Verbände, Kategorien und Funktoren

Eva Richter

26. Juni 2006

Konzept

- kategorielle Definitionen von Produkten und Koprodukten sind Spezifikationen von Eigenschaften, die auf Strukturen von Objekten und Morphismen zutreffen können
- $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ spezifiziert die Beziehung zu den Objekten A und B <u>und</u> zu ähnlichen Strukturen (X, f, g)
- andere Strukturen können nach demselben Prinzip, d.h. durch eine universelle Eigenschaft festgelegt werden
- ein und dieselbe Definition kann in verschiedenen Kategorien interpretiert werden
- Bsp: Leere Menge und Wahrheitswert $\perp$; Verkleben von Graphen und Aktualisieren von Signaturen
- Limiten und Kolimiten enthalten alle anderen universellen Konstruktionen als Spezialfälle.

Initial und Terminalobjekte

- Ein Objekt I eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Initialobjekt, wenn es zu jedem $\mathcal{C}$-Objekt a genau einen Pfeil von I zu a gibt.
- Falls es in $\mathcal{C}$ zwei Initialobjekte gibt, dann sind sie isomorph in $\mathcal{C}$.
- Ein Objekt T eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Terminalobjekt, wenn es zu jedem $\mathcal{C}$-Objekt b genau einen Pfeil von b zu T gibt.
- Falls es in $\mathcal{C}$ zwei Terminalobjekte gibt, dann sind sie isomorph in $\mathcal{C}$.
- jeder Pfeil $f : T \to b$ ist ein Monomorphismus.
- Initial- und Terminalobjekte in POS, SET, GRP, MON.

Initial-und Terminalobjekte Beispiele

- **P** für $(P, \leq_P)$ Initialonjekt $I_{\mathbf{P}}$ hat genau einen Pfeil zu jedem $p \in P$, also $I_{\mathbf{P}} \leq_P p$ für alle p, wenn es existiert ist es ein kleinstes Element, Terminalobjekt größtes Element,
- **SET**: initial $\emptyset$, terminal: Einermengen
- GRP: initial und terminal $\{e\}$
- die Termalgebra $T_\Sigma(\emptyset)$ ist initial in $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$, jede Σ-Algebra, deren Trägermengen eineilementig sind ist final in $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$
- in der Aussagenlogik F_L ist $\perp$ initial und $\top$ final, wegen $\perp \models \varphi$ und $\varphi \models \top$ für alle Aussagen φ

Produkte in Kategorien

Das Produkt zweier Objekte a und b in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist definiert durch:

- $\mathcal{C}$-Objekt $a \times b$,
- Paar von $\mathcal{C}$-Pfeilen $\pi_1 : a \times b \to a$ und $\pi_2 : a \times b \to b$ und
- Universalitätseigenschaft: für jedes Paar von $\mathcal{C}$-Pfeilen $f : c \to a$ und $g : c \to b$ gibt es genau einen Pfeil $< f, g >: c \to a \times b$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "< f, g >"] \arrow[dr, "g"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & b
\end{tikzcd}$$

Produkte in einer partiellen Ordnung

Produkt in $(P, \leq_P)$ ist (falls es existiert) definiert durch:

- $p \times q \leq_P p$ und $p \times q \leq_P q$, d.h. $p \times q$ ist eine untere Schranke von p und q,
- falls $c \leq_P p$ und $c \leq_P q$, dann ist $c \leq_P p \times q$
- $p \times q$ ist die größte untere Schranke von p und q.

Koprodukte in Kategorien

Das Koprodukt zweier Objekte a und b in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist definiert durch:

- $\mathcal{C}$-Objekt $a \bigsqcup b$,
- Paar von $\mathcal{C}$-Pfeilen $i_1 : a \to a \bigsqcup b$ und $i_2 : b \to a \bigsqcup b$ und
- Universalitätseigenschaft: für jedes Paar von $\mathcal{C}$-Pfeilen $f : a \to c$ und $g : b \to c$ gibt es genau einen Pfeil $[f, g] : a \bigsqcup b \to c$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & a \bigsqcup b \arrow[d, dotted, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

Koprodukte in **SET**

M und N seien Mengen, gesucht eine Menge Z und Injektionen i_1, i_2 mit Universaleigenschaft,

- i_1 und i_2 müssen monomorph sein, da für $f = [f, g] \circ i_1$ monomorph auch i_1 monomorph ist.
- $[f, g](z) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{falls } z = i_1(x); \\ g(y) & \text{falls } z = i_2(y). \end{array} \right\}$
- Z muß „Kopien “aller Elemente von M sowie aller Elemente von N enthalten.
- falls Z größer als die direkte Summe ist, dann ist die Abbildung $[f, g]$ nicht mehr eindeutig bestimmt
- $Z = M \bigsqcup N$– die disjunkte Vereinigung von M und N.

Egalisator

Kategoriale Verallgemeinerung von Lösungsmengen von Gleichungen

Ein Egalisator für zwei parallele Pfeile $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(b, c)$ ist ein Pfeil $u : a \to b$, so daß

- $f \circ u = g \circ u$,
- für jedes $h : e \to a$ mit $f \circ h = g \circ h$, existiert genau ein $h' : d \to e$ so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "u"] & b \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & c \\ & e \arrow[u, "h"] \arrow[ul, dotted, "h'"] & \end{tikzcd}$$

Koegalisator-Beispiel

$$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(n) = n + 3, \qquad g(n) = n - 2$$

Gibt es eine Funktion $h : \mathbb{N} \to M$, so daß $v \circ f = v \circ g$?

- Für jedes z sei $R(z) = \{x \in \mathbb{N} \mid z = f(x) \text{ oder } z = g(x)\}$, $\{R(z) \mid z \in \mathbb{N}\}$ bildet „unterteilt“ den Urbildraum von f und g
- man bilde aus den Mengen $R(z)$ durch Vereinigung paarweise nicht schnittfreier Mengen eine disjunkte Zerlegung $\{R_i\}$ des Urbildraums,
- $\{R_i\}_{i=0,\ldots 4}$ mit $R_i = \{x \in \mathbb{N} \mid x = i \ mod 5\}$
- $v(z) = i$ für $i = z \ mod 5$.

Koegalisator-Definition

Der Koegalisator zu f, g ist ein Pfeil $v : c \to d$ mit

- $v \circ f = v \circ g$,
- für jedes $h : d \to e'$ mit $h \circ f = h \circ g$, existiert genau ein $h' : e \to d'$ so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & d \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[d, dotted, "h'"'] \\
& & e'
\end{tikzcd}
$$

Koegalisator-Beispiele

- in **SET** ist v die Projektion $p : d \to d/E$ auf die Quotientenmenge von d unter der kleinsten Äquivalenzrelation $E \subseteq d \times d$, die alle Paare (fx, gx) enthält,
- in **Ab** ist der Koegalisator die Projektion $d \to d/(f-g)$ auf die Faktorgruppe von d unter der Differenz von Homomorphismen,
- in einer partiellen Ordnung **P** sind alle Koegalisatoren Identitäten.

Kartesische Produkte und Koprodukte

Für eine endliche Menge von $\mathcal{C}$-Objekten $\{x_i\}_{i\in I}$ ist das kartesische Produkt(Koprodukt)

- ein $\mathcal{C}$-Objekt $\prod_{i\in I} x_i(\coprod_{i\in I} x_i)$ zusammen mit
- einer Familie von Projektionen $\{\prod_{i\in I} x_i \to x_i\}_{i\in I}$ (Injektionen $j_i : x_i \to \coprod_{i\in I} x_i$)
  - so daß für jedes Objekt A und Familie von Pfeilen $\{a_i : A \to x_i\}_{i\in I}$ existiert ein $\alpha : A \to \prod_{i\in I} x_i$ mit $a_i = \pi_i \circ \alpha$ für alle $i \in I$
  - (so daß für jedes Objekt B und Familie von Pfeilen $\{b_i : x_i \to B\}_i \in I$ existiert ein $\beta : \coprod_{i\in I} x_i \to x_i$ mit $b_i = \beta \circ j_i$ für alle $i \in I$)

Kartesische Kategorien und Funktoren

- Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt kartesisch, wenn es für jede endliche Familie von Objekten ein Produkt in $\mathcal{C}$ gibt.
- Ein Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt kartesisch, wenn er endliche Produkte erhält, d.h. wenn für jedes Produkt $(\Pi, (\pi_i)_{i=1,\ldots,n})$ für eine Menge von $\mathcal{C}$-Objekten $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ gilt $(F\Pi, (F\pi_i)_{i=1,\ldots,n})$ ist Produkt von $\mathcal{D}$-Objekten $(F(A_i))_{i=1,\ldots,n}$.
  Dabei muß $\mathcal{C}$ nicht notwendig kartesisch sein.

Definition

Ein universeller Pfeil von d nach $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist ein Paar (r, u), wobei $r \in Obj(\mathcal{C})$ und $u : d \rightarrow S(r)$, so daß zu jedem Paar $(c, f : d \rightarrow Sc)$ *genau ein* $\mathcal{C}$-Pfeil $h : r \rightarrow c$ existiert mit $f' = Sh \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "S"] & \mathcal{D} & \\
r \arrow[d, dotted, "h"'] & Sr \arrow[d, dotted, "Sh"'] & d \arrow[l, "u"'] \arrow[dl, "f"] \\
c & Sc &
\end{tikzcd}$$

Universelle Pfeile–Beispiel

- Funktor $\triangle : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$
- ein universeller Pfeil u von (a, b) nach $\triangle$ ist ein Objekt c und Pfeil $u : (a, b) \to \triangle c$
- Pfeile in $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ sind Paare von $\mathcal{C}$-Pfeilen: $u = (u_1, u_2)$ mit $u_1 : a \to c$ und $u_2 : b \to c$.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, dotted, "h"'] & \triangle c = (c, c) \arrow[d, dotted, "\triangle h"'] & (a, b) \arrow[l, "{(u_1, u_2)}"'] \arrow[dl, "{(f_1, f_2)}"] \\
c' & \triangle c' = (c', c') &
\end{tikzcd}
$$

Universelle Pfeile–Koegalisator

- $E \subseteq M \times M$ Äquivalenzrelation,
- Funktor $H : \mathbf{SET} \to \mathbf{SET}$, mit $H(X) = \{f : S \to X \mid (sEs' \Rightarrow fs = fs')$
- das Paar $(S/\sim_E, u : \{*\} \to H(S/\sim_E)$ ist ein universeller Pfeil von $\{*\}$ nach H,

$$
\begin{tikzcd}
M/\sim_E \arrow[d, dotted, "h"'] & {\color{blue}H(M/\sim_E)} \arrow[d, dotted, "H(h)"'] & \{*\} \arrow[l, "{\color{blue}u}"'] \arrow[dl, "g"] \\
X & H(X) &
\end{tikzcd}
$$

Eigenschaften Universeller Pfeile

Satz

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktor. Ein Paar $(c, u : d \to Fc)$ ist ein universeller Pfeil von d nach F, genau dann, wenn die Abbildung, die jeden Pfeil $f' : c \to c'$ in den Pfeil $Ff' \circ u : d \to Fc'$ überführt, eine Bijektion von Hom-Mengen ist:

$$Hom_{\mathcal{C}}(c, c') \cong Hom_{\mathcal{D}}(d, Fc')$$

- *diese Bijektion ist natürlich in c',*
- *jeder natürliche Isomorphismus dieser Art wird bei gegebenem d und c durch einen eindeutig bestimmten Pfeil $u : d \to Fc$ so daß (c, u) universell von d nach F ist festgelegt.*

Yoneda-Lemma

Lemma

$\mathcal{C}$ mit kleinen Hom-Mengen, $F : \mathcal{C} \to \mathbf{SET}$,
Für jedes $c \in Obj(\mathcal{C})$ existiert eine Bijektion

$$Y : Nat(Hom_{\mathcal{C}}(c, \_\,), F) \cong Fc$$

$$\alpha \mapsto \alpha_c(Id_c)$$

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(c,f)"'] & Fc \arrow[d, "Ff"'] & c \arrow[d, "f"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(c,c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"] & Fc' & c'
\end{tikzcd}$$

Spezialfälle

- ein universeller Pfeil von (a, b) nach $\triangle : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ heißt Koproduktdiagramm
- ersetzt man $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ durch $\mathcal{C}^X$, mit einer beliebige Menge X als diskrete Kategorie betrachtet, erhält man als universellen Pfeil von $a \in \mathcal{C}^X$ nach $\triangle_X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^X$ ein X-faches Koproduktdiagramm
- $\mathcal{C}$ habe ein Nullobjekt z mit $0 : a \to z \to c$ als Nullpfeil. Der Kokern von $f : a \to b$ ist ein Pfeil $u : b \to c$ mit
  (i) $u \circ f = 0 : a \to c$
  (i) für alle $h : b \to e$ mit $h \circ f = 0 : a \to e$ existiert ein h' mit $h = h' \circ u$

Spezialfall-Koegalisator

$$\text{Kategorie } \downarrow\downarrow \quad \cdot \rightrightarrows \cdot$$

- bilde Funktorkategorie $\mathcal{C}^{\downarrow\downarrow}$
- $\mathcal{C}^{\downarrow\downarrow}$-Objekte „sind“ parallele Pfeile (f, g) in $\mathcal{C}$
- $\mathcal{C}^{\downarrow\downarrow}$-Pfeile sind nat. Transformationen $\alpha = (h, k)$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "h"'] & b \arrow[d, "k"] \\
a' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & b'
\end{tikzcd}$$

Spezialfall-Koegalisator fortgesetzt

$$\triangle : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\downarrow\downarrow} \text{ mit } \triangle c = (Id_c, Id_c) \text{ und } \triangle r = (r, r)$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "r"'] \\ c' \end{tikzcd} \quad \mapsto^{\triangle} \quad \begin{tikzcd} c \arrow[r, shift left, "Id_c"] \arrow[r, shift right, "Id_c"'] \arrow[d, "r"'] & c \arrow[d, "r"] \\ c' \arrow[r, shift left, "Id_{c'}"] \arrow[r, shift right, "Id_{c'}"'] & c' \end{tikzcd}$$

Koegalisator fortgesetzt

Diagramm in $\mathcal{C}^{\downarrow\downarrow}$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "hf"'] & b \arrow[d, "h"] \\ e \arrow[r, shift left, "Id_e"] \arrow[r, shift right, "Id_e"'] & e \end{tikzcd}$$

Der Pfeil $(hf = hg, h) : (f, g) \longrightarrow (Id_e, Id_e)$ in der Funktorkategorie $\mathcal{C}^{\downarrow\downarrow}$ ist ein universeller Pfeil von (f, g) nach $\triangle$, genau dann wenn $h : b \longrightarrow e$ der Koegalisator von (f, g) ist.

Kolimiten und Limiten

Für Kategorie J ist der Diagonalfunktor $\triangle : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^J$ definiert durch

- $\triangle c$ ist der konstante Funktor mit $\triangle c(j) = c$ für alle $j \in J$ und $\triangle c(r) = Id_c$
- Pfeilabbildung: für $f : c \to c'$ ist $\triangle f : \triangle c \to \triangle c'$ die natürliche Transformation bei der jede Komponente $\triangle f_j = f$

Jeder Funktor $F : J \to \mathcal{C}$ ist Objekt in $\mathcal{C}^J$.
Ein universeller Pfeil von F nach $\triangle$–also ein Paar $(c, u : F \to \triangle c)$ heißt Kolimesdiagramm, das Objekt c heißt Kolimes bzw. induktiver Limes.

Motivation

- Ausgangspunkt waren Beziehungen der Art $Hom(F(X), Y) = Hom(X, G(Y))$
- Terminologie aus der Idee adjungierter Operatoren T, U für Hilberträume d.h. $< Tx, y >=< x, Uy >$
- Adjungierte Funktoren fixieren das Konzept einer besten Struktur eines Typs, den man konstruieren möchte
- Bsp: Ringtheorie, es soll eine multiplikative Einheit zu einem Ring hinzugefügt werden
- der beste Weg das zu tun ist: füge 1 hinzu und außerdem nur das, was unbedingt nötig ist.
- Adjungierte Funktoren sind *ein* Weg zur Präzision des Begriffs beste Struktur, der Begriff der universellen Eigenschaften ein im Wesentlichen äquivalenter aber konkreterer.

Partielle Ordnungen

- partiell geordnete Mengen als Kategorien ansehen
- ein Paar adjungierter Funktoren zwischen zwei solchen Kategorien heißt Galois Connection
- $\mathbf{mod}^{\models} : \mathcal{P}(F_L) \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$ und $\mathbf{th}^{\models} : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \mathcal{P}(F_L)$
- jede Galois-Verbindung induziert Hüllenoperatoren und zwei inverse ordnungserhaltende Bijektionen zwischen den entsprechenden abgeschlossenen Elementen

Definition

Das Paar (F, G), mit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ heißt Adjungiertes Funktorpaar falls

- ein natürlicher Isomorphismus $\varphi : Hom_{\mathcal{D}}(F_{-}, _{-}) \to Hom_{\mathcal{C}}(_{-}, G_{-})$ existiert, bestehend aus den Bijektionen $\varphi_{c,d} : Hom_{\mathcal{D}}(Fc, d) \to Hom_{\mathcal{C}}(c, Gd)$
- d.h. für alle Morphismen $f : c' \to c$ und $g : d \to d'$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(Fc, d) \arrow[r, "\varphi_{c,d}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(Ff, g)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(c, Gd) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(f, Gg)"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(Fc', d') \arrow[r, "\varphi_{c',d'}"] & Hom_{\mathcal{C}}(c', Gd')
\end{tikzcd}$$

Definition II

- $\varphi_{c,d} : Hom_{\mathcal{D}}(Fc, d) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(c, Gd)$
- F ist linksadjungiert zu G, G ist rechtsadjungiert zu F
- jedes adjungierte Paar definiert eine natürliche Transformation $\eta : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$, die Einheit, mit

$$\eta_c : c \rightarrow GF(c) \text{ wobei } \eta_c = \varphi_{c,Fc}(Id_{Fc})$$

- jedes adjungierte Paar definiert eine natürliche Transformation $\epsilon : FG \rightarrow Id_{\mathcal{C}}$, die Koeinheit, mit

$$\epsilon_d : FG(d) \rightarrow d \text{ wobei } \epsilon_d = \varphi^{-1}_{Gd,d}(Id_{Gd})$$

Beispiel $\mathbf{mod}^{\models}$, $\mathbf{th}^{\models}$

$$
\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{M})^{op}}(\mathbf{mod}^{\models}(\Phi), M) \arrow[r, "\varphi_{\Phi,M}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{M})^{op}}(f, \mathbf{mod}^{\models} g)"'] & Hom_{\mathcal{P}(F_L)}(\Phi, \mathbf{th}^{\models} M) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{P}(F_L)}(\mathbf{th}^{\models} f, g)"'] \\
Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{M})^{op}}(\mathbf{mod}^{\models}(\Phi'), M') \arrow[r, "\varphi_{\Phi',M'}"] & Hom_{\mathcal{P}(F_L)}(\Phi', \mathbf{th}^{\models} M')
\end{tikzcd}
$$

$Hom_{\mathcal{P}(F_L)}(\Phi, \mathbf{th}^{\models} M) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\Phi \subseteq \mathbf{th}^{\models}(M)$ genau dann wenn $M \subseteq mod(\Phi)$.

Die Einheit $\eta_{\Phi} =: \Phi \subseteq \mathbf{Cn}(\Phi)$, die Koeinheit $\epsilon_M : M \subseteq cl(M)$

Currying

Sei $b \in Obj(\mathcal{C})$, Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, mit

$$F(a) = a \times b \qquad G(c) = Hom_{\mathcal{C}}(b, c) = c^b$$

$$\varphi_{a,c} : Hom_{\mathcal{C}}(a \times b, c) \to Hom_{\mathcal{C}}(a, c^b)$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f'"'] & a \times b \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "{(f', id_b)}"] & \\
c^b & c & c^b \times b \arrow[l, "ev"]
\end{tikzcd}$$

Freie Objekte und Vergißfunktoren

- F : **SET** $\rightarrow$ **Grp** ordnet einer Menge X die freie Gruppe G_X über X zu, U : **Grp** $\rightarrow$ **SET** Vergißfunktor
- F ist linksadjungiert zu G
- die Einheit von (F, G) ist die Einbettung von X in die Menge G_X

Produkte

- $\triangle : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}^2$ der Diagonalfunktor
- $\Pi : \mathbf{Grp}^2 \to \mathbf{Grp}$ der Produktfunktor mit $\Pi(a, b) = a \times b$
- Universaleigenschaft der Produktgruppe zeigt, daß Π rechtsadjungiert zu $\triangle$ ist
- die Koeinheit gibt die natürlichen Projektionen vom Produkt in die Faktoren.

Eigenschaften adjungierter Funktorpaare

- für jedes $\mathcal{C}$-Objekt c ist (Fc, η_c) ein universeller Pfeil von c nach G
- universelle Konstruktionen sind allgemeiner: Universelle Konstruktionen sind wie Optimierungsprobleme; sie ergeben ein adjungiertes Funktorpaar, gdw. für jedes $\mathcal{C}$-Objekt eine solche optimale Lösung existiert
- Charakterisierung über Einheit und Koeinheit: falls $\eta : Id_{\mathcal{C}} \to GF$ und $\epsilon : FG \to Id_{\mathcal{D}}$ existieren und falls

$$\epsilon F \circ F\eta = Id_F \text{ und } G\epsilon \circ \eta G = Id_G$$

dann sind F und G ein adjungiertes Funktorpaar.

Eigenschaften II

- Jeder Funktor G, der einen links(rechts-)adjungierten Funktor hat, ist stetig(ko-stetig), d.h. er kommutiert mit Kolimiten(Kolimiten).

Satz (Freyds Theorem)

$\mathcal{D}$ sei vollständig. G hat einen linksadjungierten Funktor, gdw.

1. *G stetig ist,*
2. *für jedes $c \in Obj(\mathcal{C})$ eine Familie $\{f_i : c \longrightarrow G(d_i)\}_{i \in I}$ existiert, so daß*
3. *für jedes $h \in Hom_{\mathcal{C}}(c, Gd)$ gilt $h = G(t) \circ f_i$ für ein $i \in I$ und ein $t : d_i \longrightarrow d$.*