

Verbände, Kategorien und Funktoren

Eva Richter

15. Juni 2006

Gliederung

- ▶ Verbände
- ▶ Kategorien
- ▶ Funktoren

Partiell geordnete Mengen

(W, \leq_W) heißt **partiell geordnete Menge**, wenn $\forall x, y, z \in W$ gilt:

(i) $x \leq_W x$ (Reflexivität)

(ii) Falls $x \leq_W y$ und $y \leq_W x$, dann $x = y$. (Antisymmetrie)

(iii) Falls $x \leq_W y$ und $y \leq_W z$, dann $x \leq_W z$. (Transitivität)

Bezeichnung: $x <_W y$ für $x \leq_W y$ und $x \neq y$

Definitionen

- ▶ (W, \leq_W) heißt **total/linear geordnet** gdw. $\forall x, y \in W$ gilt $x \leq_W y$ oder $y \leq_W x$.
- ▶ $X \subseteq W$ heißt **aufwärts gerichtete Teilmenge** von W , gdw. $\forall x, y \in X, \exists z \in X$ sd. $x \leq_W z$ und $y \leq_W z$.
- ▶ y heißt **obere(untere) Schranke** für $X \subseteq W$, wenn $\forall x \in X$ gilt $x \leq_W y$ ($y \leq_W x$).

Definitionen II

- ▶ y heißt **kleinste obere Schranke** von X oder **Limes** von X ,
 $y = \sup(X) = \text{Lim}(X)$, gdw:
 - (i) y ist obere Schranke von X ,
 - (ii) für alle oberen Schranken z von X gilt: $y \leq_W z$.
- ▶ Ein $m \in X$ heißt **maximales Element in X** , gdw.
 $\nexists z \in X$ sd. $m <_W z$.
- ▶ $z \in X$ heißt **größtes Element von X** , $z = \max(X)$, gdw.
 $\forall x \in X$ gilt: $x \leq_W z$.

In analoger Weise definiert man: **untere Schranke**, **größte untere Schranke**, **minimales Element**, **kleinstes Element**.

Definitionen III

Falls X geordnet ist, dann hat es höchstens ein maximales (minimales) Element, das zugleich größtes (kleinstes) Element ist.

- ▶ Bezeichnung
größtes Element von W : 1_W
kleinstes Element von W : 0_W .
- ▶ Ein maximales Element in $W \setminus \{1_W\}$ heißt **Co-Atom**, ein minimales Element in $W \setminus \{0_W\}$ heißt **Atom**.
- ▶ Falls $X = \{x_1, x_2\}$ schreiben wir $x_1 \wedge x_2$ für $\inf(X)$ und $x_1 \vee x_2$ für $\sup(X)$.

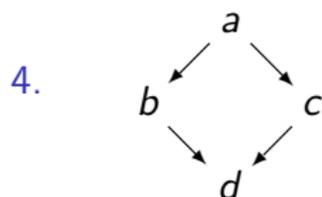
Verbände

- ▶ Eine partiell geordnete Menge (W, \leq_W) heißt **(geordneter) Verband**, wenn $\forall x_1, x_2 \in W$ sowohl $x_1 \wedge x_2$ als auch $x_1 \vee x_2$ existieren.
- ▶ Falls 1_W und 0_W existieren, heißt (W, \leq_W) **beschränkt**.
- ▶ Ein Verband heißt **vollständig**, falls für jedes $X \subseteq W$ sowohl $\inf(X)$ als auch $\sup(X)$ existieren.

Jede total geordnete Menge mit größtem und kleinstem Element ist ein beschränkter Verband.

Beispiele

1. $W = \{0, 1\}$ ist beschränkt und vollständig.
2. $W = \mathbb{N}$, ist nicht vollständig.
3. Menge von Formeln F , Verband: $\mathcal{P}(F)$, Potenzmenge der Formeln einer Sprache.



Verband aus vier Elementen mit
 $a \wedge b = b$, $a \wedge c = c$, $b \wedge c = d$.

Abbildungen auf Verbänden

$h : W_1 \rightarrow W_2$ heißt

- ▶ **ordnungserhaltend**, wenn $\forall x, y \in W_1$ gilt
aus $x \leq_{W_1} y$ folgt $h(x) \leq_{W_2} h(y)$,
- ▶ **ordnungsumkehrend**, wenn $\forall x, y \in W_1$ gilt
aus $x \leq_{W_1} y$ folgt $h(y) \leq_{W_2} h(x)$,
- ▶ **Einbettung**, falls $x \leq_{W_1} y$ gdw. $h(x) \leq_{W_2} h(y)$.

Seien W_1 und W_2 beschränkte Verbände. $h : W_1 \rightarrow W_2$ heißt **Verbandshomomorphismus**, wenn $\forall x, y \in W_1$ Bedingung (i)-(iii) gilt:

- $h(0_{W_1}) = 0_{W_2}$, $h(1_{W_1}) = 1_{W_2}$,
- $h(x \wedge_1 y) = h(x) \wedge_2 h(y)$,
- $h(x \vee_1 y) = h(x) \vee_2 h(y)$.

Distributive Verbände

- ▶ Ein Verband heißt **distributiv**, wenn $\forall x, y, z \in W$ gilt:
 $(x \wedge y) \vee z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ und
 $(x \vee y) \wedge z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.
- ▶ Ein beschränkter Verband bildet eine Algebra der Form $(W, \wedge, \vee, 0_W, 1_W)$.
- ▶ Eine kommutative, distributive Algebra heißt **Boole'sche Algebra**, falls es eine ordnungsumkehrende Operation $\neg : W \rightarrow W$ gibt, sd. für alle $x \in W$ gilt:

$$x \vee \neg(x) = 1_W \text{ und } x \wedge \neg(x) = 0_W.$$

Beispiele

Sei $W = \mathcal{P}(M)$, die Potenzmenge von M . Dann ist

- ▶ $1_W = M, 0_W = \emptyset,$
- ▶ $A \wedge B = A \cap B, A \vee B = A \cup B,$
- ▶ $\neg A = A^C.$

$(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, ^C, M, \emptyset)$ ist eine Boolesche Algebra.

Sei $W = [0, 1]$ mit

- ▶ $1_W = 1, 0_W = 0,$
- ▶ $x \wedge y = \min\{x, y\}, x \vee y = \max\{x, y\}.$
- ▶ $\neg x = 1 - x.$

$([0, 1], \min, \max, \neg, 1, 0)$ ist kommutative und distributive aber keine Boolesche Algebra.

Kategorien-Definition

Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus zwei Mengen $Obj(\mathcal{C})$ von **Objekten** und $Arr(\mathcal{C})$ von **Pfeilen**, sowie zwei Abbildungen $dom, cod : Arr(\mathcal{C}) \rightarrow Obj(\mathcal{C})$

- ▶ dom, cod ordnen jedem Pfeil seine Quelle und sein Ziel zu,
- ▶ zu jedem \mathcal{C} -Objekt c gibt es einen **Identitätspfeil** Id_c mit $cod(Id_c) = dom(Id_c) = c$,
- ▶ die **Komposition** $g \circ f$ zu einem Paar von Pfeilen f und g existiert, falls $cod(f) = dom(g)$ und es gilt

$$dom(g \circ f) = dom(f) \text{ und } cod(g \circ f) = cod(g),$$

- ▶ für alle \mathcal{C} -Objekte a, b, c und d und \mathcal{C} -Pfeile $f : a \rightarrow b$, $g : b \rightarrow c$ und $h : c \rightarrow d$ gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

$$f \circ Id_a = f = Id_b \circ f$$

Kategorien– Beispiele

One Objekt $\{*\}$
Pfeile: $Id_* : * \rightarrow *$

SET Objekte: Mengen
Pfeile: Funktionen

\mathbb{N} Objekt: \mathbb{N}
Pfeile: für jede natürliche Zahl ein Pfeil $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Monoide

Ein Monoid $\mathbf{M} = (M, *, e)$ ist eine Menge M zusammen mit einer zweistelligen assoziativen Operation $* : M \times M \rightarrow M$ und Einselement e mit $x * e = e * x = x$. Jedes Monoid ergibt eine Kategorie \mathbf{M} .

Umgekehrt ist jede Kategorie mit nur einem Objekt a ein Monoid mit $\mathbf{M} = (a, \circ, Id_a)$

Partielle Ordnungen

- ▶ (P, \leq_P) definiert eine Kategorie \mathbf{P}
- ▶ Objekte: Elemente p der Trägermenge,
- ▶ Pfeile: höchstens ein Pfeil zwischen zwei Objekten:

$$\text{Hom}_{\mathbf{P}}(x, y) \neq \emptyset \text{ gdw. } x \leq_P y$$

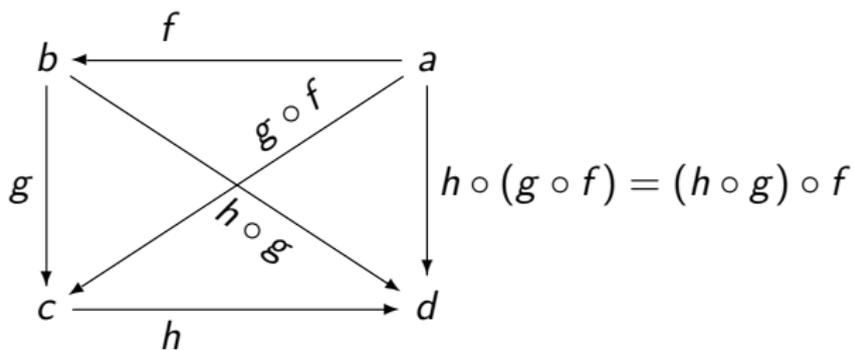
- ▶ **POS:**
Objekte: partiell geordnete Mengen
Pfeile: ordnungserhaltende Abbildungen

Diagramm

- ▶ **Diagramme** sind Graphen, deren Knoten Objekte und deren Kanten Pfeile einer Kategorie sind.
- ▶ Ein **Pfad** ist eine nichtleere Sequenz von Kanten und ihren Bezeichnungen, sd. der Zielknoten einer Kante gleich dem Quellknoten der nächsten Kante ist.
- ▶ Ein Diagramm Δ heißt **kommutativ**, wenn für jedes Paar von Knoten (m, n) die Kompositionen der Morphismen jedes Pfades von m nach n übereinstimmen.

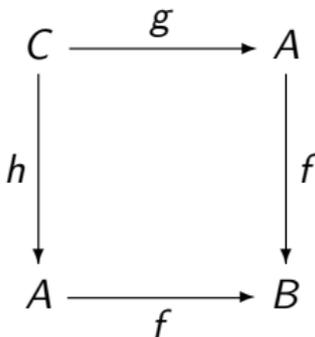
Assoziativität von \circ

Kategorie \mathcal{C} , $a, b, c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$



Monomorphismen

- ▶ $f : A \rightarrow B$ heißt **injektiv**, gdw. aus $f(x) = f(y)$ folgt $x = y$.
- ▶



falls das SET-Diagramm kommutiert, folgt $g = h$

- ▶ Ein Pfeil f einer Kategorie \mathcal{C} heißt **Monomorphismus**, falls für alle Pfeile g, h mit $f \circ g = f \circ h$ gilt $g = h$.

Monomorphismen II

- ▶ in \mathbb{N} sind alle Pfeile Monomorphismen,
- ▶ in GRP, SET und TOP sind alle Pfeile, die als Mengenabbildungen injektiv sind Monomorphismen,
- ▶ wenn f und g Monomorphismen, dann auch $f \circ g$,
- ▶ falls $g \circ f$ monomorph ist, dann ist auch f monomorph,
- ▶ monomorphe Pfeile heißen auch **links kürzbar**.

Epi- und Isomorphismen

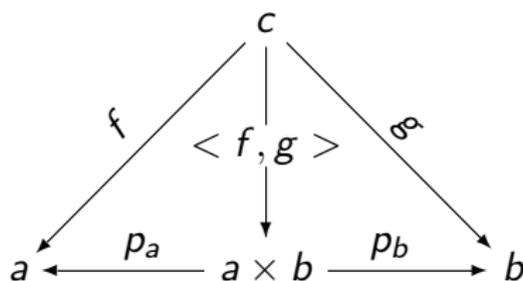
- ▶ Ein Pfeil f einer Kategorie \mathcal{C} heißt **Epimorphismus**, falls für alle Pfeile g, h mit $g \circ f = h \circ f$ gilt $g = h$.
- ▶ epimorphe Pfeile heißen auch **rechts kürzbar**
- ▶ in SET, GRP, TOP sind alle surjektiven Funktionen auch Epimorphismen
- ▶ In MON, Kategorie der Monoide ist nicht jeder Epimorphismus eine surjektive Abbildung: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$ ist Monoid-Homomorphismus, aber nicht surjektiv.
- ▶ Pfeile, die sowohl epi- also auch monomorph sind, heißen **Isomorphismen**.

Initial und Terminalobjekte

- ▶ Ein Objekt O einer Kategorie \mathcal{C} heißt **Initialobjekt**, wenn es zu jedem \mathcal{C} -Objekt a genau einen Pfeil von O zu a gibt.
- ▶ Falls es in \mathcal{C} zwei Initialobjekte gibt, dann sind sie isomorph in \mathcal{C} .
- ▶ Ein Objekt T einer Kategorie \mathcal{C} heißt **Terminalobjekt**, wenn es zu jedem \mathcal{C} -Objekt b genau einen Pfeil von b zu T gibt.
- ▶ Falls es in \mathcal{C} zwei Terminalobjekte gibt, dann sind sie isomorph in \mathcal{C} .
- ▶ jeder Pfeil $f : T \rightarrow b$ ist ein Monomorphismus.
- ▶ Initial- und Terminalobjekte in POS, SET, GRP, MON.

Produkte

Das **Produkt** zweier Objekte a und b in einer Kategorie \mathcal{C} ist ein \mathcal{C} -Objekt $a \times b$ zusammen mit einem Paar von \mathcal{C} -Pfeilen $p_a : a \times b \rightarrow a$ und $p_b : a \times b \rightarrow b$, den **Projektionen**, so daß für jedes Paar von \mathcal{C} -Pfeilen $f : c \rightarrow a$ und $g : c \rightarrow b$ genau ein Pfeil $\langle f, g \rangle : c \rightarrow a \times b$ so daß das folgende Diagramm kommutiert:



Produkte in einer partiellen Ordnung

Produkt in (P, \leq_P) ist (falls es existiert) definiert durch:

- ▶ $p \times q \leq_P p$ und $p \times q \leq_P q$, d.h. $p \times q$ ist eine untere Schranke von p und q ,
- ▶ falls $c \leq_P p$ und $c \leq_P q$, dann ist $c \leq_P p \times q$
- ▶ $p \times q$ ist die größte untere Schranke von p und q .

Duale Kategorien

- ▶ die **duale Kategorie** \mathcal{C}^{op} zu einer Kategorie \mathcal{C} , hat als Objekte dieselbe Menge wie \mathcal{C} . Für jeden \mathcal{C} -Pfeil $f : a \rightarrow b$ existiert in \mathcal{C}^{op} ein Pfeil $f^{op} : b \rightarrow a$. Es gibt keine weiteren Pfeile in \mathcal{C}^{op} .
Komposition: $(g \circ f)^{op} = f^{op} \circ g^{op}$
- ▶ zu jedem Konzept gibt es das duale Konzept, z.B. Initial- und Terminalobjekte, Produkte und Koproducte, usw., das durch Umkehrung der Pfeile entsteht

Funktor

- ▶ Ein **kovarianter Funktor** $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen zwei Kategorien \mathcal{A} und \mathcal{B} besteht aus Objektabbildung und einer Pfeilabbildung, sd.

$$F(\text{Id}_a) = \text{Id}_{F(a)} \text{ und } F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \text{ falls } f \circ g \text{ definiert ist.}$$

- ▶ Ein **kontravarianter Funktor** $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen zwei Kategorien \mathcal{A} und \mathcal{B} besteht aus Objektabbildung und einer Pfeilabbildung, sd.

$$F(\text{Id}_a) = \text{Id}_{F(a)} \text{ und } F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \text{ falls } f \circ g \text{ definiert ist.}$$

Produktfunktor und Potenzmengenfunktor

Kategorie POS der Partiellen Ordnungen der Form (P, \leq_P)
Jedes $Q \in \text{Obj}(POS)$ definiert einen Funktor

$$F_Q : POS \rightarrow POS$$

Objektabbildung: $F_Q(P) = P \times Q$

Pfeilabbildung: $F_Q(f)(p, q) = (f(p), q)$

ist kovariant.

$$F_{\mathcal{P}} : SET \rightarrow SET$$

Objektabbildung $F_{\mathcal{P}}(M) = \mathcal{M}$ **Pfeilabbildung** für jedes

$f : M \rightarrow N$ bildet $F_{\mathcal{P}}(f)$ jedes $X \subseteq M$ ab auf $f(X) \subseteq N$

ist kovariant.

Homfunktork

Kategorie \mathcal{A}

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{SET}$$

Objektabbildung: $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)(b) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b)$

Pfeilabbildung: für $f : b \rightarrow c$ gilt

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, f) : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, c)$ mit

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, f)(g) = f \circ g$$

$$\begin{array}{ccc} b & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b) \\ \downarrow f & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, f) \\ c & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, c) \end{array}$$

Homfunktor II

Kategorie \mathcal{A}

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, b) : \mathcal{A} \rightarrow \text{SET}$$

Objektabbildung: $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, b)(a) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b)$

Pfeilabbildung: für $f : a \rightarrow c$ gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, b) : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(c, b) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b) \text{ mit}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, b)(g) = g \circ f$$

$$\begin{array}{ccc}
 a & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b) \\
 \downarrow f & & \uparrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, b) \\
 c & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(c, b)
 \end{array}$$

Kategorie der Kategorien

CAT = Kategorie der Kategorien mit

$Obj(Cat)$ = Kategorien

$Hom_{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ = Funktoen von \mathcal{A} nach \mathcal{B}

Funktorkategorien

- ▶ $Func[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ Kategorie der Funktoren von \mathcal{A} nach \mathcal{B}
- ▶ $Obj(Func[\mathcal{A}, \mathcal{B}]) = Hom_{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- ▶ $Hom_{(Func[\mathcal{A}, \mathcal{B}])}(F, G)$
natürliche Transformationen von F nach G
- ▶ $\tau : F \rightarrow G$ muß die Objektabbildung von F auf Objektabbildung von G und Pfeilabbildung von F auf Pfeilabbildung von G abbilden. Für jedes \mathcal{A} -Objekt a gibt es Komponenten $\tau^a : F(a) \rightarrow G(a)$ so daß für $f : a \rightarrow b$ die Bilder unter F und G ineinander überführt werden:

$$\tau_b \circ F(f) = G(f) \circ \tau_a$$