variablenelimination $y_1=0$
$v((x+x)+0)=n(0)$	Variablenelimination $x_1=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=(x+x)+0$	lässige Verengung mit r_1
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x,\ 0=0$	lässige Verengung mit r_3
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x_3,\ x_3=x+x$	Ausdünnung $0=0$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=x+x$	Variablenelimination $x_3=x+x$
$x_2=n(0),\ n(x_2)=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	lässige Verengung mit r_4
$n(n(0))=n(x_4+y_4),\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Variablenelimination $x_2=n(0)$
$n(0)=x_4+y_4,\ x=n(x_4),\ x=y_4$	Termdekomposition
$n(0)=x_4+y_4,\ y_4=n(x_4)$	Variablenelimination $x=y_4$
$n(0)=x_4+n(x_4)$	Variablenelimination $y_4=n(x_4)$
$n(0)=n(x_5+y_5),\ x_4=x_5,\ n(x_4)=n(y_5)$	lässige Verengung mit r_5
$n(0)=n(x_5+y_5),\ n(x_5)=n(y_5)$	Variablenelimination $x_4=x_5$
$0=x_5+y_5,\ n(x_5)=n(y_5)$	Termdekomposition
$0=x_5+y_5,\ x_5=y_5$	Termdekomposition
$0=y_5+y_5$	Variablenelimination $x_5=y_5$
$0=x_6,\ y_5=0,\ y_5=x_6$	lässige Verengung mit r_2
$0=x_6,\ 0=x_6$	Variablenelimination $y_5=0$
$0=x_6,\ x_6=0$	Umstellung
$0=0$ $\qquad \boldsymbol{\sigma(x)=n(0)}$	Variablenelimination $x_6=0$

Anwendung von Termersetzung in der Deduktion

- **Unifikationsalgorithmus für Theoriekonnektionen**
  - Nur bei vollständigen Regelsystemen möglich

    z.B. Einfache Arithmetik, Gruppentheorie, Gleichheitstheorien

Anwendung von Termersetzung in der Deduktion

- **Unifikationsalgorithmus für Theoriekonnektionen**
  - Nur bei vollständigen Regelsystemen möglich

    z.B. Einfache Arithmetik, Gruppentheorie, Gleichheitstheorien
  - Nicht jede Theorie kann als vollstandiges Regelsystem formuliert werden
  - Heuristische Steuerung für unvollständige Systeme praktisch erfolgreich

Anwendung von Termersetzung in der Deduktion

- **Unifikationsalgorithmus für Theoriekonnektionen**
  - Nur bei vollständigen Regelsystemen möglich

    z.B. Einfache Arithmetik, Gruppentheorie, Gleichheitstheorien
  - Nicht jede Theorie kann als vollstandiges Regelsystem formuliert werden
  - Heuristische Steuerung für unvollständige Systeme praktisch erfolgreich
- **Deduktion als Termersetzungssystem formulierbar**
  - In beschränkten Bereichen sinnvoll einsetzbar
  - Niedriges Niveau, kein Ersatz für verdichtete logische Verfahren