Verbände, Kategorien und Funktoren

Eva Richter

16. Juni 2006

Kategorien–Definition

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus zwei Mengen $Obj(\mathcal{C})$ von Objekten und $Arr(\mathcal{C})$ von Pfeilen, sowie zwei Abbildungen $dom, cod : Arr(\mathcal{C}) \longrightarrow Obj(\mathcal{C})$

- dom, cod ordnen jedem Pfeil seine Quelle und sein Ziel zu,
- zu jedem $\mathcal{C}$-Objekt c gibt es einen Identitätspfeil Id_c mit $cod(Id_c) = dom(Id_c) = c$,
- die Komposition $g \circ f$ zu einem Paar von Pfeilen f und g existiert, falls $cod(f) = dom(g)$ und es gilt
$$dom(g \circ f) = dom(f) \text{und } cod(g \circ f) = cod(g),$$
- für alle $\mathcal{C}$-Objekte a, b, c und d und $\mathcal{C}$-Pfeile $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$ und $h : c \longrightarrow d$ gilt:
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$
$$f \circ Id_a = f = Id_b \circ f$$

Kategorien– Beispiele

One	Objekt {*}
	Pfeile: $Id_* : * \to *$
SET	Objekte: Mengen
	Pfeile: Funktionen
REL	Objekte: Mengen
	Pfeile: $Hom_{\mathbf{REL}}(M, N)$ Menge der Relationen $R \subseteq m \times N$
$\mathbb{N}$	Objekt: $\mathbb{N}$
	Pfeile: für jede natürliche Zahl ein Pfeil $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Monoide

Ein Monoid $\mathbf{M} = (M, *, e)$ ist eine Menge M zusammen mit einer zweistelligen assoziativen Operation $* : M \times M \to M$ und Einselement e mit $x * e = e * x = x$. Jedes Monoid ergibt eine Kategorie $\mathbf{M}$.

Umgekehrt ist jede Kategorie mit nur einem Objekt a ein Monoid mit $\mathbf{M} = (a, \circ, Id_a)$

Partielle Ordnungen

- $(P, \leq_P)$ definiert eine Kategorie $\mathbf{P}$
- Objekte: Elemente p der Trägermenge,
- Pfeile: höchstens ein Pfeil zwischen zwei Objekten:

$$Hom_{\mathbf{P}}(x, y) \neq \emptyset \text{ gdw. } x \leq_P y$$

- POS:
  Objekte: partiell geordnete Mengen
  Pfeile: ordnungserhaltende Abbildungen

Kategorie der Algebren über Σ

- Signatur $\Sigma = (S, Op)$: Menge S von Sortennamen, $OP = (op_{\omega,s})_{\omega \in S^*, s \in S}$ Menge von Operationssymbolen
- Σ-Algebra $A = (A_S, A_{OP})$: Paar aus A_S= Familie von Trägermengen und A_{OP}= Familie von Operationen $op_A : A_\omega \to A_s$ für $op : \omega \to s \in OP$
- $A_\omega = A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}$ kartesisches Produkt für $\omega = s_1 \ldots s_n$,
- für $n = 0$ bezeichnet A_λ das leere Produkt, $c_A : A_\lambda \to A_s$ sind konstante Funktionen
- Σ-Homomorphismen $f : A \to B$ sind Familien $f = (f_s)_{s \in S}$ so daß für jedes $op : \omega \to s \in OP$ gilt: $f_s \circ op_A = op_B \circ f_\omega$,

$$f_\omega(a_1, \ldots a_n) = (f_{s_1}(a_1) \ldots f_{s_n}(a_n)) \qquad f_\lambda = id_{A_\lambda}$$

- $Alg(\Sigma)$ Kategorie der Algebren über Σ.

Kategorie der aussagenlogischen Formeln

- Objekte: wohlgeformte Formeln über L
- Morphismen: $Hom_{F_L}(\varphi, \psi) \neq \emptyset$ genau dann wenn $\models \varphi \to \psi$
- Kategorie $\mathbf{F_L}$

Diagramm

- Diagramme sind Graphen, deren Knoten Objekte und deren Kanten Pfeile einer Kategorie sind.
- Ein Pfad ist eine nichtleere Sequenz von Kanten und ihren Bezeichnungen, sd. der Zielknoten einer Kante gleich dem Quellknoten der nächsten Kante ist.
- Ein Diagramm Δ heißt kommutativ, wenn für jedes Paar von Knoten (m, n) die Kompositionen der Morphismen jedes Pfades von m nach n übereinstimmen.

Assoziativität von $\circ$

Kategorie $\mathcal{C}$, $a, b, c \in Obj(\mathcal{C})$

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h \circ g"] & a \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "g \circ f"'] \arrow[d, "h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f"] \\
c \arrow[r, "h"'] & d
\end{tikzcd}
$$

Monomorphismen

- $f \in Hom_{\mathbf{SET}}(a, b)$ heißt injektiv, gdw. aus $f(x) = f(y)$ folgt $x = y$.
- $f \in Hom_{\mathbf{SET}}(a, b)$ ist injektiv, falls die Kommutativität des folgenden Diagramms impliziert $g = h$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

- Ein Pfeil f einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Monomorphismus, falls für alle Pfeile g, h mit $f \circ g = f \circ h$ gilt $g = h$.

Monomorphismen II

- in $\mathbb{N}$ sind alle Pfeile Monomorphismen,
- in GRP, SET und TOP sind alle Pfeile, die als Mengenabbildungen injektiv sind Monomorphismen,
- wenn f und g Monomorphismen, dann auch $f \circ g$,
- falls $g \circ f$ monomorph ist, dann ist auch f monomorph,
- monomorphe Pfeile heißen auch links kürzbar.

Epimorphismen

- Ein Pfeil f einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Epimorphismus, falls eine Gleichheit $g \circ f = h \circ f$ für Pfeile f, g impliziert $g = h$.
- Epimorphe Pfeile heißen auch rechts kürzbar.
- In **SET**, **Grp**, TOP sind alle surjektiven Funktionen auch Epimorphismen
- In **MON**, Kategorie der Monoide ist nicht jeder Epimorphismus eine surjektive Abbildung: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$ ist epimorpher Monoid-Homomorphismus, aber nicht surjektiv.

Isomorphismen

- Ein Pfeil $e : a \rightarrow b$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Isomorphismus oder invertierbar, wenn es einen Pfeil $e' : b \rightarrow a$ gibt, sd. $e \circ e' = id_b$ und $e' \circ e = id_a$.
- Nicht in jeder Kategorie gilt, daß ein epimorpher und monomorpher Pfeil auch invertierbar ist.
- Beispiel: $\mathcal{C} = \mathbf{MON}$, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$ mit $f(n) = n \in \mathbb{I}$. Der Pfeil f ist sowohl epimorph als auch monomorph, aber kein Isomorphismus. Für $f'\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f'(x) = |x|$ gilt zwar $f \circ f' = id_{\mathbb{N}}$, aber nicht $f' \circ f = Id_{\mathbb{I}}$.

Teilategorien

$\mathcal{D}$ ist Teilkategorie von $\mathcal{C}$

- $Obj(\mathcal{D}) \subseteq Obj(\mathcal{C})$
- $Hom_{\mathcal{D}}(a, b) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(a, b)$
- $f \circ_{\mathcal{D}} g = f \circ_{\mathcal{C}} g$
- $Id_a^{\mathcal{D}} = Id_a^{\mathcal{C}}$ für alle $a \in \mathcal{D}$

$\mathcal{D}$ heißt volle Teilkategorie von $\mathcal{C}$, wenn für alle $a, b \in Obj(\mathcal{D})$ gilt $Hom_{\mathcal{D}}(a, b) = Hom_{\mathcal{C}}(a, b)$

Teilategorien Beispiele

- **SET** ist Teilkategorie von **REL**, $Hom_{\mathbf{SET}}(a, b) \subseteq Hom_{\mathbf{REL}}(a, b)$, identische Abbildungen sind die Diagonalen.
- **SET** ist keine volle Teilkategorie
- **FinSet** ist volle Teilkategorie von **SET**

Produktkategorien

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ihr Produkt mit

- $Obj(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = Obj(\mathcal{A}) \times Obj(\mathcal{B})$
- $Hom_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = Hom_{\mathcal{A}}(a_1, a_2) \times Hom_{\mathcal{B}}(b_1, b_2)$
- $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$
- $Id_{(a,b)} = (Id_a, Id_b)$

Duale Kategorien

die duale Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist definiert durch:

- $Obj(\mathcal{C}^{op}) = Obj(\mathcal{C})$
- $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(a, b) = Hom_{\mathcal{C}}(b, a)$
- $f \circ^{\mathcal{C}^{op}} g = g \circ^{\mathcal{C}} f$
- $Id_a^{\mathcal{C}^{op}} = Id_a^{\mathcal{C}}$

- **REL** ist zu sich selbst dual, d.h. $\mathbf{REL}^{op} \cong \mathbf{REL}$, aber $\mathbf{REL} \neq \mathbf{REL}^{op}$, Isomorphie wird hergestellt durch:

  $$\eta : Hom_{\mathbf{REL}}(a, b) \rightarrow Hom_{\mathbf{REL}^{op}}(a, b) \qquad R \subseteq a \times b \rightarrowtail R^{-1} \subseteq b \times a$$

- im allgemeinen gibt es keine solche Isomorphie: $|Hom_{\mathbf{SET}}(a, \{*\})| = 1 \neq |a| = |Hom_{\mathbf{SET}}(\{*\}, a)|$

Funktoren

- aus der algebraischen Topologie, zur Beschreibung geometrischer Eigenschaften durch algebraische Invarianten
- Ein kovarianter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ besteht aus Objektabbildung und einer Pfeilabbildung, sd.

  $F(Id_a) = Id_{F(a)}$ und $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ falls $g \circ f$ definiert ist.

- Ein kontravarianter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ besteht aus Objektabbildung und einer Pfeilabbildung, sd.

  $F(Id_a) = Id_{F(a)}$ und $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ falls $g \circ f$ definiert ist.

Beispiele für Funktoren

- Produktfunktor z.B. $F_Q : \mathbf{POS} \to \mathbf{POS}$ (kovariant)
  Objektabbildung $F_Q(P) = P \times Q$
  Pfeilabbildung $F_Q(f)(p, q) = (f(p), q)$
- Diagonalfunktor $\triangle : \mathbf{CAT} \to \mathbf{CAT}$
  Objektabbildung $\triangle(\mathcal{C}) = (\mathcal{C} \times \mathcal{C})$
  Pfeilabbildung $\triangle(F) = (F, F)$
- Vergißfunktor $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{SET}$, „vergißt" die unterliegende Struktur
- kovarianter Potenzmengenfunktor $F_{\mathcal{P}} : \mathbf{SET} \to \mathbf{SET}$
  Objektabbildung $F_{\mathcal{P}}(M) = \mathcal{P}(M)$
  Pfeilabbildung $f : M \to N \rightarrowtail F_{\mathcal{P}}(f)$ mit
  $$(F_{\mathcal{P}})(f)(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

Kovariante Homfunktoren

$$Hom_{\mathcal{A}}(a,\_\ ) : \mathcal{A} \to SET$$

Objektabbildung $Hom_{\mathcal{A}}(a,\_\ )(b) = Hom_{\mathcal{A}}(a,b)$

Pfeilabbildung für $f : b \to c$ gilt

$Hom_{\mathcal{A}}(a,f) : Hom_{\mathcal{A}}(a,b) \to Hom_{\mathcal{A}}(a,c)$ mit

$Hom_{\mathcal{A}}(a,f)(g) = f \circ g$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "f"'] & Hom_{\mathcal{A}}(a,b) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(a,f)"] \\ c & Hom_{\mathcal{A}}(a,c) \end{tikzcd}$$

Homfunktor $Hom_{\mathcal{A}}(\_, b) : \mathcal{A} \rightarrow SET$

Objektabbildung $Hom_{\mathcal{A}}(\_, b)(a) = Hom_{\mathcal{A}}(a, b)$

Pfeilabbildung für $f : a \rightarrow c$ gilt

$$Hom_{\mathcal{A}}(f, b) : Hom_{\mathcal{A}}(c, b) \rightarrow Hom_{\mathcal{A}}(a, b) \text{ mit}$$
$$Hom_{\mathcal{A}}(f, b)(g) = g \circ f$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & Hom_{\mathcal{A}}(a, b) \\
c & Hom_{\mathcal{A}}(c, b) \arrow[u, "Hom_{\mathcal{A}}(f, b)"']
\end{tikzcd}$$

Eigenschaften

Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt

- voll, wenn es zu jedem Paar (a, a') von $\mathcal{A}$-Objekten und zu jedem $g \in Hom_{\mathcal{D}}(FaFa')$ ein $f \in Hom_{\mathcal{C}}(a, a')$ gibt mit $Ff = g$.
- treu, wenn für jedes Paar (a, a') von $\mathcal{A}$-Objekten und jedes Paar $f, f' \in Hom_{\mathcal{C}}(aa')$ aus $Ff = Ff'$ folgt $f = f'$
- Die Pfeilabbildung von F induziert für jedes Paar von $\mathcal{A}$-Objekten eine Mengenabbildung $F_{a,a'} : Hom_{\mathcal{C}}(a, a') \to Hom_{\mathcal{D}}(Fa, Fa')$. F ist voll, falls jedes $F_{a,a'}$ surjektiv ist, treu falls jedes $F_{a,a'}$ injektiv ist.

Kategorie der Kategorien

CAT=Kategorie der Kategorien mit
$Obj(Cat)$=Kategorien
$Hom_{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$=Funktoren von $\mathcal{A}$ nach$\mathcal{B}$
Zwei Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen isomoroph, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ genau dann, wenn es einen Funktor $F\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ gibt, der ein Isomorphismus in **CAT** ist.

Funktorkategorien

- $Func[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ Kategorie der Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$
- $Obj(Func[\mathcal{A}, \mathcal{B}]) = Hom_{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- $Hom_{(Func[\mathcal{A},\mathcal{B}])}(F, G)$
  natürliche Transformationen von F nach G
- $\tau : F \longrightarrow G$ muß die Objektabbildung von F auf Objektabbildung von G und Pfeilabbildung von F auf Pfeilabbildung von G abbilden. Für jedes $\mathcal{A}$-Objekt a gibt es Komponenten $\tau^a : F(a) \longrightarrow G(a)$ so daß für $f : a \longrightarrow b$ die Bilder unter F und G ineinander überführt werden:

$$\tau_b \circ F(f) = G(f) \circ \tau_a$$

Konzept

- kategorielle Definitionen von Produkten und Koprodukten sind Spezifikationen von Eigenschaften, die auf Strukturen von Objekten und Morphismen zutreffen können
- $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ spezifiziert die Beziehung zu den Objekten A und B <u>und</u> zu ähnlichen Strukturen (X, f, g)
- andere Strukturen können nach demselben Prinzip, d.h. durch eine universelle Eigenschaft festgelegt werden
- ein und dieselbe Definition kann in verschiedenen Kategorien interpretiert werden
- Bsp: Leere Menge und Wahrheitswert $\perp$; Verkleben von Graphen und Aktualisieren von Signaturen
- Limiten und Kolimiten enthalten alle anderen universellen Konstruktionen als Spezialfälle.

Initial und Terminalobjekte

- Ein Objekt I eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Initialobjekt, wenn es zu jedem $\mathcal{C}$-Objekt a genau einen Pfeil von I zu a gibt.
- Falls es in $\mathcal{C}$ zwei Initialobjekte gibt, dann sind sie isomorph in $\mathcal{C}$.
- Ein Objekt T eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Terminalobjekt, wenn es zu jedem $\mathcal{C}$-Objekt b genau einen Pfeil von b zu T gibt.
- Falls es in $\mathcal{C}$ zwei Terminalobjekte gibt, dann sind sie isomorph in $\mathcal{C}$.
- jeder Pfeil $f : T \to b$ ist ein Monomorphismus.
- Initial- und Terminalobjekte in POS, SET, GRP, MON.

Initial-und Terminalobjekte Beispiele

- **P** für $(P, \leq_P)$ Initialonjekt $I_{\mathbf{P}}$ hat genau einen Pfeil zu jedem $p \in P$, also $I_{\mathbf{P}} \leq_P p$ für alle p, wenn es existiert ist es ein kleinstes Element, Terminalobjekt größtes Element,
- **SET**: initial $\emptyset$, terminal: Einermengen
- GRP: initial und terminal $\{e\}$
- die Termalgebra $T_\Sigma(\emptyset)$ ist initial in $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma})$, jede Σ-Algebra, deren Trägermengen eineilementig sind ist final in $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma})$
- in der Aussagenlogik F_L ist $\perp$ initial und $\top$ final, wegen $\perp \models \varphi$ und $\varphi \models \top$ für alle Aussagen φ

Produkte in Kategorien

Das Produkt zweier Objekte a und b in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist definiert durch:

- $\mathcal{C}$-Objekt $a \times b$,
- Paar von $\mathcal{C}$-Pfeilen $\pi_1 : a \times b \rightarrow a$ und $\pi_2 : a \times b \rightarrow b$ und
- Universalitätseigenschaft: für jedes Paar von $\mathcal{C}$-Pfeilen $f : c \rightarrow a$ und $g : c \rightarrow b$ gibt es genau ein Pfeil $< f, g >: c \rightarrow a \times b$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "< f, g >"] \arrow[dr, "g"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"'] \arrow[r, "p_b"] & b
\end{tikzcd}
$$

Produkte in einer partiellen Ordnung

Produkt in $(P, \leq_P)$ ist (falls es existiert) definiert durch:

- $p \times q \leq_P p$ und $p \times q \leq_P q$, d.h. $p \times q$ ist eine untere Schranke von p und q,
- falls $c \leq_P p$ und $c \leq_P q$, dann ist $c \leq_P p \times q$
- $p \times q$ ist die größte untere Schranke von p und q.

Koprodukte in Kategorien

Das Koprodukt zweier Objekte a und b in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist definiert durch:

- $\mathcal{C}$-Objekt $a \bigsqcup b$,
- Paar von $\mathcal{C}$-Pfeilen $i_1 : a \to a \bigsqcup b$ und $i_2 : b \to a \bigsqcup b$ und
- Universalitätseigenschaft: für jedes Paar von $\mathcal{C}$-Pfeilen $f : a \to c$ und $g : b \to c$ gibt es genau ein Pfeil $[f, g] : a \bigsqcup b \to c$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & a \bigsqcup b \arrow[d, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& c &
\end{tikzcd}
$$

Koprodukte in **SET**

M und N seien Mengen, gesucht eine Menge Z und Injektionen i_1, i_2 mit Universaleigenschaft,

- i_1 und i_2 müssen monomorph sein, da für $f = [f, g] \circ i_1$ monomorph auch i_1 monomorph ist.
- $[f, g](z) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{falls } z = i_1(x); \\ g(y) & \text{falls } z = i_2(y). \end{array} \right\}$
- Z muß „Kopien "aller Elemente von M sowie aller Elemente von N enthalten.
- falls Z größer als die direkte Summe ist, dann ist die Abbildung $[f, g]$ nicht mehr eindeutig bestimmt
- $Z = M \bigsqcup N$– die disjunkte Vereinigung von M und N.