Verbände, Kategorien und Funktoren

Eva Richter

15. Juni 2006

Gliederung

- Verbände
- Kategorien
- Funktoren

Partiell geordnete Mengen

$(W, \leq_W)$ heißt partiell geordnete Menge, wenn $\forall x, y, z \in W$ gilt:

(i) $x \leq_W x$ (Reflexivität)

(ii) Falls $x \leq_W y$ und $y \leq_W x$, dann $x = y$. (Antisymmetrie)

(iii) Falls $x \leq_W y$ und $y \leq_W z$, dann $x \leq_W z$. (Transitivität)

Bezeichnung: $x <_W y$ für $x \leq_W y$ und $x \neq y$

Definitionen

- $(W, \leq_W)$ heißt total/linear geordnet gdw. $\forall x, y \in W$ gilt $x \leq_W y$ oder $y \leq_W x$.
- $X \subseteq W$ heißt aufwärts gerichtete Teilmenge von W, gdw. $\forall x, y \in X, \exists z \in X$ sd. $x \leq_W z$ und $y \leq_W z$.
- y heißt obere(untere) Schranke für $X \subseteq W$, wenn $\forall x \in X$ gilt $x \leq_W y (y \leq_W x)$.

Definitionen II

- y heißt kleinste obere Schranke von X oder Limes von X, $y = \sup(X) = Lim(X)$, gdw:
  (i) y ist obere Schranke von X,
  (ii) für alle oberen Schranken z von X gilt: $y \leq_W z$.
- Ein $m \in X$ heißt maximales Element in X, gdw. $\nexists\ z \in X$ sd. $m <_W z$.
- $z \in X$ heißt größtes Element von X, $z = \max(X)$, gdw. $\forall x \in X$ gilt: $x \leq_W z$.

In analoger Weise definiert man: untere Schranke, größte untere Schranke, minimales Element, kleinstes Element.

Definitionen III

Falls X geordnet ist, dann hat es höchstens ein maximales (minimales) Element, das zugleich größtes (kleinstes) Element ist.

- Bezeichnung
  größtes Element von W: 1_W
  kleinstes Element von W: 0_W.
- Ein maximales Element in $W \setminus \{1_W\}$ heißt Co-Atom, ein minimales Element in $W \setminus \{0_W\}$ heißt Atom.
- Falls $X = \{x_1, x_2\}$ schreiben wir $x_1 \curlywedge x_2$ für $\inf(X)$ und $x_1 \curlyvee x_2$ für $\sup(X)$.

Verbände

- Eine partiell geordnete Menge $(W, \leq_W)$ heißt (geordneter) Verband, wenn $\forall x_1, x_2 \in W$ sowohl $x_1 \curlywedge x_2$ als auch $x_1 \curlyvee x_2$ existieren.
- Falls 1_W und 0_W existieren, heißt $(W, \leq_W)$ beschränkt.
- Ein Verband heißt vollständig, falls für jedes $X \subseteq W$ sowohl $\inf(X)$ als auch $\sup(X)$ existieren.

Jede total geordnete Menge mit größtem und kleinstem Element ist ein beschränkter Verband.

Beispiele

1. $W = \{0,1\}$ ist beschränkt und vollständig.
2. $W = N$, ist nicht vollständig.
3. Menge von Formeln F, Verband: $\mathcal{P}(F)$, Potenzmenge der Formeln einer Sprache.
4. $$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ b \arrow[dr] & & c \arrow[dl] \\ & d & \end{tikzcd}$$

   Verband aus vier Elementen mit $a \Wedge b = b$, $a \Wedge c = c$, $b \Wedge c = d$.

Abbildungen auf Verbänden

$h : W_1 \to W_2$ heißt

- ordnungserhaltend, wenn $\forall x, y \in W_1$ gilt
  aus $x \leq_{W_1} y$ folgt $h(x) \leq_{W_2} h(y)$,
  ordnungsumkehrend, wenn $\forall x, y \in W_1$ gilt
  aus $x \leq_{W_1} y$ folgt $h(y) \leq_{W_2} h(x)$,
- Einbettung, falls $x \leq_{W_1} y$ gdw. $h(x) \leq_{W_2} h(y)$.

Seien W_1 und W_2 beschränkte Verbände. $h : W_1 \to W_2$ heißt Verbandshomomorphismus, wenn $\forall x, y \in W_1$ Bedingung (i)-(iii) gilt:

(i) $h(0_{W_1}) = 0_{W_2}$, $h(1_{W_1}) = 1_{W_2}$,

(ii) $h(x \mathbin{\bigwedge\!\!\!\bigwedge}_1 y) = h(x) \mathbin{\bigwedge\!\!\!\bigwedge}_2 h(y)$,

(iii) $h(x \mathbin{\bigvee\!\!\!\bigvee}_1 y) = h(x) \mathbin{\bigvee\!\!\!\bigvee}_2 h(y)$.

Distributive Verbände

- Ein Verband heißt distributiv, wenn $\forall x, y, z \in W$ gilt: $(x \curlywedge y) \curlyvee z = (x \curlywedge z) \curlyvee (y \curlywedge z)$ und $(x \curlyvee y) \curlywedge z = (x \curlyvee z) \curlywedge (y \curlyvee z)$.
- Ein beschränkter Verband bildet eine Algebra der Form $(W, \curlywedge, \curlyvee, 0_W, 1_W)$.
- Eine kommutative, distributive Algebra heißt Boole'sche Algebra, falls es eine ordnungsumkehrende Operation $\neg : W \rightarrow W$ gibt, sd. für alle $x \in W$ gilt:

$$x \curlyvee \neg(x) = 1_W \text{ und } x \curlywedge \neg(x) = 0_W.$$

Beispiele

Sei $W = \mathcal{P}(M)$, die Potenzmenge von M. Dann ist

- $1_W = M$, $0_W = \emptyset$,
- $A \Wedge B = A \bigcup B$, $A \Vee B = A \bigcup B$,
- $\neg A = A^C$.

$(\mathcal{P}(M), \bigcap, \bigcup, ^C, M, \emptyset)$ ist eine Boolesche Algebra.

Sei $W = [0, 1]$ mit

- $1_W = 1$, $0_W = 0$,
- $x \Wedge y = min\{x, y\}$, $x \Vee y = max\{x, y\}$.
- $\neg x = 1 - x$.

$([0, 1], min, max, \neg, 1, 0)$ ist kommutative und distributive aber keine Boolesche Algebra.

Kategorien–Definition

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus zwei Mengen $Obj(\mathcal{C})$ von Objekten und $Arr(\mathcal{C})$ von Pfeilen, sowie zwei Abbildungen $dom, cod : Arr(\mathcal{C}) \rightarrow Obj(\mathcal{C})$

- dom, cod ordnen jedem Pfeil seine Quelle und sein Ziel zu,
- zu jedem $\mathcal{C}$-Objekt c gibt es einen Identitätspfeil Id_c mit $cod(Id_c) = dom(Id_c) = c$,
- die Komposition $g \circ f$ zu einem Paar von Pfeilen f und g existiert, falls $cod(f) = dom(g)$ und es gilt

$$dom(g \circ f) = dom(f) \text{und } cod(g \circ f) = cod(g),$$

- für alle $\mathcal{C}$-Objekte a, b, c und d und $\mathcal{C}$-Pfeile $f : a \rightarrow b$, $g : b \rightarrow c$ und $h : c \rightarrow d$ gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

$$f \circ Id_a = f = Id_b \circ f$$

Kategorien– Beispiele

One Objekt {*}
Pfeile: $Id_* : * \to *$

SET Objekte: Mengen
Pfeile: Funktionen

$\mathbb{N}$ Objekt: $\mathbb{N}$
Pfeile: für jede natürliche Zahl ein Pfeil $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Monoide

Ein Monoid $\mathbf{M} = (M, *, e)$ ist eine Menge M zusammen mit einer zweistelligen assoziativen Operation $* : M \times M \to M$ und Einselement e mit $x * e = e * x = x$. Jedes Monoid ergibt eine Kategorie $\mathbf{M}$.
Umgekehrt ist jede Kategorie mit nur einem Objekt a ein Monoid mit $\mathbf{M} = (a, \circ, Id_a)$

Partielle Ordnungen

- $(P, \leq_P)$ definiert eine Kategorie $\mathbf{P}$
- Objekte: Elemente p der Trägermenge,
- Pfeile: höchstens ein Pfeil zwischen zwei Objekten:

$$Hom_{\mathbf{P}}(x, y) \neq \emptyset \text{ gdw. } x \leq_P y$$

- POS:
  Objekte: partiell geordnete Mengen
  Pfeile: ordnungserhaltende Abbildungen

Diagramm

- Diagramme sind Graphen, deren Knoten Objekte und deren Kanten Pfeile einer Kategorie sind.
- Ein Pfad ist eine nichtleere Sequenz von Kanten und ihren Bezeichnungen, sd. der Zielknoten einer Kante gleich dem Quellknoten der nächsten Kante ist.
- Ein Diagramm Δ heißt kommutativ, wenn für jedes Paar von Knoten (m, n) die Kompositionen der Morphismen jedes Pfades von m nach n übereinstimmen.

Assoziativität von $\circ$

Kategorie $\mathcal{C}$, $a, b, c \in Obj(\mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h \circ g"'] & a \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "g \circ f"] \arrow[d, "h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f"] \\
c \arrow[r, "h"'] & d
\end{tikzcd}$$

Monomorphismen

- $f : A \to B$ heißt injektiv, gdw. aus $f(x) = f(y)$ folgt $x = y$.
- $$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

  falls das SET-Diagramm kommutiert, folgt $g = h$
- Ein Pfeil f einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Monomorphismus, falls für alle Pfeile g, h mit $f \circ g = f \circ h$ gilt $g = h$.

Monomorphismen II

- in $\mathbb{N}$ sind alle Pfeile Monomorphismen,
- in GRP, SET und TOP sind alle Pfeile, die als Mengenabbildungen injektiv sind Monomorphismen,
- wenn f und g Monomorphismen, dann auch $f \circ g$,
- falls $g \circ f$ monomorph ist, dann ist auch f monomorph,
- monomorphe Pfeile heißen auch links kürzbar.

Epi- und Isomorphismen

- Ein Pfeil f einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Epimorphismus, falls für alle Pfeile g, h mit $g \circ f = h \circ f$ gilt $g = h$.
- epimorphe Pfeile heißen auch rechts kürzbar
- in SET, GRP, TOP sind alle surjektiven Funktionen auch Epimorphismen
- In MON, Kategorie der Monoide ist nicht jeder Epimorphismus eine surjektive Abbildung: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$ ist Monoid-Homomorphismus, aber nicht surjektiv.
- Pfeile, die sowohl epi- also auch monomorph sind, heißen Isomorphismen.

Initial und Terminalobjekte

- Ein Objekt O eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Initialobjekt, wenn es zu jedem $\mathcal{C}$-Objekt a genau einen Pfeil von O zu a gibt.
- Falls es in $\mathcal{C}$ zwei Initialobjekte gibt, dann sind sie isomorph in $\mathcal{C}$.
- Ein Objekt T eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Terminalobjekt, wenn es zu jedem $\mathcal{C}$-Objekt b genau einen Pfeil von b zu T gibt.
- Falls es in $\mathcal{C}$ zwei Terminalobjekte gibt, dann sind sie isomorph in $\mathcal{C}$.
- jeder Pfeil $f : T \to b$ ist ein Monomorphismus.
- Initial- und Terminalobjekte in POS, SET, GRP, MON.

Produkte

Das Produkt zweier Objekte a und b in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein $\mathcal{C}$-Objekt $a \times b$ zusammen mit einem Paar von $\mathcal{C}$-Pfeilen $p_a : a \times b \longrightarrow a$ und $p_b : a \times b \longrightarrow b$, den Projektionen, so daß für jedes Paar von $\mathcal{C}$-Pfeilen $f : c \longrightarrow a$ und $g : c \longrightarrow b$ genau ein Pfeil $< f, g >: c \longrightarrow a \times b$ so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "< f, g >"] \arrow[dr, "g"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"'] \arrow[r, "p_b"] & b
\end{tikzcd}
$$

Produkte in einer partiellen Ordnung

Produkt in $(P, \leq_P)$ ist (falls es existiert) definiert durch:

- $p \times q \leq_P p$ und $p \times q \leq_P q$, d.h. $p \times q$ ist eine untere Schranke von p und q,
- falls $c \leq_P p$ und $c \leq_P q$, dann ist $c \leq_P p \times q$
- $p \times q$ ist die größte untere Schranke von p und q.

Duale Kategorien

- die duale Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ zu einer Kategorie $\mathcal{C}$, hat als Objekte dieselbe Menge wie $\mathcal{C}$. Für jeden $\mathcal{C}$-Pfeil $f : a \longrightarrow b$ existiert in $\mathcal{C}^{op}$ ein Pfeil $f^{op} : b \longrightarrow a$. Es gibt keine weiteren Pfeile in $\mathcal{C}^{op}$. Komposition: $(g \circ f)^{op} = f^{op} \circ g^{op}$
- zu jedem Konzept gibt es das duale Konzept, z.B. Initial- und Terminalobjekte, Produkte und Koprodukte, usw., das durch Umkehrung der Pfeile entsteht

Funktoren

- Ein kovarianter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ besteht aus Objektabbildung und einer Pfeilabbildung, sd.

  $F(Id_a) = Id_{F(a)}$ und $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ falls $f \circ g$ definiert ist.

- Ein kontravarianter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ besteht aus Objektabbildung und einer Pfeilabbildung, sd.

  $F(Id_a) = Id_{F(a)}$ und $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ falls $f \circ g$ definiert ist.

Produktfunktor und Potenzmengenfunktor

Kategorie POS der Partiellen Ordnungen der Form $(P, \leq_P)$
Jedes $Q \in Obj(POS)$ definiert einen Funktor

$$F_Q : POS \to POS$$

Objektabbildung: $F_Q(P) = P \times Q$
Pfeilabbildung: $F_Q(f)(p, q) = (f(p), q)$
ist kovariant.

$$F_{\mathcal{P}} : SET \to SET$$

Objektabbildung $F_{\mathcal{P}}(M) = \mathcal{M}$ **Pfeilabbildung** für jedes $f : M \to N$ bildet $F_{\mathcal{P}}(f)$ jedes $X \subseteq M$ ab auf $f(X) \subseteq N$
ist kovariant.

Homfunktor

Kategorie $\mathcal{A}$

$$Hom_{\mathcal{A}}(a, \_\ ) : \mathcal{A} \to SET$$

Objektabbildung: $Hom_{\mathcal{A}}(a, \_\ )(b) = Hom_{\mathcal{A}}(a, b)$
Pfeilabbildung: für $f : b \to c$ gilt
$Hom_{\mathcal{A}}(a, f) : Hom_{\mathcal{A}}(a, b) \to Hom_{\mathcal{A}}(a, c)$ mit
$Hom_{\mathcal{A}}(a, f)(g) = f \circ g$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f"'] & Hom_{\mathcal{A}}(a, b) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(a, f)"] \\
c & Hom_{\mathcal{A}}(a, c)
\end{tikzcd}$$

Homfunktor II

Kategorie $\mathcal{A}$

$$Hom_{\mathcal{A}}(\_, b) : \mathcal{A} \to SET$$

Objektabbildung: $Hom_{\mathcal{A}}(\_, b)(a) = Hom_{\mathcal{A}}(a, b)$
Pfeilabbildung: für $f : a \to c$ gilt
$Hom_{\mathcal{A}}(f, b) : Hom_{\mathcal{A}}(c, b) \to Hom_{\mathcal{A}}(a, b)$ mit
$Hom_{\mathcal{A}}(f, b)(g) = g \circ f$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & Hom_{\mathcal{A}}(a, b) \\
c & Hom_{\mathcal{A}}(c, b) \arrow[u, "Hom_{\mathcal{A}}(f, b)"']
\end{tikzcd}$$

Kategorie der Kategorien

CAT=Kategorie der Kategorien mit
$Obj(Cat)$=Kategorien
$Hom_{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})$=Funktoren von $\mathcal{A}$ nach$\mathcal{B}$

Funktorkategorien

- $Func[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ Kategorie der Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$
- $Obj(Func[\mathcal{A},\mathcal{B}]) = Hom_{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B})$
- $Hom_{(Func[\mathcal{A},\mathcal{B}])}(F,G)$
  natürliche Transformationen von F nach G
- $\tau : F \longrightarrow G$ muß die Objektabbildung von F auf Objektabbildung von G und Pfeilabbildung von F auf Pfeilabbildung von G abbilden. Für jedes $\mathcal{A}$-Objekt a gibt es Komponenten $\tau^a : F(a) \longrightarrow G(a)$ so daß für $f : a \longrightarrow b$ die Bilder unter F und G ineinander überführt werden:

$$\tau_b \circ F(f) = G(f) \circ \tau_a$$