Inferenzmethoden

Teil IV

Jenseits von Prädikatenlogik

Es gibt mehr als Klassische Prädikatenlogik

- **Konstruktive Logik: mehr als nur Wahrheit**
  - Interpretiere logische Symbole als Konstruktion eines Nachweises
  - Gut verwendbar als Logik der Berechnung und Programmierung
  - Ursprünglicher Name: Intuitionistische Logik

Es gibt mehr als Klassische Prädikatenlogik

- **Konstruktive Logik: mehr als nur Wahrheit**
  - Interpretiere logische Symbole als Konstruktion eines Nachweises
  - Gut verwendbar als Logik der Berechnung und Programmierung
  - Ursprünglicher Name: Intuitionistische Logik
- **Modallogiken: zusätzliche Quantoren $\Diamond$, $\Box$**
  - Ist Gültigkeit einer Aussage möglich oder zwingend notwendig?

Es gibt mehr als Klassische Prädikatenlogik

- **Konstruktive Logik: mehr als nur Wahrheit**
  - Interpretiere logische Symbole als Konstruktion eines Nachweises
  - Gut verwendbar als Logik der Berechnung und Programmierung
  - Ursprünglicher Name: Intuitionistische Logik
- **Modallogiken: zusätzliche Quantoren $\Diamond$, $\Box$**
  - Ist Gültigkeit einer Aussage möglich oder zwingend notwendig?
- **Logik höherer Stufe: freie Quantifizierung**
  - Formeln dürfen auch über Funktionen und Prädikate quantifizieren

Es gibt mehr als Klassische Prädikatenlogik

- **Konstruktive Logik: mehr als nur Wahrheit**
  - Interpretiere logische Symbole als Konstruktion eines Nachweises
  - Gut verwendbar als Logik der Berechnung und Programmierung
  - Ursprünglicher Name: Intuitionistische Logik
- **Modallogiken: zusätzliche Quantoren $\Diamond$, $\Box$**
  - Ist Gültigkeit einer Aussage möglich oder zwingend notwendig?
- **Logik höherer Stufe: freie Quantifizierung**
  - Formeln dürfen auch über Funktionen und Prädikate quantifizieren
- **... und noch vieles mehr**
  - Lineare, nichtmonotone, Relevanz-, Beschreibungs-, Temporallogik, ...
  - Kombinationen: konstruktive Logik höherer Stufe, Typentheorie, ...

Es gibt mehr als Klassische Prädikatenlogik

- **Konstruktive Logik: mehr als nur Wahrheit**
  – Interpretiere logische Symbole als Konstruktion eines Nachweises
  – Gut verwendbar als Logik der Berechnung und Programmierung
  – Ursprünglicher Name: Intuitionistische Logik
- **Modallogiken: zusätzliche Quantoren $\Diamond$, $\Box$**
  – Ist Gültigkeit einer Aussage möglich oder zwingend notwendig?
- **Logik höherer Stufe: freie Quantifizierung**
  – Formeln dürfen auch über Funktionen und Prädikate quantifizieren
- **... und noch vieles mehr**
  – Lineare, nichtmonotone, Relevanz-, Beschreibungs-, Temporallogik, ...
  – Kombinationen: konstruktive Logik höherer Stufe, Typentheorie, ...

Lassen sich Beweisverfahren entsprechend anpassen?

Voraussetzungen für nichtklassisches Beweisen

- **Normalformen sind nicht immer möglich**
  - In konstruktiver Logik ist jede Formel in DNF ungültig
    - Eine Klausel müsste, für sich alleine betrachtet, gültig sein

Voraussetzungen für nichtklassisches Beweisen

- **Normalformen sind nicht immer möglich**
  - In konstruktiver Logik ist jede Formel in DNF ungültig
    - Eine Klausel müsste, für sich alleine betrachtet, gültig sein
  - In linearer Logik gibt es mehrere Konjunktionsbegriffe

Voraussetzungen für nichtklassisches Beweisen

- **Normalformen sind nicht immer möglich**
  - In konstruktiver Logik ist jede Formel in DNF ungültig
    - Eine Klausel müsste, für sich alleine betrachtet, gültig sein
  - In linearer Logik gibt es mehrere Konjunktionsbegriffe
- **Beweise müssen mehr Information enthalten**
  - In konstruktiver Logik enthalten Beweise algorithmische Lösungen

Voraussetzungen für nichtklassisches Beweisen

- **Normalformen sind nicht immer möglich**
  - In konstruktiver Logik ist jede Formel in DNF ungültig
    - Eine Klausel müsste, für sich alleine betrachtet, gültig sein
  - In linearer Logik gibt es mehrere Konjunktionsbegriffe
- **Beweise müssen mehr Information enthalten**
  - In konstruktiver Logik enthalten Beweise algorithmische Lösungen
  - In Modallogiken entstehen gesicherte Aussagen aus Möglichkeiten
  - Lineare Logik beschreibt die Verarbeitung von Ressourcen

Voraussetzungen für nichtklassisches Beweisen

- **Normalformen sind nicht immer möglich**
  - In konstruktiver Logik ist jede Formel in DNF ungültig
    - Eine Klausel müsste, für sich alleine betrachtet, gültig sein
  - In linearer Logik gibt es mehrere Konjunktionsbegriffe
- **Beweise müssen mehr Information enthalten**
  - In konstruktiver Logik enthalten Beweise algorithmische Lösungen
  - In Modallogiken entstehen gesicherte Aussagen aus Möglichkeiten
  - Lineare Logik beschreibt die Verarbeitung von Ressourcen
- **Konnektionsmethode muß erweitert werden**

Voraussetzungen für nichtklassisches Beweisen

- **Normalformen sind nicht immer möglich**
  - In konstruktiver Logik ist jede Formel in DNF ungültig
    - Eine Klausel müsste, für sich alleine betrachtet, gültig sein
  - In linearer Logik gibt es mehrere Konjunktionsbegriffe
- **Beweise müssen mehr Information enthalten**
  - In konstruktiver Logik enthalten Beweise algorithmische Lösungen
  - In Modallogiken entstehen gesicherte Aussagen aus Möglichkeiten
  - Lineare Logik beschreibt die Verarbeitung von Ressourcen
- **Konnektionsmethode muß erweitert werden**
  - Beweissuchverfahren für Nichtnormalform-Matrizen

Voraussetzungen für nichtklassisches Beweisen

- **Normalformen sind nicht immer möglich**
  - In konstruktiver Logik ist jede Formel in DNF ungültig
    - Eine Klausel müsste, für sich alleine betrachtet, gültig sein
  - In linearer Logik gibt es mehrere Konjunktionsbegriffe
- **Beweise müssen mehr Information enthalten**
  - In konstruktiver Logik enthalten Beweise algorithmische Lösungen
  - In Modallogiken entstehen gesicherte Aussagen aus Möglichkeiten
  - Lineare Logik beschreibt die Verarbeitung von Ressourcen
- **Konnektionsmethode muß erweitert werden**
  - Beweissuchverfahren für Nichtnormalform-Matrizen
  - Verwaltung logik-spezifischer Zusatzinformation in den Literalen und Verallgemeinerung des Komplementaritätsbegriffs

Voraussetzungen für nichtklassisches Beweisen

- **Normalformen sind nicht immer möglich**
  - In konstruktiver Logik ist jede Formel in DNF ungültig
    - Eine Klausel müsste, für sich alleine betrachtet, gültig sein
  - In linearer Logik gibt es mehrere Konjunktionsbegriffe
- **Beweise müssen mehr Information enthalten**
  - In konstruktiver Logik enthalten Beweise algorithmische Lösungen
  - In Modallogiken entstehen gesicherte Aussagen aus Möglichkeiten
  - Lineare Logik beschreibt die Verarbeitung von Ressourcen
- **Konnektionsmethode muß erweitert werden**
  - Beweissuchverfahren für Nichtnormalform-Matrizen
  - Verwaltung logik-spezifischer Zusatzinformation in den Literalen und Verallgemeinerung des Komplementaritätsbegriffs
  - Komplementaritätstest mit erweiterten Unifikationsverfahren

Inferenzmethoden

Einheit 13

Die Konnektionsmethode:
Behandlung von Nicht-Normalform-Matrizen

1. Anpassung der Grundkonzepte
2. Verfahren für Nicht-Normalform-Matrizen
3. Pfadexploration auf Formelbäumen

Deduktion ohne Normalformbildung

- **Normalform-Matrizen sind zu einfach**
  - Matrix $\equiv$ Menge von Klauseln in α-Beziehung
  - Klausel $\equiv$ Menge von Literalen in β-Beziehung
  - Im Formelbaum müssten alle α-Knoten vor den β-Knoten erscheinen
  - Nur wenige Formeln werden von Normalform-Matrizen repräsentiert

Deduktion ohne Normalformbildung

- **Normalform-Matrizen sind zu einfach**
  - Matrix $\equiv$ Menge von Klauseln in α-Beziehung
  - Klausel $\equiv$ Menge von Literalen in β-Beziehung
  - Im Formelbaum müssten alle α-Knoten vor den β-Knoten erscheinen
  - Nur wenige Formeln werden von Normalform-Matrizen repräsentiert
- **Normalisierung ist "unnatürlich"**
  - Oft exponentielle Aufblähung der Formel $\mapsto$ Effizienzprobleme
  - Originalformel selten rekonstruierbar $\mapsto$ Unverständliche Beweise
  - Normalformtransformationen jenseits von Prädikatenlogik kaum möglich

Deduktion ohne Normalformbildung

- **Normalform-Matrizen sind zu einfach**
  - Matrix $\equiv$ Menge von Klauseln in α-Beziehung
  - Klausel $\equiv$ Menge von Literalen in β-Beziehung
  - Im Formelbaum müssten alle α-Knoten vor den β-Knoten erscheinen
  - Nur wenige Formeln werden von Normalform-Matrizen repräsentiert
- **Normalisierung ist "unnatürlich"**
  - Oft exponentielle Aufblähung der Formel $\mapsto$ Effizienzprobleme
  - Originalformel selten rekonstruierbar $\mapsto$ Unverständliche Beweise
  - Normalformtransformationen jenseits von Prädikatenlogik kaum möglich
- **Erweitere Extensionsverfahren auf Formelbäume**
  - Verwende allgemeine Konzepte anstelle der vereinfachten Klauselform
  - Matrizen sind komplexer (Mengen von Matrizen kleinerer Tiefe)
  - Pfadbegriff ist feiner (Menge von Literalen in α-Beziehung)

Deduktion ohne Normalformbildung

- **Normalform-Matrizen sind zu einfach**
  – Matrix $\equiv$ Menge von Klauseln in α-Beziehung
  – Klausel $\equiv$ Menge von Literalen in β-Beziehung
  – Im Formelbaum müssten alle α-Knoten vor den β-Knoten erscheinen
  – Nur wenige Formeln werden von Normalform-Matrizen repräsentiert
- **Normalisierung ist "unnatürlich"**
  – Oft exponentielle Aufblähung der Formel $\mapsto$ Effizienzprobleme
  – Originalformel selten rekonstruierbar $\mapsto$ Unverständliche Beweise
  – Normalformtransformationen jenseits von Prädikatenlogik kaum möglich
- **Erweitere Extensionsverfahren auf Formelbäume**
  – Verwende allgemeine Konzepte anstelle der vereinfachten Klauselform
  – Matrizen sind komplexer (Mengen von Matrizen kleinerer Tiefe)
  – Pfadbegriff ist feiner (Menge von Literalen in α-Beziehung)
  – Aufwendigere Pfadüberprüfung – sonst keine grundsätzliche Änderung

Nicht-Normalform – Was muss angepasst werden?

- **Wichtige Änderungen in der Aussagenlogik**

$$\left[\begin{array}{ccc} \boxed{P^T} & \left[\begin{array}{cc} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & \boxed{R^T} \end{array}\right] & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{array}\right]$$

Nicht-Normalform – Was muss angepasst werden?

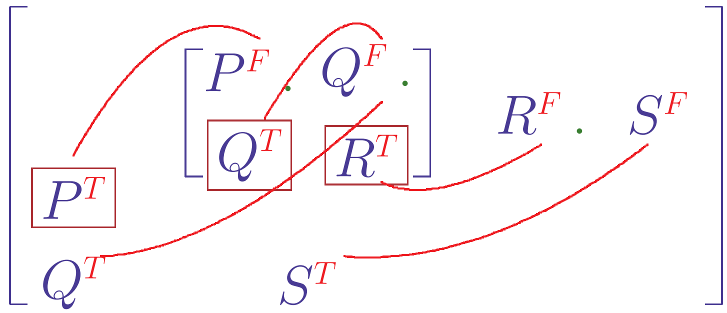
- **Wichtige Änderungen in der Aussagenlogik**

$$\begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & \boxed{R^T} \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ \boxed{P^T} & & & \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix}$$

  – Welche Literale gehören zum aktuellen Pfad?

Nicht-Normalform – Was muss angepasst werden?

- **Wichtige Änderungen in der Aussagenlogik**



  - Welche Literale gehören zum aktuellen Pfad?
  - Was ist die "aktuelle Klausel"?

Nicht-Normalform – Was muss angepasst werden?

- **Wichtige Änderungen in der Aussagenlogik**

$$\begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & \boxed{R^T} \end{bmatrix} & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{bmatrix}$$

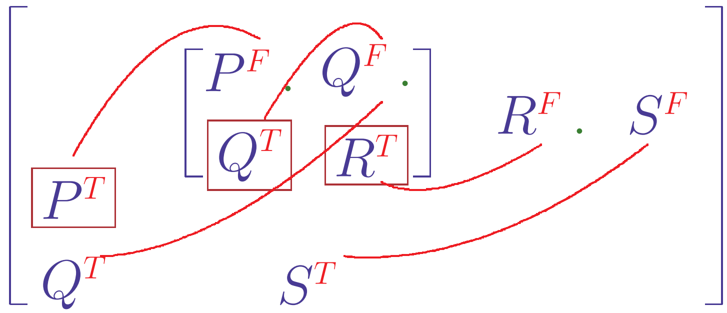
  - Welche Literale gehören zum aktuellen Pfad?
  - Was ist die "aktuelle Klausel"?
  - Extension: Welcher Teil der Matrix kann noch konnektiert werden?

- **Wichtige Änderungen in der Aussagenlogik**

$$\begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & \boxed{R^T} \end{bmatrix} & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{bmatrix}$$

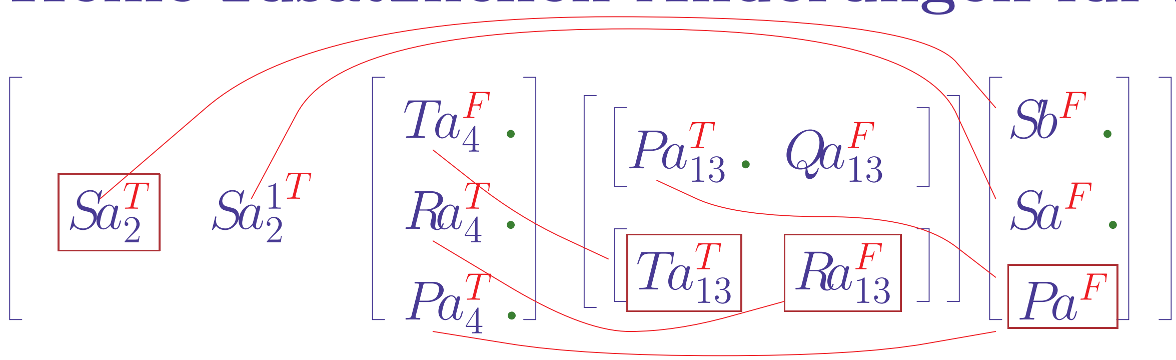
  - Welche Literale gehören zum aktuellen Pfad?
  - Was ist die “aktuelle Klausel”?
  - Extension: Welcher Teil der Matrix kann noch konnektiert werden?
  - Bereinigung: Wann ist eine “Klausel” abgeschlossen

- **Wichtige Änderungen in der Aussagenlogik**



  - Welche Literale gehören zum aktuellen Pfad?
  - Was ist die "aktuelle Klausel"?
  - Extension: Welcher Teil der Matrix kann noch konnektiert werden?
  - Bereinigung: Wann ist eine "Klausel" abgeschlossen

- **Keine zusätzlichen Änderungen für Prädikatenlogik**



$[b/a_2, a/a_2^1, a/a_{13}, a/a_4]$

Grundkonzepte des Matrixkalküls wiederholt

$$\begin{bmatrix} Sa_2^T & Sa_2^{1\,T} & \begin{bmatrix} Ta_4^F \\ Ra_4^T \\ Pa_4^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Pa_{13}^T & Qa_{13}^F \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Ta_{13}^T & Ra_{13}^F \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Sb^F \\ Sa^F \\ Pa^F \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

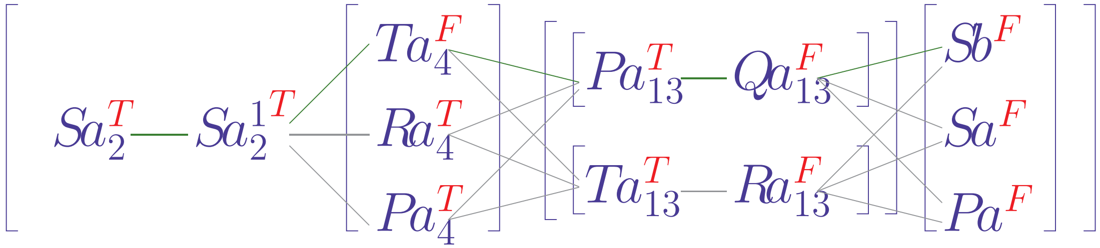
- **α/β-Beziehung zwischen Literalen**
  - $\boldsymbol{u \sim_\alpha v}$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ α
  - $\boldsymbol{u \sim_\beta v}$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ β

Grundkonzepte des Matrixkalküls wiederholt

$$\begin{bmatrix} Sa_2^T & {Sa_2^1}^T & \begin{bmatrix} Ta_4^F \\ Ra_4^T \\ Pa_4^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Pa_{13}^T & Qa_{13}^F \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Ta_{13}^T & Ra_{13}^F \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Sb^F \\ Sa^F \\ Pa^F \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

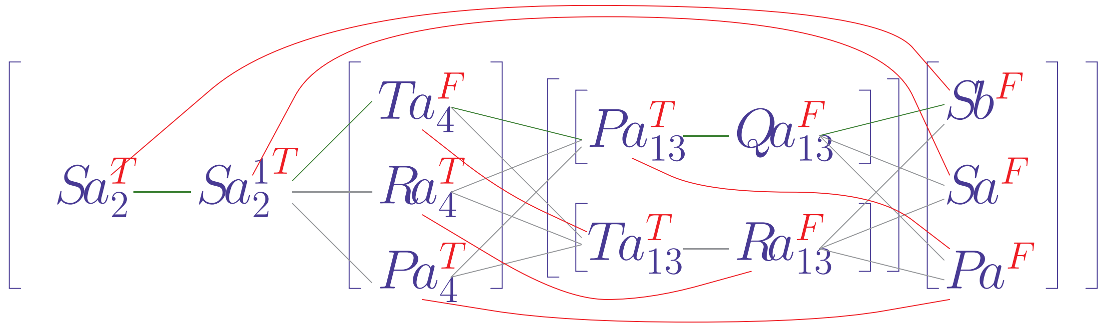
- **α/β-Beziehung zwischen Literalen**
  - $\boldsymbol{u{\sim_\alpha}v}$: $u{\neq}v$ und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ α
  - $\boldsymbol{u{\sim_\beta}v}$: $u{\neq}v$ und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ β
- **Matrix (der Tiefe n)**
  - Literal oder Menge von Matrizen der maximalen Tiefe n-1
  - Submatrizen stehen in α- bzw. β-Beziehung (gerade/ungerade Tiefe)
  - Präsentation: α-Beziehungen nebeneinander, β-Beziehungen übereinander

Grundkonzepte des Matrixkalküls wiederholt



- **α/β-Beziehung zwischen Literalen**
  - $\boldsymbol{u{\sim_\alpha}v}$: $u{\neq}v$ und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ α
  - $\boldsymbol{u{\sim_\beta}v}$: $u{\neq}v$ und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ β
- **Matrix (der Tiefe n)**
  - Literal oder Menge von Matrizen der maximalen Tiefe n-1
  - Submatrizen stehen in α- bzw. β-Beziehung (gerade/ungerade Tiefe)
  - Präsentation: α-Beziehungen nebeneinander, β-Beziehungen übereinander
- **Pfad**
  - (Maximale) Menge von Literalen in gegenseitiger α-Beziehung
  - Implementierung verwendet induktive Definition auf Formelbaum

Grundkonzepte des Matrixkalküls wiederholt



- **α/β-Beziehung zwischen Literalen**
  - $\boldsymbol{u{\sim_\alpha}v}$: $u{\neq}v$ und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ α
  - $\boldsymbol{u{\sim_\beta}v}$: $u{\neq}v$ und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ β
- **Matrix (der Tiefe n)**
  - Literal oder Menge von Matrizen der maximalen Tiefe n-1
  - Submatrizen stehen in α- bzw. β-Beziehung (gerade/ungerade Tiefe)
  - Präsentation: α-Beziehungen nebeneinander, β-Beziehungen übereinander
- **Pfad**
  - (Maximale) Menge von Literalen in gegenseitiger α-Beziehung
  - Implementierung verwendet induktive Definition auf Formelbaum
- **σ-komplementäre Konnektion**
  - Paar $\{X_1{}^T, X_2{}^F\}$ von Literalen, deren Formeln unter σ gleich sind

Allgemeines Extensionsverfahren: Grundkonzepte

- **Aktueller (aktiver) Pfad $\mathcal{P}$**
  - Nichtkomplementäre Menge von Literalen in gegenseitiger α-Beziehung

Allgemeines Extensionsverfahren: Grundkonzepte

- **Aktueller (aktiver) Pfad $\mathcal{P}$**
  – Nichtkomplementäre Menge von Literalen in gegenseitiger α-Beziehung
- **Offene Teilmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$** $\hat{=}$ ungenutzter Teil der Matrix
  – Menge von Literalen, die zum aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ in α-Beziehung stehen

Allgemeines Extensionsverfahren: Grundkonzepte

- **Aktueller (aktiver) Pfad $\mathcal{P}$**
  - Nichtkomplementäre Menge von Literalen in gegenseitiger α-Beziehung
- **Offene Teilmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$** $\hat{=}$ ungenutzter Teil der Matrix
  - Menge von Literalen, die zum aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ in α-Beziehung stehen
- **Teilziel** $\hat{=}$ (Teil-)Klausel
  - Menge von Literalen in gegenseitiger β-Beziehung
  - $C_\beta(L, \mathcal{P})$: maximales Teilziel in $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, das L enthält $\hat{=}$ Klausel von L

Allgemeines Extensionsverfahren: Grundkonzepte

- **Aktueller (aktiver) Pfad $\mathcal{P}$**
  - Nichtkomplementäre Menge von Literalen in gegenseitiger α-Beziehung
- **Offene Teilmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$** $\hat{=}$ ungenutzter Teil der Matrix
  - Menge von Literalen, die zum aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ in α-Beziehung stehen
- **Teilziel** $\hat{=}$ (Teil-)Klausel
  - Menge von Literalen in gegenseitiger β-Beziehung
  - $\boldsymbol{C_\beta(L, \mathcal{P})}$: maximales Teilziel in $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, das L enthält $\hat{=}$ Klausel von L
- **Aktuelles (aktives) Teilziel $\mathcal{C}$** (zu $\mathcal{P}$)
  $\hat{=}$ abgeschlossene Literale der aktuellen Klausel
  - Teilziel, das ausschließlich aus Literalen der offenen Teilmatrix besteht

Allgemeines Extensionsverfahren: Grundkonzepte

- **Aktueller (aktiver) Pfad $\mathcal{P}$**
  - Nichtkomplementäre Menge von Literalen in gegenseitiger α-Beziehung
- **Offene Teilmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$** $\hat{=}$ ungenutzter Teil der Matrix
  - Menge von Literalen, die zum aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ in α-Beziehung stehen
- **Teilziel** $\hat{=}$ (Teil-)Klausel
  - Menge von Literalen in gegenseitiger β-Beziehung
  - $C_\beta(L,\mathcal{P})$: maximales Teilziel in $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, das L enthält $\hat{=}$ Klausel von L
- **Aktuelles (aktives) Teilziel $\mathcal{C}$** (zu $\mathcal{P}$) $\hat{=}$ abgeschlossene Literale der aktuellen Klausel
  - Teilziel, das ausschließlich aus Literalen der offenen Teilmatrix besteht
- **Aktives Ziel $(\mathcal{P},\mathcal{C})$**
  - Aktueller Pfad $\mathcal{P}$ und passendes aktuelles Teilziel $\mathcal{C}$

Allgemeines Extensionsverfahren: Grundkonzepte

- **Aktueller (aktiver) Pfad $\mathcal{P}$**
  - Nichtkomplementäre Menge von Literalen in gegenseitiger α-Beziehung
- **Offene Teilmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$** $\hat{=}$ ungenutzter Teil der Matrix
  - Menge von Literalen, die zum aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ in α-Beziehung stehen
- **Teilziel** $\hat{=}$ (Teil-)Klausel
  - Menge von Literalen in gegenseitiger β-Beziehung
  - $C_\beta(L,\mathcal{P})$: maximales Teilziel in $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, das L enthält $\hat{=}$ Klausel von L
- **Aktuelles (aktives) Teilziel $\mathcal{C}$** (zu $\mathcal{P}$) $\hat{=}$ abgeschlossene Literale der aktuellen Klausel
  - Teilziel, das ausschließlich aus Literalen der offenen Teilmatrix besteht
- **Aktives Ziel $(\mathcal{P},\mathcal{C})$**
  - Aktueller Pfad $\mathcal{P}$ und passendes aktuelles Teilziel $\mathcal{C}$
- **Offenes Ziel $\mathcal{E}$** (zu $(\mathcal{P},\mathcal{C})$) $\hat{=}$ offene Literale der aktuellen Klausel
  - Menge der Literale der offenen Teilmatrix, die zu $\mathcal{C}$ in β-Beziehung stehen
  - Eindeutig durch die Matrix und das aktive Ziel $(\mathcal{P},\mathcal{C})$ bestimmt

Extensionsschritt auf Nicht-Normalform-Matrizen

$$\begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ \boxed{P^T} & & & \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ markiert **aktuelle “Klausel”**

$\nearrow$ markiert Literale des offenen Ziels $\mathcal{E}$

$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades** $\mathcal{P}$

. markiert abgeschlossene Teilpfade

Extensionsschritt auf Nicht-Normalform-Matrizen

$$\begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ \boxed{P^T} & & & \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ markiert **aktuelle "Klausel"**

$\nearrow$ markiert Literale des offenen Ziels $\mathcal{E}$

$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades $\mathcal{P}$**

. markiert abgeschlossene Teilpfade

---

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ offenen Ziels $\mathcal{E}$ markiert mit $\nearrow$

Extensionsschritt auf Nicht-Normalform-Matrizen

$$\left[\begin{array}{cccc} \boxed{P^T} & \left[\begin{array}{cc} P^F\,. & Q^F\,. \\ \boxed{Q^T} & R^T \end{array}\right] & R^F & S^F \\ Q^T & S^T & & \end{array}\right] \quad \vdash \quad \left[\begin{array}{cccc} \boxed{P^T} & \left[\begin{array}{cc} P^F\,. & Q^F\,. \\ \boxed{Q^T} & \boxed{R^T} \end{array}\right] & R^F & S^F \\ Q^T & S^T & & \end{array}\right]$$

$\uparrow$ markiert **aktuelle "Klausel"**

$\nearrow$ markiert Literale des offenen Ziels $\mathcal{E}$

$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades $\mathcal{P}$**

. markiert abgeschlossene Teilpfade

---

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ offenen Ziels $\mathcal{E}$ — markiert mit $\nearrow$
2. Erweitere den aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ um L — markiere mit Box $\boxed{L}$

Extensionsschritt auf Nicht-Normalform-Matrizen

$$\begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & \boxed{R^T} \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix}$$

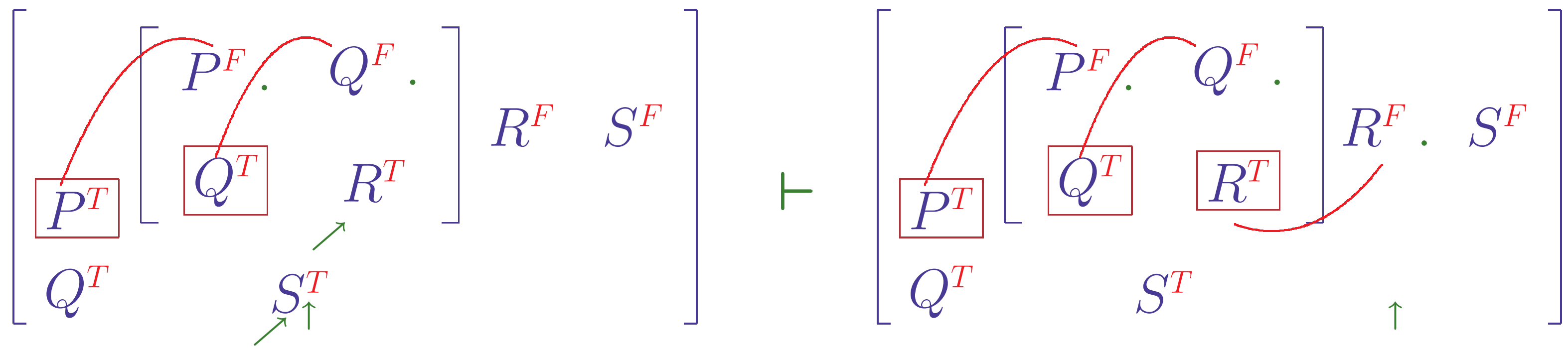
$\uparrow$ markiert **aktuelle "Klausel"** $\nearrow$ markiert Literale des offenen Ziels $\mathcal{E}$

$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades** $\mathcal{P}$. markiert abgeschlossene Teilpfade

---

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ offenen Ziels $\mathcal{E}$ markiert mit $\nearrow$
2. Erweitere den aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ um L markiere mit Box $\boxed{L}$
3. Wähle ein mit L konnektiertes Literal $\bar{L}$ der offenen Teilmatrix
   Vermerke Alternativen in Alternativenmenge

Extensionsschritt auf Nicht-Normalform-Matrizen



$\uparrow$ markiert **aktuelle "Klausel"**

$\nearrow$ markiert Literale des offenen Ziels $\mathcal{E}$

$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades $\mathcal{P}$**

. markiert abgeschlossene Teilpfade

---

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P},\mathcal{C})$ offenen Ziels $\mathcal{E}$ markiert mit $\nearrow$
2. Erweitere den aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ um L markiere mit Box $\boxed{L}$
3. Wähle ein mit L konnektiertes Literal $\bar{L}$ der offenen Teilmatrix
   Vermerke Alternativen in Alternativenmenge
4. Wähle Teilmenge $\mathcal{C}$ der zu $\bar{L}$ in β-Beziehung stehenden Literale, die mit dem aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ konnektiert sind, und eine Substitution ρ, welche die mit σ modifizierten Konnektionen komplementär macht markiere mit .
   – Erweitere σ mit ρ; vermerke alternative Teilmengen und Substitutionen
   – Breche den Extensionsschritt ab, falls es keine solche Teilmenge gibt

Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen

$$\left[\begin{array}{cccc} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ P^T & & & \\ Q^T & S^T & & \end{array}\right]$$

Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen

$$\begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ P^T & & & \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ \boxed{P^T} & & & \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix}$$

Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen

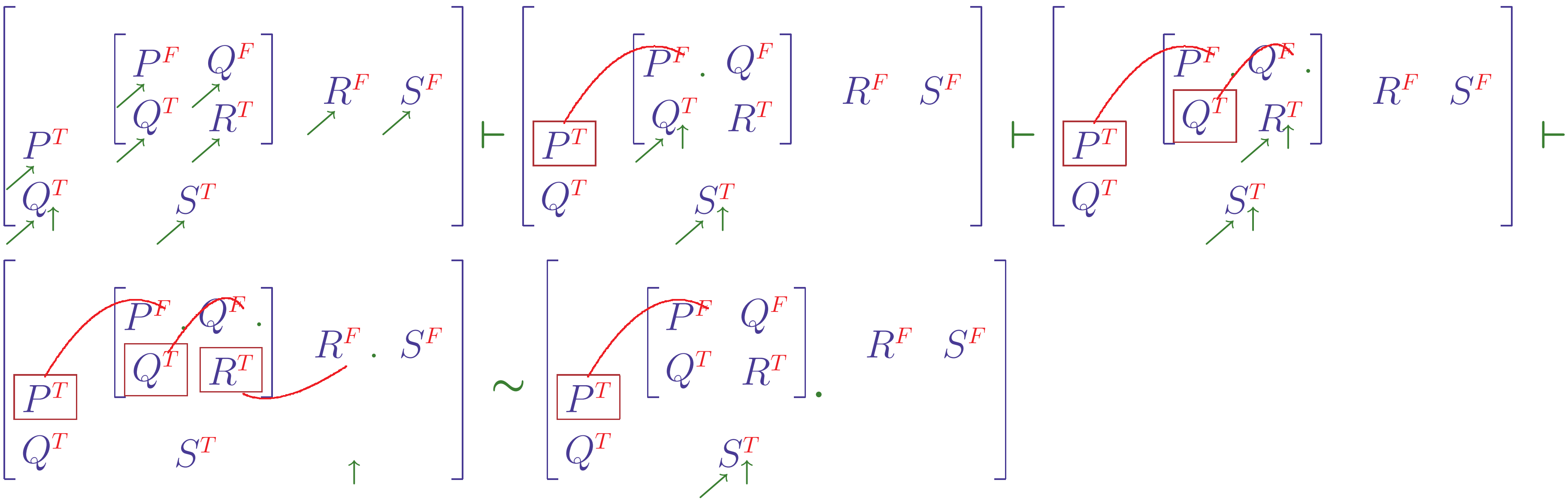
$$\begin{bmatrix} P^T & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix}$$

Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen

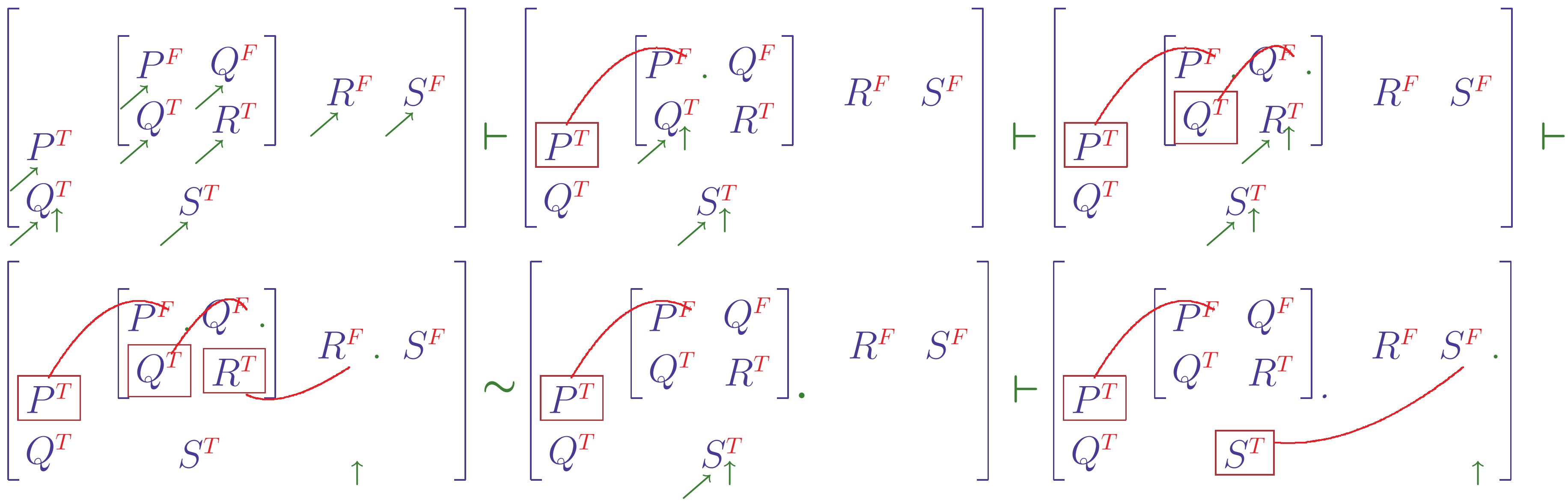
$$\begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ P^T & & & \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ \boxed{P^T} & & & \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ \boxed{P^T} & & & \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix} \vdash$$

$$\begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & \boxed{R^T} \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ \boxed{P^T} & & & \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix}$$

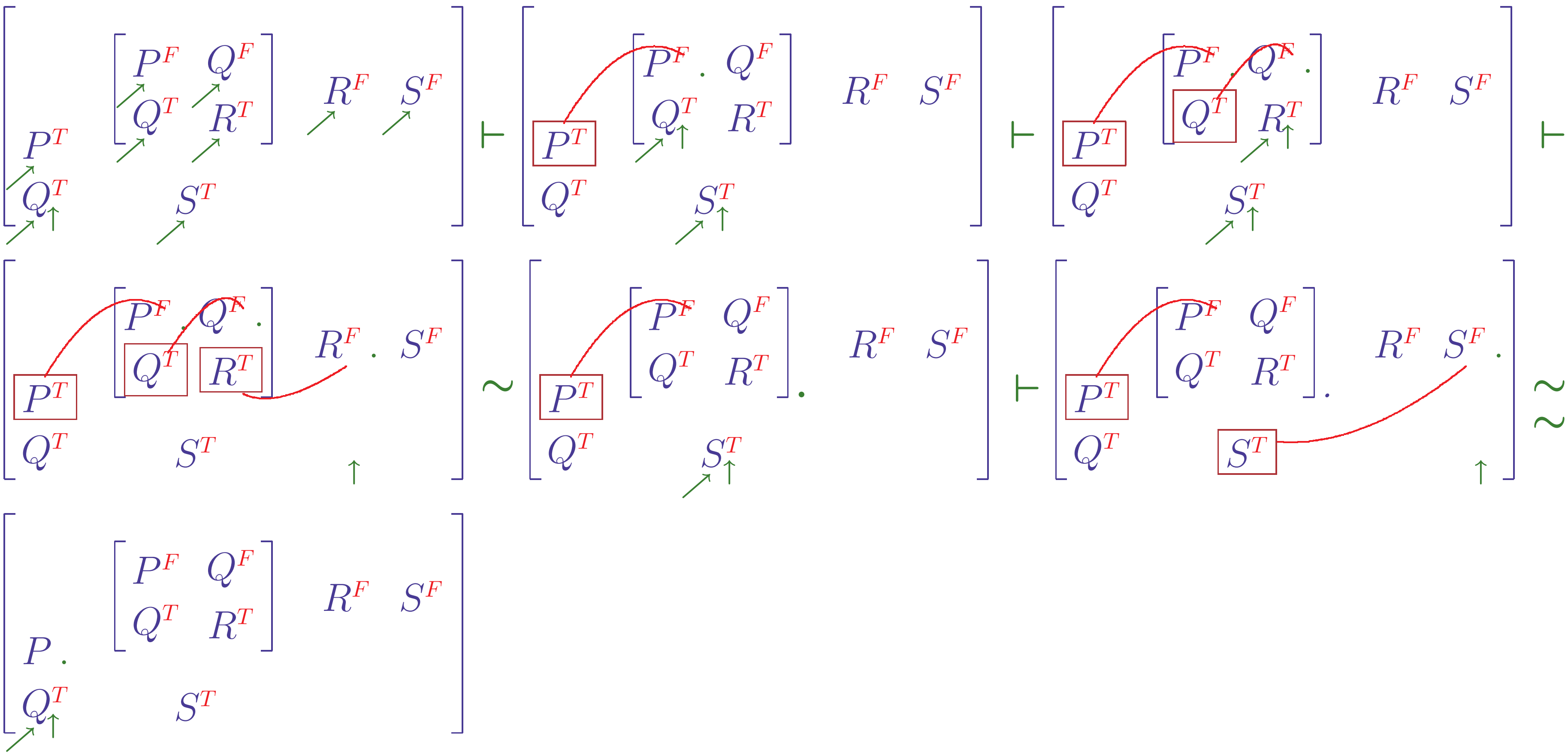
Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen



Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen



Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen



Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen

$$\begin{bmatrix} P^T & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & R^T \end{bmatrix} & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{bmatrix} \vdash$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & \boxed{R^T} \end{bmatrix} & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F \quad S^F \\ Q^T & \boxed{S^T} & \end{bmatrix} \approx$$

$$\begin{bmatrix} P & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} P & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ Q^T & R^T \end{bmatrix} & R^F \quad S^F \\ \boxed{Q^T} & S^T & \end{bmatrix}$$

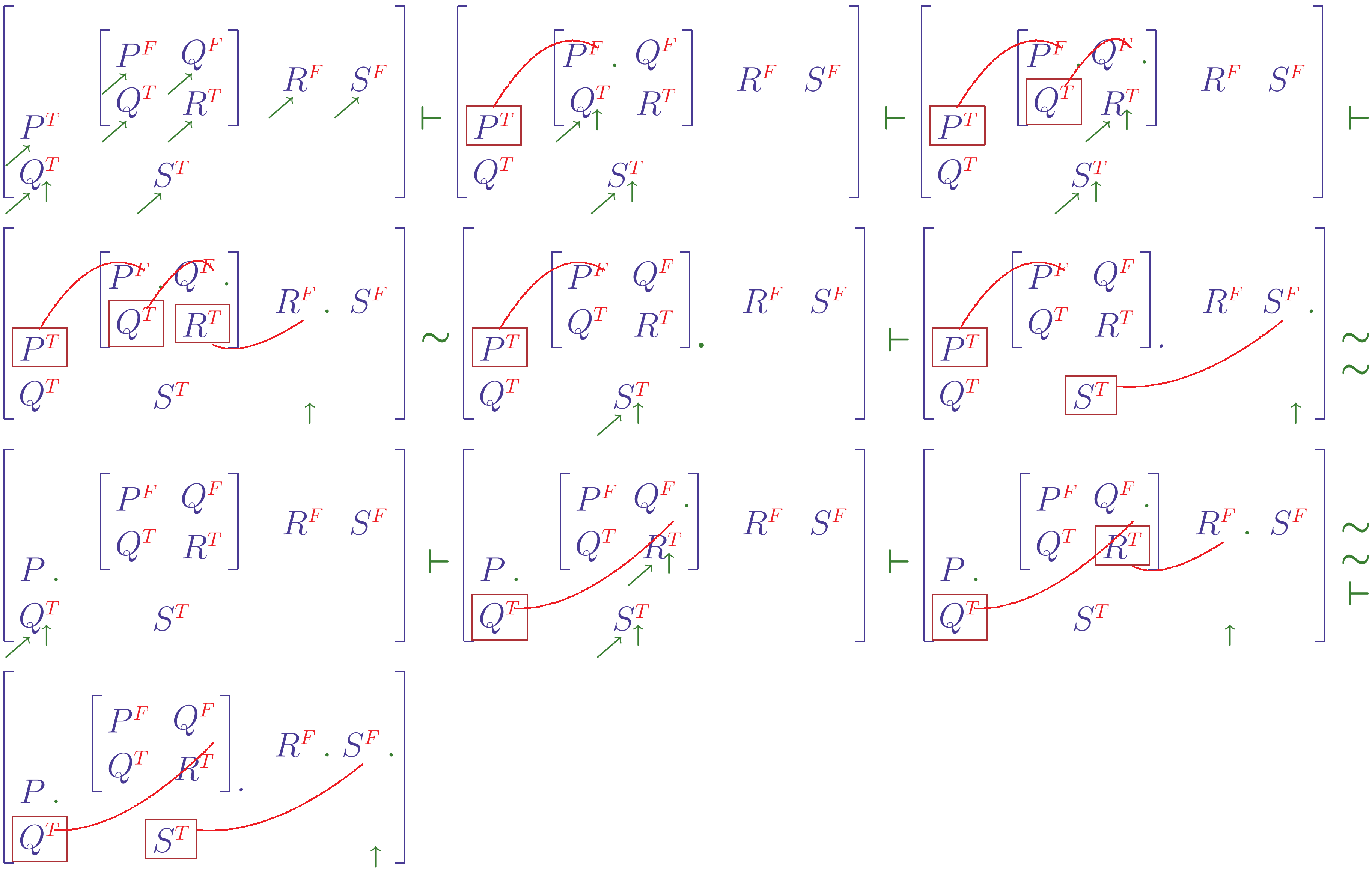
Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen

$$\left[\begin{array}{ccc} P^T & \left[\begin{array}{cc}P^F & Q^F\\ Q^T & R^T\end{array}\right] & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{array}\right] \vdash \left[\begin{array}{ccc} \boxed{P^T} & \left[\begin{array}{cc}P^F & Q^F\\ Q^T & R^T\end{array}\right] & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{array}\right] \vdash \left[\begin{array}{ccc} \boxed{P^T} & \left[\begin{array}{cc}P^F & Q^F\\ \boxed{Q^T} & R^T\end{array}\right] & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{array}\right] \vdash$$

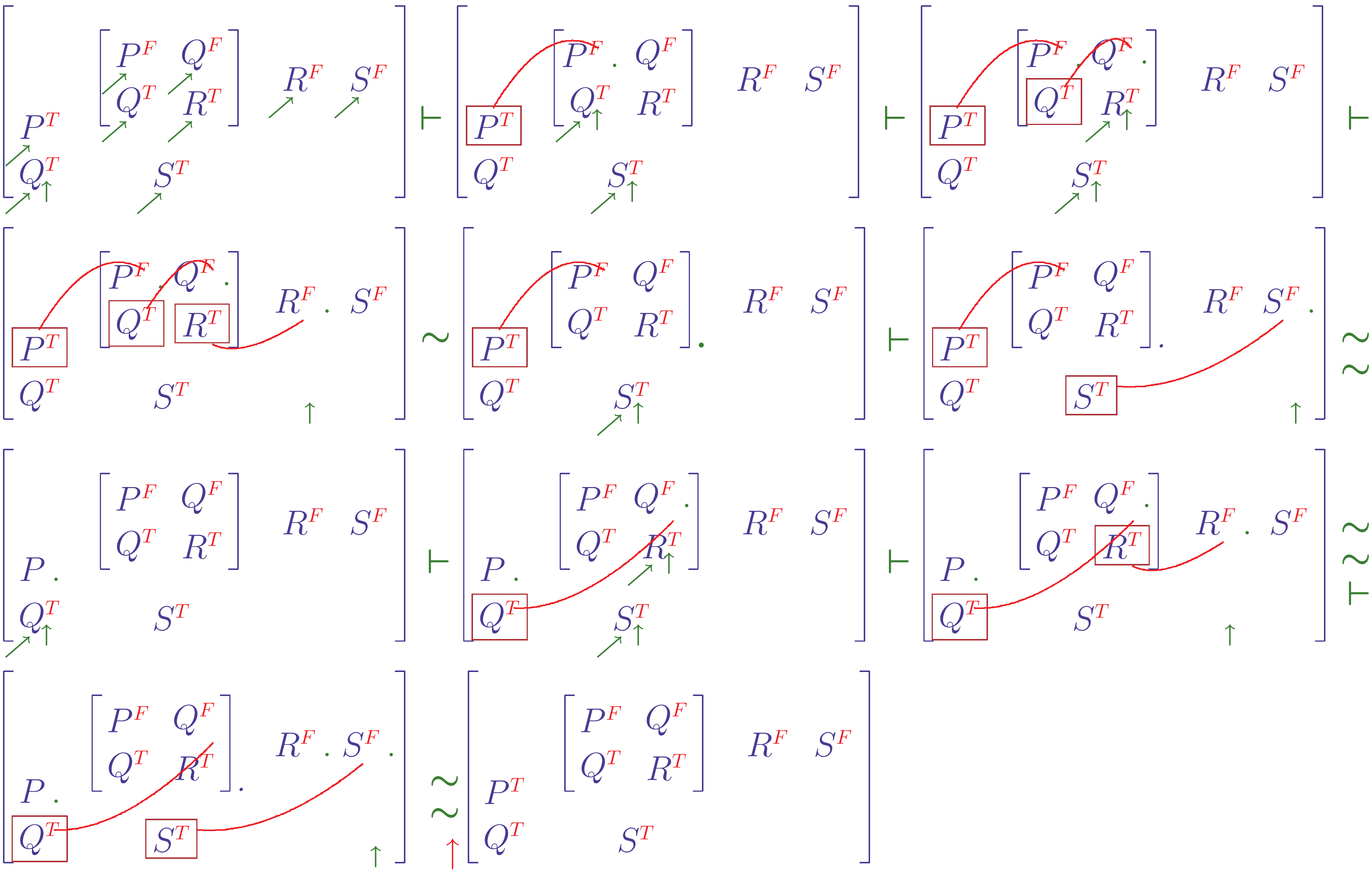
$$\left[\begin{array}{ccc} \boxed{P^T} & \left[\begin{array}{cc}P^F & Q^F\\ \boxed{Q^T} & \boxed{R^T}\end{array}\right] & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} \boxed{P^T} & \left[\begin{array}{cc}P^F & Q^F\\ Q^T & R^T\end{array}\right] & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{array}\right] \vdash \left[\begin{array}{ccc} \boxed{P^T} & \left[\begin{array}{cc}P^F & Q^F\\ Q^T & R^T\end{array}\right] & R^F \quad S^F \\ Q^T & \boxed{S^T} & \end{array}\right] \approx$$

$$\left[\begin{array}{ccc} P & \left[\begin{array}{cc}P^F & Q^F\\ Q^T & R^T\end{array}\right] & R^F \quad S^F \\ Q^T & S^T & \end{array}\right] \vdash \left[\begin{array}{ccc} P & \left[\begin{array}{cc}P^F & Q^F\\ Q^T & R^T\end{array}\right] & R^F \quad S^F \\ \boxed{Q^T} & S^T & \end{array}\right] \vdash \left[\begin{array}{ccc} P & \left[\begin{array}{cc}P^F & Q^F\\ Q^T & \boxed{R^T}\end{array}\right] & R^F \quad S^F \\ \boxed{Q^T} & S^T & \end{array}\right]$$

Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen



Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen



Ein uniformes Verfahren für Formelbäume

- **CP_1^1-ähnliches Beweisverfahren ist kompliziert**
  – Trickreiche Erweiterung des klauselbasierten Verfahrens $\mapsto$ Bibel 1987
  – Schwer als korrekt und vollständig zu beweisen

Ein uniformes Verfahren für Formelbäume

- **CP_1^1-ähnliches Beweisverfahren ist kompliziert**
  - Trickreiche Erweiterung des klauselbasierten Verfahrens $\mapsto$ Bibel 1987
  - Schwer als korrekt und vollständig zu beweisen

- **2-D Matrizen sind nur eine Illustration**
  - Markierungen $\uparrow$, $\nearrow$ $\boxed{L}$, . sind nur optische Hilfsmittel
  - Implementiertes Verfahren verarbeitet Verwaltungsvariablen
    für aktuelle Pfade, offene Ziele, offene Teilmatrix, Konnektionen, etc

Ein uniformes Verfahren für Formelbäume

- **CP_1^1-ähnliches Beweisverfahren ist kompliziert**
  – Trickreiche Erweiterung des klauselbasierten Verfahrens $\mapsto$ Bibel 1987
  – Schwer als korrekt und vollständig zu beweisen
- **2-D Matrizen sind nur eine Illustration**
  – Markierungen $\uparrow$, $\nearrow$ $\boxed{L}$, . sind nur optische Hilfsmittel
  – Implementiertes Verfahren verarbeitet Verwaltungsvariablen
  für aktuelle Pfade, offene Ziele, offene Teilmatrix, Konnektionen, etc
- **Beschreibe Prozedur mit Formelbaumkonzepten**
  – Herleitung des Verfahrens direkt aus dem Charakterisierungstheorem
  – Korrektheit und Vollständigkeit “leicht” zu beweisen
  – Methodik auch jenseits von Prädikatenlogik erster Stufe anwendbar

Ein uniformes Verfahren für Formelbäume

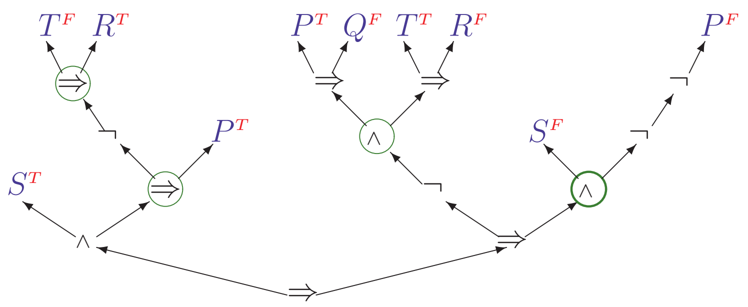
- **CP_1^1-ähnliches Beweisverfahren ist kompliziert**
  – Trickreiche Erweiterung des klauselbasierten Verfahrens $\mapsto$ Bibel 1987
  – Schwer als korrekt und vollständig zu beweisen

- **2-D Matrizen sind nur eine Illustration**
  – Markierungen $\uparrow$, $\nearrow$ $\boxed{L}$, . sind nur optische Hilfsmittel
  – Implementiertes Verfahren verarbeitet Verwaltungsvariablen
  für aktuelle Pfade, offene Ziele, offene Teilmatrix, Konnektionen, etc

- **Beschreibe Prozedur mit Formelbaumkonzepten**
  – Herleitung des Verfahrens direkt aus dem Charakterisierungstheorem
  – Korrektheit und Vollständigkeit "leicht" zu beweisen
  – Methodik auch jenseits von Prädikatenlogik erster Stufe anwendbar

Details in Fachaufsätzen auf der Veranstaltungswebseite

Reformulierung des Extensionsschritts

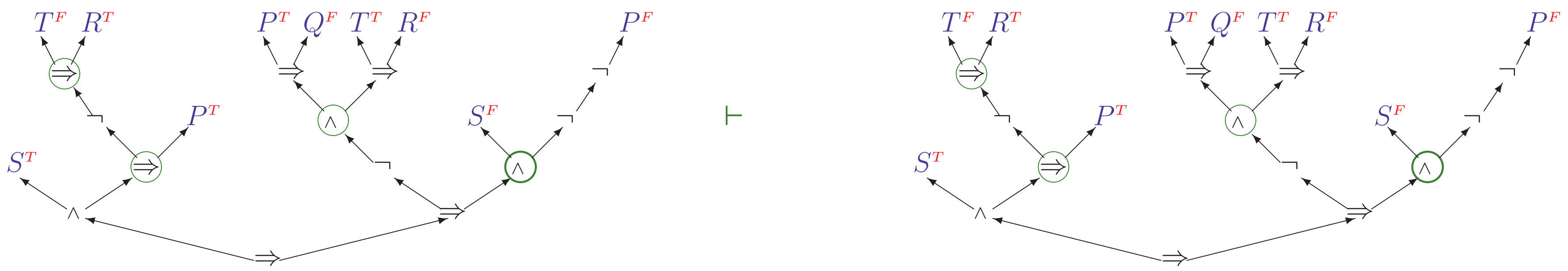


$\mathcal{P} = \{\}$

$\mathcal{C} = \{\}$

$\mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^{\,T}, P_2^{\,T}, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

Reformulierung des Extensionsschritts



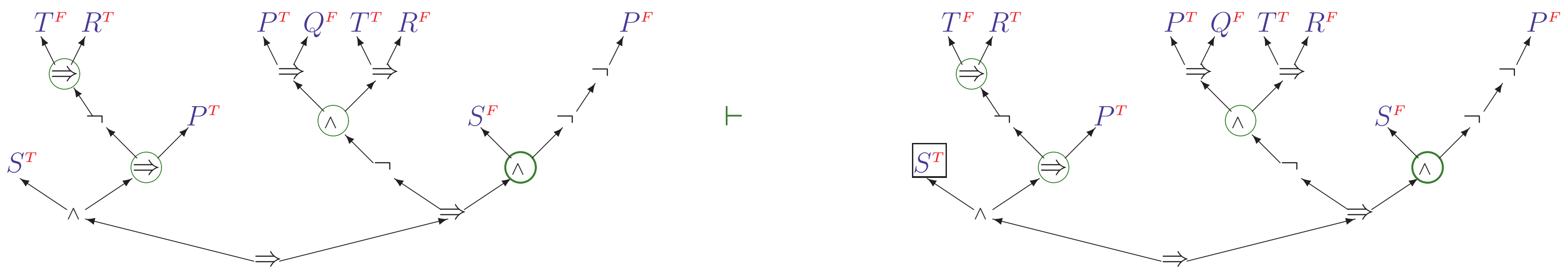
$\mathcal{P} = \{\}$ $\quad L = S^T,$

$\mathcal{C} = \{\}$

$\mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ offenen Ziels $\mathcal{E}$

Reformulierung des Extensionsschritts



$\mathcal{P} = \{\}$ $\qquad L = S^T, \quad \mathcal{P} = \{S^T\},\ \mathcal{M}_\mathcal{P} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

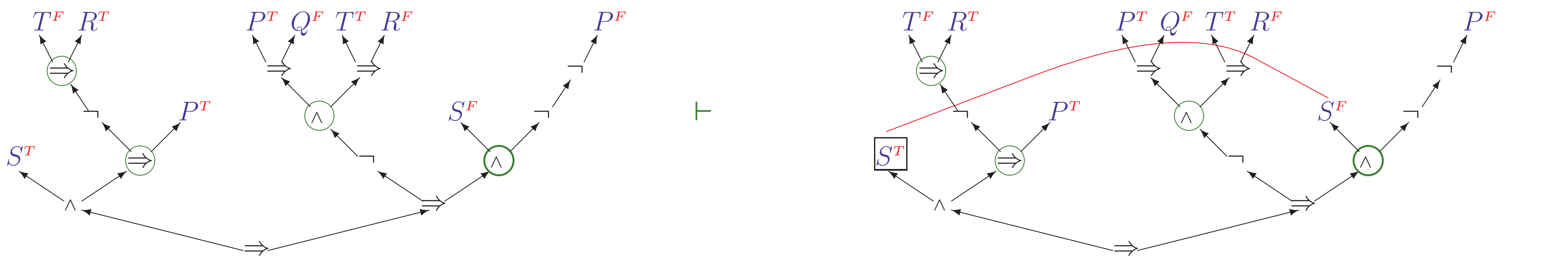
$\mathcal{C} = \{\}$

$\mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

---

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ offenen Ziels $\mathcal{E}$
2. Erweitere den aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ um L

Reformulierung des Extensionsschritts



$\mathcal{P} = \{\}$

$\mathcal{C} = \{\}$

$\mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

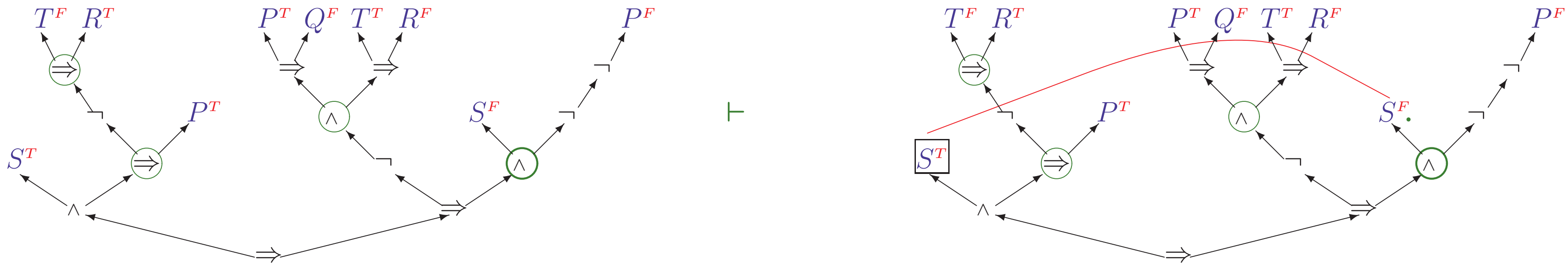
$L = S^T, \quad \mathcal{P} = \{S^T\}, \ \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

$\bar{L} = S^F, \quad C_\beta(\bar{L}) = \{S^F, P^F\},$

---

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ offenen Ziels $\mathcal{E}$
2. Erweitere den aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ um L
3. Wähle ein mit L konnektiertes Literal $\bar{L}$ der offenen Teilmatrix
   Vermerke Alternativen in Alternativenmenge

Reformulierung des Extensionsschritts



$\mathcal{P} = \{\}$

$\mathcal{C} = \{\}$

$\mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

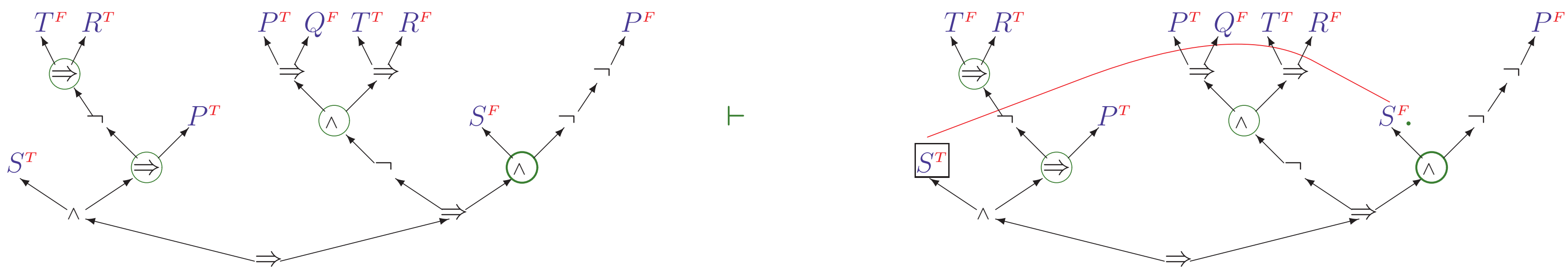
$L = S^T, \quad \mathcal{P} = \{S^T\}, \ \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

$\bar{L} = S^F, \quad C_\beta(\bar{L}) = \{S^F, P^F\}, \quad \mathcal{C} = \{S^F\}$

---

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ offenen Ziels $\mathcal{E}$
2. Erweitere den aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ um L
3. Wähle ein mit L konnektiertes Literal $\bar{L}$ der offenen Teilmatrix
   Vermerke Alternativen in Alternativenmenge
4. Wähle Teilmenge $\mathcal{C}$ der Literale von $C_\beta(\bar{L}, \mathcal{P})$, die mit dem aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ konnektiert sind, und eine Substitution ρ, welche die mit σ modifizierten Konnektionen komplementär macht
   – Erweitere σ mit ρ und vermerke alternative Teilmengen und Substitutionen
   – Breche den Extensionsschritt ab, falls es keine solche Teilmenge gibt

Reformulierung des Extensionsschritts



$\mathcal{P} = \{\}$

$\mathcal{C} = \{\}$

$\mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

$L = S^T, \quad \mathcal{P} = \{S^T\}, \ \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

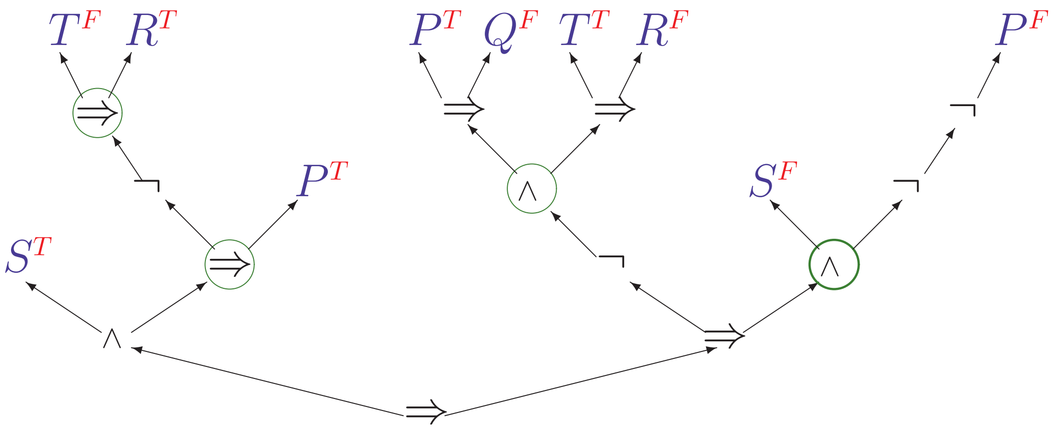
$\bar{L} = S^F, \quad C_\beta(\bar{L}) = \{S^F, P^F\}, \quad \mathcal{C} = \{S^F\}$

$\mathcal{E} = \{P^F\}$

---

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ offenen Ziels $\mathcal{E}$
2. Erweitere den aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ um L
3. Wähle ein mit L konnektiertes Literal $\bar{L}$ der offenen Teilmatrix
   Vermerke Alternativen in Alternativenmenge
4. Wähle Teilmenge $\mathcal{C}$ der Literale von $C_\beta(\bar{L}, \mathcal{P})$, die mit dem aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ konnektiert sind, und eine Substitution ρ, welche die mit σ modifizierten Konnektionen komplementär macht
   - Erweitere σ mit ρ und vermerke alternative Teilmengen und Substitutionen
   - Breche den Extensionsschritt ab, falls es keine solche Teilmenge gibt

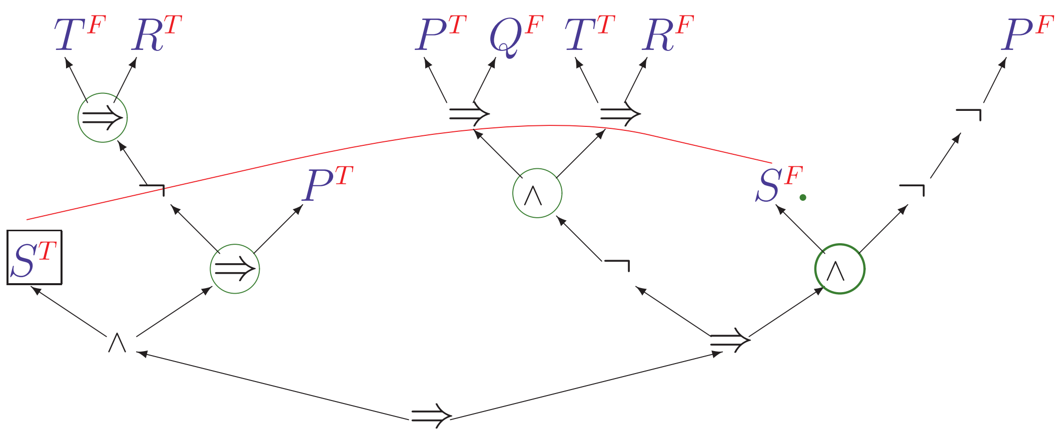
Extensionsbeweis auf Formelbäumen am Beispiel



$$\left[\begin{matrix} S^T & \begin{bmatrix} T^F \\ R^T \\ P^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T & Q^F \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} T^T & R^F \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S^F \\ P^F \end{bmatrix} \end{matrix}\right]$$

Start	$\mathcal{P} = \{\}$ $\quad$ $\mathcal{C} = \{\}$ $\quad$ $\mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	
Zweiter Schritt	
Dritter Schritt	
Vierter Schritt	

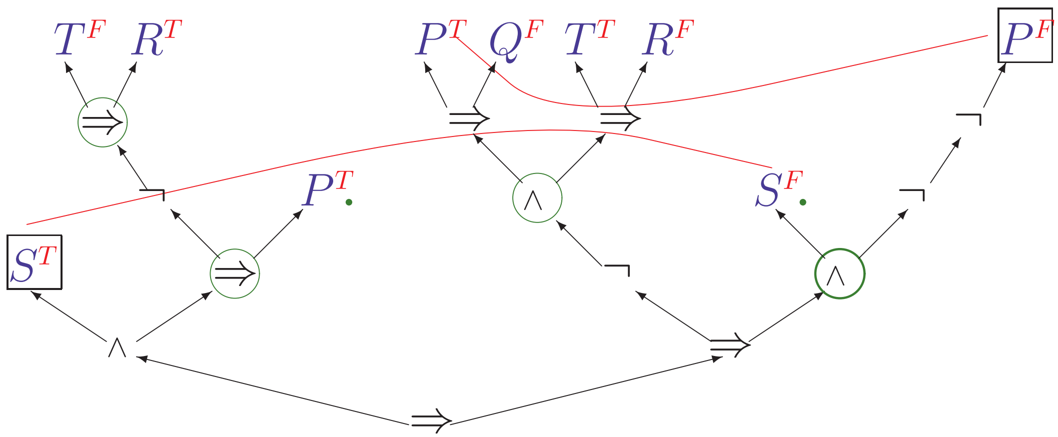
Extensionsbeweis auf Formelbäumen am Beispiel



$$\begin{bmatrix} S^T & \begin{bmatrix} T^F \\ R^T \\ P^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [P^T \quad Q^F] \\ \\ [T^T \quad R^F] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S^F \\ P^F \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Start	$\mathcal{P} = \{\}$ $\quad \mathcal{C} = \{\}$ $\quad \mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	$L = S^T,\ \mathcal{P} = \{S^T\},\ \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$ $\bar{L} = S^F,\ \ C_\beta(\bar{L}) = \{S^F, P^F\},\ \mathcal{C} = \{S^F\},\ \mathcal{E} = \{P^F\}$
Zweiter Schritt	
Dritter Schritt	
Vierter Schritt	

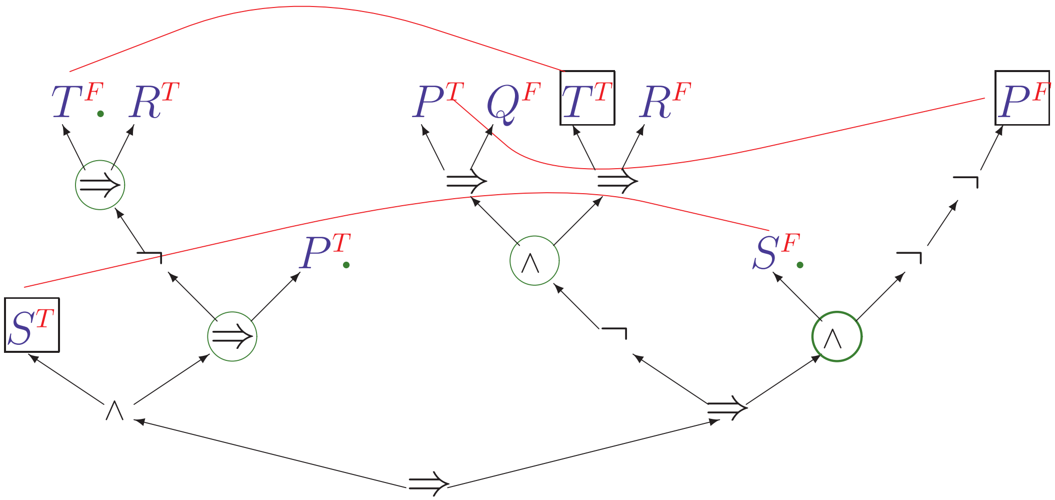
Extensionsbeweis auf Formelbäumen am Beispiel



$$\begin{bmatrix} S^T & \begin{bmatrix} T^F \\ R^T \\ P^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [P^T \quad Q^F] \\ \\ [T^T \quad R^F] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S^F \\ P^F \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Start	$\mathcal{P} = \{\}$ $\quad \mathcal{C} = \{\}$ $\quad \mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	$L = S^T,\ \mathcal{P} = \{S^T\},\ \mathcal{M}_\mathcal{P} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$ $\bar{L} = S^F,\ \ C_\beta(\bar{L}) = \{S^F, P^F\},\ \mathcal{C} = \{S^F\},\ \mathcal{E} = \{P^F\}$
Zweiter Schritt	$L = P^F,\ \mathcal{P} = \{S^T, P^F\},\ \mathcal{M}_\mathcal{P} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F\}$ $\bar{L} = P_2^T,\ \ C_\beta(\bar{L}) = \{P_2^T, T^T, R^F\},\ \mathcal{C} = \{P_2^T\},\ \mathcal{E} = \{T^T, R^F\}$
Dritter Schritt	
Vierter Schritt	

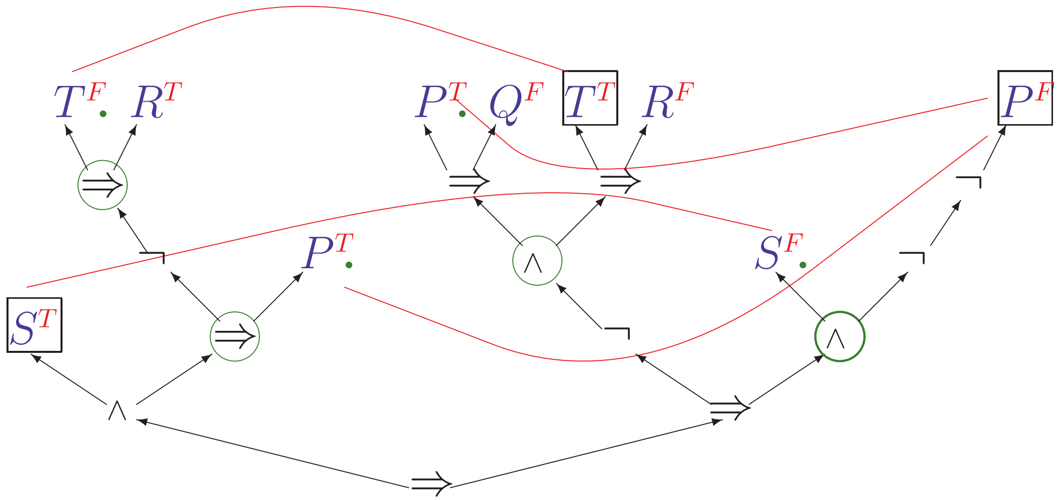
Extensionsbeweis auf Formelbäumen am Beispiel

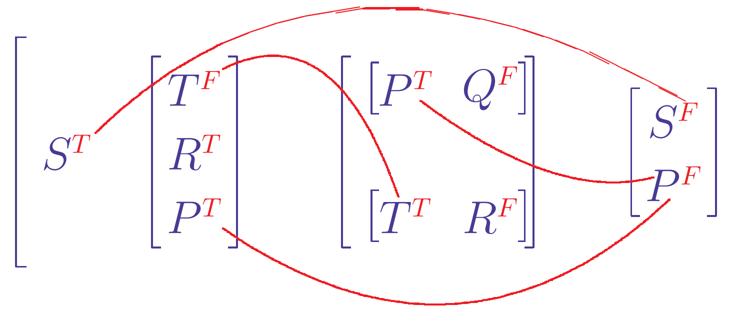


$$\begin{bmatrix} S^T & \begin{bmatrix} T^F \\ R^T \\ P^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T & Q^F \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T^T & R^F \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S^F \\ P^F \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Start	$\mathcal{P} = \{\}$ $\quad \mathcal{C} = \{\}$ $\quad \mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	$L = S^T,\ \mathcal{P} = \{S^T\},\ \mathcal{M}_\mathcal{P} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$ $\bar{L} = S^F,\ \ C_\beta(\bar{L}) = \{S^F, P^F\},\ \mathcal{C} = \{S^F\},\ \mathcal{E} = \{P^F\}$
Zweiter Schritt	$L = P^F,\ \mathcal{P} = \{S^T, P^F\},\ \mathcal{M}_\mathcal{P} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F\}$ $\bar{L} = P_2^T,\ \ C_\beta(\bar{L}) = \{P_2^T, T^T, R^F\},\ \mathcal{C} = \{P_2^T\},\ \mathcal{E} = \{T^T, R^F\}$
Dritter Schritt	$L = T^T,\ \mathcal{P} = \{S^T, P^F, T^T\},\ \mathcal{M}_\mathcal{P} = \{T^F, R^T, P_1^T, R^F\}$ $\bar{L} = T^F,\ \ C_\beta(\bar{L}) = \{T^F, R^T, P^T\},$
Vierter Schritt	

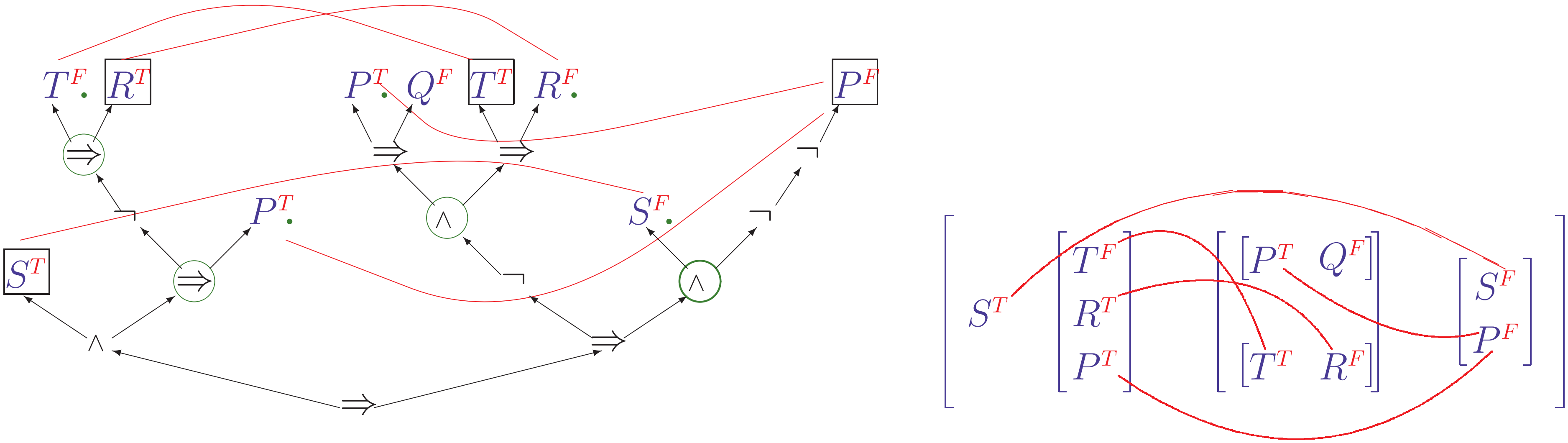
Extensionsbeweis auf Formelbäumen am Beispiel





Start	$\mathcal{P}=\{\}\qquad \mathcal{C}=\{\}\qquad \mathcal{E}=\{S^T,T^F,R^T,P_1^T,P_2^T,Q^F,T^T,R^F,S^F,P^F\}$
Erster Schritt	$L=S^T,\ \mathcal{P}=\{S^T\},\ \mathcal{M}_{\mathcal{P}}=\{T^F,R^T,P_1^T,P_2^T,Q^F,T^T,R^F,S^F,P^F\}$ $\bar{L}=S^F,\ \ C_\beta(\bar{L})=\{S^F,P^F\},\ \mathcal{C}=\{S^F\},\ \mathcal{E}=\{P^F\}$
Zweiter Schritt	$L=P^F,\ \mathcal{P}=\{S^T,P^F\},\ \mathcal{M}_{\mathcal{P}}=\{T^F,R^T,P_1^T,P_2^T,Q^F,T^T,R^F\}$ $\bar{L}=P_2^T,\ \ C_\beta(\bar{L})=\{P_2^T,T^T,R^F\},\ \mathcal{C}=\{P_2^T\},\ \mathcal{E}=\{T^T,R^F\}$
Dritter Schritt	$L=T^T,\ \mathcal{P}=\{S^T,P^F,T^T\},\ \mathcal{M}_{\mathcal{P}}=\{T^F,R^T,P_1^T,R^F\}$ $\bar{L}=T^F,\ \ C_\beta(\bar{L})=\{T^F,R^T,P^T\},\ \mathcal{C}=\{T^F,P^T\},\ \mathcal{E}=\{R^T\}$
Vierter Schritt	

Extensionsbeweis auf Formelbäumen am Beispiel



Start	$\mathcal{P} = \{\}$ $\quad \mathcal{C} = \{\}$ $\quad \mathcal{E} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	$L = S^T,\ \mathcal{P} = \{S^T\},\ \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$ $\bar{L} = S^F,\ \ C_\beta(\bar{L}) = \{S^F, P^F\},\ \mathcal{C} = \{S^F\},\ \mathcal{E} = \{P^F\}$
Zweiter Schritt	$L = P^F,\ \mathcal{P} = \{S^T, P^F\},\ \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F\}$ $\bar{L} = P_2^T,\ \ C_\beta(\bar{L}) = \{P_2^T, T^T, R^F\},\ \mathcal{C} = \{P_2^T\},\ \mathcal{E} = \{T^T, R^F\}$
Dritter Schritt	$L = T^T,\ \mathcal{P} = \{S^T, P^F, T^T\},\ \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, R^F\}$ $\bar{L} = T^F,\ \ C_\beta(\bar{L}) = \{T^F, R^T, P^T\},\ \mathcal{C} = \{T^F, P^T\},\ \mathcal{E} = \{R^T\}$
Vierter Schritt	$L = R^T,\ \mathcal{P} = \{S^T, P^F, T^T, R^T\},\ \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{R^F\}$ $\bar{L} = R^F,\ \ C_\beta(\bar{L}) = \{R^F\},\ \mathcal{C} = \{R^F\},\ \mathcal{E} = \{\}$

Beweisbarkeit algorithmisch

- **Beweisbarkeit von $(\mathcal{P},\mathcal{C})$** (bezüglich F)
  - Alle Pfade, die $\mathcal{P}\cup\{v\}$ für ein Literal $v\in\mathcal{E}$ erweitern, sind komplementär unter einer Substitution σ
  - Entspricht Gültigkeit der verbleibenden Teilmatrix

Beweisbarkeit algorithmisch

- **Beweisbarkeit von $(\mathcal{P},\mathcal{C})$** (bezüglich F)
  – Alle Pfade, die $\mathcal{P}\cup\{v\}$ für ein Literal $v\in\mathcal{E}$ erweitern, sind komplementär unter einer Substitution σ
  – Entspricht Gültigkeit der verbleibenden Teilmatrix
- **Satz: F gültig g.d.w. aktives Ziel $(\emptyset,\emptyset)$ beweisbar**
  ... für eine Multiplizität μ und eine zulässige Substitution σ

Beweisbarkeit algorithmisch

- **Beweisbarkeit von $(\mathcal{P},\mathcal{C})$** (bezüglich F)
  – Alle Pfade, die $\mathcal{P}\cup\{v\}$ für ein Literal $v\in\mathcal{E}$ erweitern, sind komplementär unter einer Substitution σ
  – Entspricht Gültigkeit der verbleibenden Teilmatrix
- **Satz: F gültig g.d.w. aktives Ziel $(\emptyset,\emptyset)$ beweisbar**
  ... für eine Multiplizität μ und eine zulässige Substitution σ
  Beweis des Satzes stützt sich auf das Charakterisierungstheorem

Beweisbarkeit algorithmisch

- **Beweisbarkeit von $(\mathcal{P},\mathcal{C})$** (bezüglich F)
  – Alle Pfade, die $\mathcal{P}\cup\{v\}$ für ein Literal $v\in\mathcal{E}$ erweitern, sind komplementär unter einer Substitution σ
  – Entspricht Gültigkeit der verbleibenden Teilmatrix
- **Satz: F gültig g.d.w. aktives Ziel $(\emptyset,\emptyset)$ beweisbar**
  ... für eine Multiplizität μ und eine zulässige Substitution σ
  Beweis des Satzes stützt sich auf das Charakterisierungstheorem
- **Satz: Ein aktives Ziel $(\mathcal{P},\mathcal{C})$ ist beweisbar g.d.w.**
  (1) Das offene Ziel $\mathcal{E}$ ist leer, oder
  (2) Für ein $L\in\mathcal{E}$ ist $(\mathcal{P},\mathcal{C}\cup\{L\})$ beweisbar und es gibt eine komplementäre Konnektion $\{L,\bar{L}\}$ mit $\bar{L}\in\mathcal{P}$, oder
  $\bar{L}\sim_\alpha\mathcal{P}\cup\{L\}$ und $(\mathcal{P}\cup\{L\},\{\bar{L}\})$ beweisbar

Beweisbarkeit algorithmisch

- **Beweisbarkeit von $(\mathcal{P},\mathcal{C})$** (bezüglich F)
  – Alle Pfade, die $\mathcal{P}\cup\{v\}$ für ein Literal $v\in\mathcal{E}$ erweitern, sind komplementär unter einer Substitution σ
  – Entspricht Gültigkeit der verbleibenden Teilmatrix

- **Satz: F gültig g.d.w. aktives Ziel $(\emptyset,\emptyset)$ beweisbar**
  ... für eine Multiplizität μ und eine zulässige Substitution σ
  Beweis des Satzes stützt sich auf das Charakterisierungstheorem

- **Satz: Ein aktives Ziel $(\mathcal{P},\mathcal{C})$ ist beweisbar g.d.w.**
  (1) Das offene Ziel $\mathcal{E}$ ist leer, oder
  (2) Für ein $L\in\mathcal{E}$ ist $(\mathcal{P},\mathcal{C}\cup\{L\})$ beweisbar und
  es gibt eine komplementäre Konnektion $\{L,\bar{L}\}$
  mit $\bar{L}\in\mathcal{P}$, oder
  $\bar{L}\sim_\alpha\mathcal{P}\cup\{L\}$ und $(\mathcal{P}\cup\{L\},\{\bar{L}\})$ beweisbar

  Grundlage für Beschreibung des Extensionsverfahrens auf Formelbäumen

Das uniforme Pfadsuchverfahren (funktional)

- $\texttt{prove(}F\texttt{,}n\texttt{)}$

$$= \begin{cases} \texttt{provable(}\emptyset\texttt{,}\emptyset\texttt{,[])} & \textit{falls dies erfolgreich ist} \\ \qquad \text{wobei } \mu, \mathcal{CON} = (n,\texttt{connections}(F^{\mu})) & \\ \texttt{prove(}F\texttt{,}n\texttt{+1)} & \textit{sonst} \end{cases}$$

Das uniforme Pfadsuchverfahren (funktional)

- $\texttt{prove}(F,n)$

$$= \begin{cases} \texttt{provable}(\emptyset,\emptyset,\texttt{[]}) & \textit{falls dies erfolgreich ist} \\ \qquad \text{wobei } \mu,\, \mathcal{CON} = (n,\texttt{connections}(F^\mu)) & \\ \texttt{prove}(F,n\texttt{+1}) & \textit{sonst} \end{cases}$$

- $\texttt{provable}(\mathcal{P},\mathcal{C},\sigma)$

$$= \begin{cases} \texttt{check-extension}(\mathcal{E},\sigma) & \textit{falls } \mathcal{E}\neq\emptyset \\ \qquad \text{wobei } \mathcal{E} = \{v \in F \mid v{\sim_\alpha}\mathcal{P} \land v{\sim_\beta}\mathcal{C}\} & \\ \sigma & \textit{sonst} \end{cases}$$

Das uniforme Pfadsuchverfahren (funktional)

- $\texttt{prove}(F,n)$
$$= \begin{cases} \texttt{provable}(\emptyset,\emptyset,[\,]) & \textit{falls dies erfolgreich ist} \\ \quad \text{wobei } \mu,\, \mathcal{CON} = (n,\texttt{connections}(F^{\mu})) & \\ \texttt{prove}(F,n+1) & \textit{sonst} \end{cases}$$

- $\texttt{provable}(\mathcal{P},\mathcal{C},\sigma)$
$$= \begin{cases} \texttt{check-extension}(\mathcal{E},\sigma) & \textit{falls } \mathcal{E}\neq\emptyset \\ \quad \text{wobei } \mathcal{E} = \{v \in F \mid v \sim_{\alpha} \mathcal{P} \wedge v \sim_{\beta} \mathcal{C}\} & \\ \sigma & \textit{sonst} \end{cases}$$

- $\texttt{check-extension}(\mathcal{E},\sigma)$
$$= \begin{cases} \texttt{check-connections}(\mathcal{D},A,\sigma) & \textit{falls dies erfolgreich ist} \\ \quad \text{wobei } A \in \mathcal{E} \text{ beliebig, und} & \\ \quad \mathcal{D} = \{\bar{A} \in F \mid \{A,\bar{A}\} \in \mathcal{CON} \wedge (\bar{A} \in \mathcal{P} \vee \bar{A} \sim_{\alpha} (\mathcal{P} \cup \{A\}))\} & \\ \texttt{check-extension}(\{v \in \mathcal{E} | v \sim_{\alpha} A\},\sigma) & \textit{sonst (und } \mathcal{E}\neq\emptyset\textit{)} \end{cases}$$

Das uniforme Pfadsuchverfahren (funktional)

- $\texttt{prove}(F,n)$
$$= \begin{cases} \texttt{provable}(\emptyset,\emptyset,[\,]) & \textit{falls dies erfolgreich ist} \\ \quad \text{wobei } \mu,\ \mathcal{CON} = (n,\texttt{connections}(F^\mu)) & \\ \texttt{prove}(F,n\texttt{+1}) & \textit{sonst} \end{cases}$$

- $\texttt{provable}(\mathcal{P},\mathcal{C},\sigma)$
$$= \begin{cases} \texttt{check-extension}(\mathcal{E},\sigma) & \textit{falls } \mathcal{E}\neq\emptyset \\ \quad \text{wobei } \mathcal{E} = \{v \in F \mid v \sim_\alpha \mathcal{P} \wedge v \sim_\beta \mathcal{C}\} & \\ \sigma & \textit{sonst} \end{cases}$$

- $\texttt{check-extension}(\mathcal{E},\sigma)$
$$= \begin{cases} \texttt{check-connections}(\mathcal{D},A,\sigma) & \textit{falls dies erfolgreich ist} \\ \quad \text{wobei } A \in \mathcal{E} \text{ beliebig, und} & \\ \quad \mathcal{D} = \{\bar{A} \in F \mid \{A,\bar{A}\} \in \mathcal{CON} \wedge (\bar{A} \in \mathcal{P} \vee \bar{A} \sim_\alpha (\mathcal{P} \cup \{A\}))\} & \\ \texttt{check-extension}(\{v \in \mathcal{E} | v \sim_\alpha A\},\sigma) & \textit{sonst (und } \mathcal{E}\neq\emptyset\textit{)} \end{cases}$$

- $\texttt{check-connections}(\mathcal{D},A,\sigma)$
$$= \begin{cases} \texttt{provable}(\mathcal{P},\mathcal{C}\cup\{A\},\sigma_2) & \textit{falls dies erfolgreich ist} \\ \quad \text{wobei } \bar{A} \in \mathcal{D} \text{ beliebig, } \sigma_1 = \texttt{unify-check}(A,\bar{A},F^\mu,\sigma) & \\ \quad \text{und } \sigma_2 = \begin{cases} \sigma_1 & \textit{falls } \bar{A} \in \mathcal{P} \\ \texttt{provable}(\mathcal{P}\cup\{A\},\{\bar{A}\},\sigma_1) & \textit{sonst} \end{cases} & \\ \texttt{check-connections}(\mathcal{D}-\{\bar{A}\},A,\sigma) & \textit{sonst (und } \mathcal{D}\neq\emptyset\textit{)} \end{cases}$$

Korrektheit & Vollständigkeit

Eine Formel F ist genau dann prädikatenlogisch gültig, wenn `prove(F,1)` mit einer geeigneten Unifikations- und Zulässigkeitsprüfung `unify-check` erfolgreich terminiert

Korrektheit & Vollständigkeit

Eine Formel F ist genau dann prädikatenlogisch gültig, wenn `prove(`F`,1)` mit einer geeigneten Unifikations- und Zulässigkeitsprüfung `unify-check` erfolgreich terminiert

- **`prove(`F`,1)` beweist F oder terminiert nicht**
  - Ist F gültig, so liefert `prove(`F`,1)` eine zulässige Substitution, die alle Pfade komplementär macht
  - Ist F nicht gültig, so wird die Multiplizität unendlich oft erhöht

Korrektheit & Vollständigkeit

Eine Formel F ist genau dann prädikatenlogisch gültig, wenn `prove(`F`,1)` mit einer geeigneten Unifikations- und Zulässigkeitsprüfung `unify-check` erfolgreich terminiert

- **`prove(`F`,1)` beweist F oder terminiert nicht**
  - Ist F gültig, so liefert `prove(`F`,1)` eine zulässige Substitution, die alle Pfade komplementär macht
  - Ist F nicht gültig, so wird die Multiplizität unendlich oft erhöht
- **Korrektheitsbeweis durch simultane Induktion**
  - Abgestützt auf die Sätze über Beweisbarkeit aktiver Ziele

Korrektheit & Vollständigkeit

Eine Formel F ist genau dann prädikatenlogisch gültig, wenn `prove(`F`,1)` mit einer geeigneten Unifikations- und Zulässigkeitsprüfung `unify-check` erfolgreich terminiert

- **`prove(`F`,1)` beweist F oder terminiert nicht**
  - Ist F gültig, so liefert `prove(`F`,1)` eine zulässige Substitution, die alle Pfade komplementär macht
  - Ist F nicht gültig, so wird die Multiplizität unendlich oft erhöht
- **Korrektheitsbeweis durch simultane Induktion**
  - Abgestützt auf die Sätze über Beweisbarkeit aktiver Ziele
- **Implementierung in funktionaler/logischer Sprache**
  - Rekursive Verwaltung der Alternativen durch den Compiler
  - Imperative Implementierung erfordert höheren Verwaltungsaufwand und ist fehleranfälliger