

Verbände, Kategorien und Funktoren

Eva Richter

26. Juni 2006

Konzept

- ▶ kategorielle Definitionen von Produkten und Koprodukten sind Spezifikationen von Eigenschaften, die auf Strukturen von Objekten und Morphismen zutreffen können
- ▶ $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ spezifiziert die Beziehung zu den Objekten A und B und zu ähnlichen Strukturen (X, f, g)
- ▶ andere Strukturen können nach demselben Prinzip, d.h. durch eine **universelle Eigenschaft** festgelegt werden
- ▶ ein und dieselbe Definition kann in verschiedenen Kategorien interpretiert werden
- ▶ Bsp: Leere Menge und Wahrheitswert \perp ; Verkleben von Graphen und Aktualisieren von Signaturen
- ▶ Limiten und Kolimiten enthalten alle anderen universellen Konstruktionen als Spezialfälle.

Initial und Terminalobjekte

- ▶ Ein Objekt I einer Kategorie \mathcal{C} heißt **Initialobjekt**, wenn es zu jedem \mathcal{C} -Objekt a genau einen Pfeil von I zu a gibt.
- ▶ Falls es in \mathcal{C} zwei Initialobjekte gibt, dann sind sie isomorph in \mathcal{C} .
- ▶ Ein Objekt T einer Kategorie \mathcal{C} heißt **Terminalobjekt**, wenn es zu jedem \mathcal{C} -Objekt b genau einen Pfeil von b zu T gibt.
- ▶ Falls es in \mathcal{C} zwei Terminalobjekte gibt, dann sind sie isomorph in \mathcal{C} .
- ▶ jeder Pfeil $f : T \rightarrow b$ ist ein Monomorphismus.
- ▶ Initial- und Terminalobjekte in POS, SET, GRP, MON.

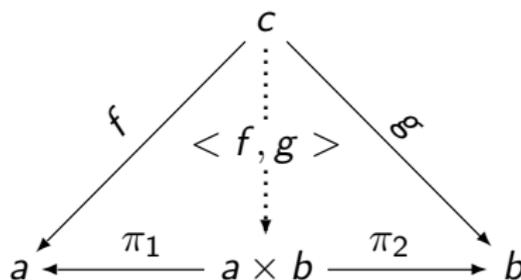
Initial-und Terminalobjekte Beispiele

- ▶ **P** für (P, \leq_P) Initialobjekt l_P hat genau einen Pfeil zu jedem $p \in P$, also $l_P \leq_P p$ für alle p , wenn es existiert ist es ein kleinstes Element, Terminalobjekt größtes Element,
- ▶ **SET**: initial \emptyset , terminal: Einermengen
- ▶ **GRP**: initial und terminal $\{e\}$
- ▶ die Termalgebra $T_\Sigma(\emptyset)$ ist initial in **Alg**(Σ), jede Σ -Algebra, deren Trägermengen einelementig sind ist final in **Alg**(Σ)
- ▶ in der Aussagenlogik F_L ist \perp initial und \top final, wegen $\perp \models \varphi$ und $\varphi \models \top$ für alle Aussagen φ

Produkte in Kategorien

Das **Produkt** zweier Objekte a und b in einer Kategorie \mathcal{C} ist definiert durch:

- ▶ **\mathcal{C} -Objekt** $a \times b$,
- ▶ **Paar von \mathcal{C} -Pfeilen** $\pi_1 : a \times b \rightarrow a$ und $\pi_2 : a \times b \rightarrow b$ und
- ▶ **Universalitätseigenschaft**: für jedes Paar von \mathcal{C} -Pfeilen $f : c \rightarrow a$ und $g : c \rightarrow b$ gibt es genau einen Pfeil $\langle f, g \rangle : c \rightarrow a \times b$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:



Produkte in einer partiellen Ordnung

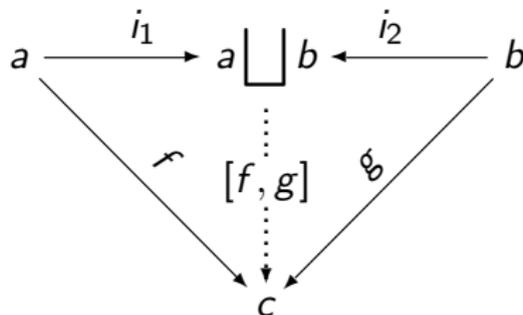
Produkt in (P, \leq_P) ist (falls es existiert) definiert durch:

- ▶ $p \times q \leq_P p$ und $p \times q \leq_P q$, d.h. $p \times q$ ist eine untere Schranke von p und q ,
- ▶ falls $c \leq_P p$ und $c \leq_P q$, dann ist $c \leq_P p \times q$
- ▶ $p \times q$ ist die größte untere Schranke von p und q .

Koprodukte in Kategorien

Das **Koprodukt** zweier Objekte a und b in einer Kategorie \mathcal{C} ist definiert durch:

- ▶ \mathcal{C} -Objekt $a \sqcup b$,
- ▶ Paar von \mathcal{C} -Pfeilen $i_1 : a \rightarrow a \sqcup b$ und $i_2 : b \rightarrow a \sqcup b$ und
- ▶ **Universalitätseigenschaft**: für jedes Paar von \mathcal{C} -Pfeilen $f : a \rightarrow c$ und $g : b \rightarrow c$ gibt es **genau einen** Pfeil $[f, g] : a \sqcup b \rightarrow c$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:



Koprodukte in SET

M und N seien Mengen, gesucht eine Menge Z und Injektionen i_1, i_2 mit Universaleigenschaft,

- ▶ i_1 und i_2 müssen monomorph sein, da für $f = [f, g] \circ i_1$ monomorph auch i_1 monomorph ist.

- ▶ $[f, g](z) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{falls } z = i_1(x); \\ g(y) & \text{falls } z = i_2(y). \end{array} \right\}$

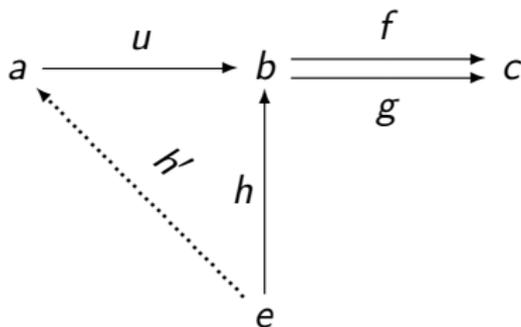
- ▶ Z muß „Kopien“ aller Elemente von M sowie aller Elemente von N enthalten.
- ▶ falls Z größer als die direkte Summe ist, dann ist die Abbildung $[f, g]$ nicht mehr eindeutig bestimmt
- ▶ $Z = M \sqcup N$ – die disjunkte Vereinigung von M und N .

Egalisator

Kategoriale Verallgemeinerung von Lösungsmengen von Gleichungen

Ein **Egalisator** für zwei parallele Pfeile $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b, c)$ ist ein Pfeil $u : a \rightarrow b$, so daß

- ▶ $f \circ u = g \circ u$,
- ▶ für jedes $h : e \rightarrow a$ mit $f \circ h = g \circ h$, existiert genau ein $h' : d \rightarrow e$ so daß das folgende Diagramm kommutiert:



Koegalisateur-Beispiel

$$f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = n + 3, \quad g(n) = n - 2$$

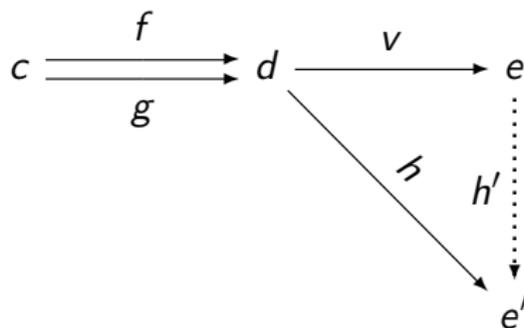
Gibt es eine Funktion $h : \mathbb{N} \rightarrow M$, so daß $v \circ f = v \circ g$?

- ▶ Für jedes z sei $R(z) = \{x \in \mathbb{N} \mid z = f(x) \text{ oder } z = g(x)\}$,
 $\{R(z) \mid z \in \mathbb{N}\}$ bildet „unterteilt“ den Urbildraum von f und g
- ▶ man bilde aus den Mengen $R(z)$ durch Vereinigung paarweise nicht schnittfreier Mengen eine disjunkte Zerlegung $\{R_i\}$ des Urbildraums,
- ▶ $\{R_i\}_{i=0,\dots,4}$ mit $R_i = \{x \in \mathbb{N} \mid x = i \text{ mod } 5\}$
- ▶ $v(z) = i$ für $i = z \text{ mod } 5$.

Koegalisor-Definition

Der **Koegalisor** zu f, g ist ein Pfeil $v : c \rightarrow d$ mit

- ▶ $v \circ f = v \circ g$,
- ▶ für jedes $h : d \rightarrow e'$ mit $h \circ f = h \circ g$, existiert genau ein $h' : e \rightarrow e'$ so daß das folgende Diagramm kommutiert:



Koegalisateur-Beispiele

- ▶ in **SET** ist v die Projektion $p : d \rightarrow d/E$ auf die Quotientenmenge von d unter der kleinsten Äquivalenzrelation $E \subseteq d \times d$, die alle Paare (fx, gx) enthält,
- ▶ in **Ab** ist der Koegalisateur die Projektion $d \rightarrow d/(f - g)$ auf die Faktorgruppe von d unter der Differenz von Homomorphismen,
- ▶ in einer partiellen Ordnung **P** sind alle Koegalisatoren Identitäten.

Kartesische Produkte und Koprodukte

Für eine endliche Menge von \mathcal{C} -Objekten $\{x_i\}_{i \in I}$ ist das kartesische Produkt (**Koprodukt**)

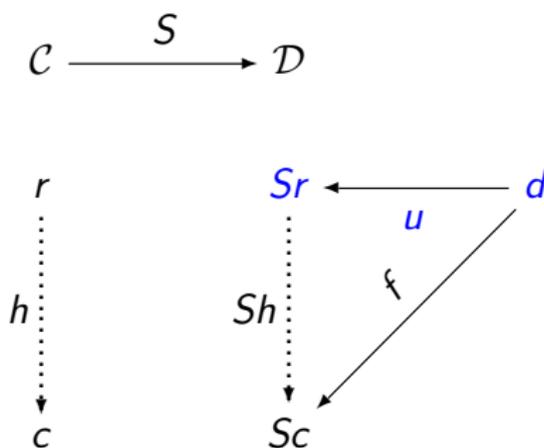
- ▶ ein \mathcal{C} -Objekt $\prod_{i \in I} x_i$ ($\coprod_{i \in I} x_i$) zusammen mit
- ▶ einer Familie von Projektionen $\{\prod_{i \in I} x_i \rightarrow x_i\}_{i \in I}$ (**Injektionen** $j_i : x_i \rightarrow \coprod_{i \in I} x_i$)
 - so daß für jedes Objekt A und Familie von Pfeilen $\{a_i : A \rightarrow x_i\}_{i \in I}$ existiert ein $\alpha : A \rightarrow \prod_{i \in I} x_i$ mit $a_i = \pi_i \circ \alpha$ für alle $i \in I$
 - (so daß für jedes Objekt B und Familie von Pfeilen $\{b_i : x_i \rightarrow B\}_{i \in I}$ existiert ein $\beta : \coprod_{i \in I} x_i \rightarrow B$ mit $b_i = \beta \circ j_i$ für alle $i \in I$)

Kartesische Kategorien und Funktoren

- ▶ Eine Kategorie \mathcal{C} heißt **kartesisch**, wenn es für jede endliche Familie von Objekten ein Produkt in \mathcal{C} gibt.
- ▶ Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt **kartesisch**, wenn er endliche Produkte erhält, d.h. wenn für jedes Produkt $(\Pi, (\pi_i)_{i=1, \dots, n})$ für eine Menge von \mathcal{C} -Objekten $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ gilt $(F\Pi, (F\pi_i)_{i=1, \dots, n})$ ist Produkt von \mathcal{D} -Objekten $(F(A_i))_{i=1, \dots, n}$.
Dabei muß \mathcal{C} nicht notwendig kartesisch sein.

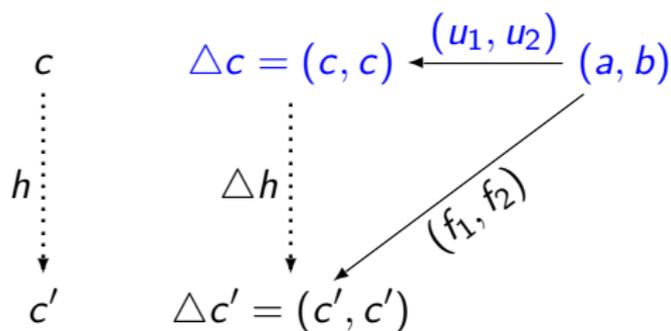
Definition

Ein **universeller Pfeil von d nach $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$** ist ein Paar (r, u) , wobei $r \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ und $u : d \rightarrow S(r)$, so daß zu jedem Paar $(c, f : d \rightarrow Sc)$ *genau ein* \mathcal{C} -Pfeil $h : r \rightarrow c$ existiert mit $f' = Sh \circ u$.



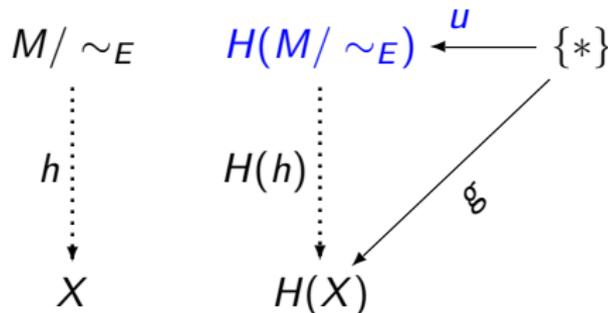
Universelle Pfeile–Beispiel

- ▶ Funktor $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$
- ▶ ein universeller Pfeil u von (a, b) nach Δ ist ein Objekt c und Pfeil $u : (a, b) \rightarrow \Delta c$
- ▶ Pfeile in $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ sind Paare von \mathcal{C} -Pfeilen: $u = (u_1, u_2)$ mit $u_1 : a \rightarrow c$ und $u_2 : b \rightarrow c$.



Universelle Pfeile–Koegalisator

- ▶ $E \subseteq M \times M$ Äquivalenzrelation,
- ▶ Funktor $H : \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{SET}$, mit
 $H(X) = \{f : S \rightarrow X \mid (sEs' \Rightarrow fs = fs')\}$
- ▶ das Paar $(S/\sim_E, u : \{*\} \rightarrow H(S/\sim_E))$ ist ein universeller Pfeil von $\{*\}$ nach H ,



Eigenschaften Universeller Pfeile

Satz

$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktor. Ein Paar $(c, u : d \rightarrow Fc)$ ist ein universeller Pfeil von d nach F , genau dann, wenn die Abbildung, die jeden Pfeil $f' : c \rightarrow c'$ in den Pfeil $Ff' \circ u : d \rightarrow Fc'$ überführt, eine Bijektion von Hom-Mengen ist:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c') \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(d, Fc')$$

- ▶ *diese Bijektion ist natürlich in c' ,*
- ▶ *jeder natürliche Isomorphismus dieser Art wird bei gegebenem d und c durch einen eindeutig bestimmten Pfeil $u : d \rightarrow Fc$ so daß (c, u) universell von d nach F ist festgelegt.*

Yoneda-Lemma

Lemma

\mathcal{C} mit kleinen Hom-Mengen, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{SET}$,

Für jedes $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existiert eine Bijektion

$$Y : \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, -), F) \cong Fc$$

$$\alpha \mapsto \alpha_c(\text{Id}_c)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c) & \xrightarrow{\alpha_c} & Fc & & c \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, f) & & Ff & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & Fc' & & c'
 \end{array}$$

Spezialfälle

- ▶ ein universeller Pfeil von (a, b) nach $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ heißt **Koproduktdiagramm**
- ▶ ersetzt man $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ durch \mathcal{C}^X , mit einer beliebige Menge X als diskrete Kategorie betrachtet, erhält man als universellen Pfeil von $a \in \mathcal{C}^X$ nach $\Delta_X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^X$ ein **X -faches Koproduktdiagramm**
- ▶ \mathcal{C} habe ein Nullobjekt z mit $0 : a \rightarrow z \rightarrow c$ als Nullpfeil. Der **Kokern** von $f : a \rightarrow b$ ist ein Pfeil $u : b \rightarrow c$ mit
 - $u \circ f = 0 : a \rightarrow c$
 - für alle $h : b \rightarrow e$ mit $h \circ f = 0 : a \rightarrow e$ existiert ein h' mit $h = h' \circ u$

Spezialfall-Koegalisateur

Kategorie $\Downarrow \cdot$ $\begin{array}{ccc} & \longrightarrow & \\ & & \longrightarrow \end{array} \cdot$

- ▶ bilde Funktorkategorie \mathcal{C}^{\Downarrow}
- ▶ \mathcal{C}^{\Downarrow} -Objekte „sind“ parallele Pfeile (f, g) in \mathcal{C}
- ▶ \mathcal{C}^{\Downarrow} -Pfeile sind nat. Transformationen $\alpha = (h, k)$

$$\begin{array}{ccc}
 a & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & b \\
 \downarrow h & & \downarrow k \\
 a' & \begin{array}{c} \xrightarrow{f'} \\ \xrightarrow{g'} \end{array} & b'
 \end{array}$$

Spezialfall-Koegalisateur fortgesetzt

$\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\downarrow\downarrow}$ mit $\Delta c = (Id_c, Id_c)$ und $\Delta r = (r, r)$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} c \\ \downarrow r \\ c' \end{array} & \Rightarrow^{\Delta} & \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{Id_c} & c \\ \downarrow r & \xrightarrow{Id_c} & \downarrow r \\ c' & \xrightarrow{Id_{c'}} & c' \\ & \xrightarrow{Id_{c'}} & \end{array}
 \end{array}$$

Koegalisor fortgesetzt

Diagramm in $\mathcal{C}^{\Downarrow\Downarrow}$

$$\begin{array}{ccc}
 a & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & b \\
 \begin{array}{c} \downarrow hf \\ \downarrow h \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow h \\ \downarrow hf \end{array} \\
 e & \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_e} \\ \xrightarrow{Id_e} \end{array} & e
 \end{array}$$

Der Pfeil $(hf = hg, h) : (f, g) \rightarrow (Id_e, Id_e)$ in der Funktorkategorie $\mathcal{C}^{\Downarrow\Downarrow}$ ist ein universeller Pfeil von (f, g) nach Δ , genau dann wenn $h : b \rightarrow e$ **der Koegalisor von (f, g) ist.**

Kolimiten und Limiten

Für Kategorie J ist der Diagonalfunktor $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$ definiert durch

- ▶ Δc ist der konstante Funktor mit $\Delta c(j) = c$ für alle $j \in J$ und $\Delta c(r) = Id_c$
- ▶ Pfeilabbildung: für $f : c \rightarrow c'$ ist $\Delta f : \Delta c \rightarrow \Delta c'$ die natürliche Transformation bei der jede Komponente $\Delta f_j = f$

Jeder Funktor $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ ist Objekt in \mathcal{C}^J .

Ein universeller Pfeil von F nach Δ —also ein Paar $(c, u : F \rightarrow \Delta c)$ heißt **Kolimesdiagramm**, das Objekt c heißt **Kolimes** bzw. **induktiver Limes**.

Motivation

- ▶ Ausgangspunkt waren Beziehungen der Art $\text{Hom}(F(X), Y) = \text{Hom}(X, G(Y))$
- ▶ Terminologie aus der Idee adjungierter Operatoren T, U für Hilberträume d.h. $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Uy \rangle$
- ▶ Adjungierte Funktoren fixieren das Konzept einer **besten Struktur** eines Typs, den man konstruieren möchte
- ▶ Bsp: Ringtheorie, es soll eine multiplikative Einheit zu einem Ring hinzugefügt werden
- ▶ der **beste Weg** das zu tun ist: füge 1 hinzu und außerdem nur das, was unbedingt nötig ist.
- ▶ Adjungierte Funktoren sind *ein* Weg zur Präzision des Begriffs **beste Struktur**, der Begriff der universellen Eigenschaften ein im Wesentlichen äquivalenter aber konkreterer.

Partielle Ordnungen

- ▶ partiell geordnete Mengen als Kategorien ansehen
- ▶ ein Paar adjungierter Funktoren zwischen zwei solchen Kategorien heißt **Galois Connection**
- ▶ $\mathbf{mod}^{\models} : \mathcal{P}(F_L) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M})$ und $\mathbf{th}^{\models} : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}(F_L)$
- ▶ jede Galois-Verbindung induziert Hüllenoperatoren und zwei inverse ordnungserhaltende Bijektionen zwischen den entsprechenden abgeschlossenen Elementen

Definition

Das Paar (F, G) , mit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ heißt **Adjungiertes Funktorpaar** falls

- ▶ ein natürlicher Isomorphismus $\varphi : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_{-}, -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G_{-})$ existiert, bestehend aus den Bijektionen $\varphi_{c,d} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd)$
- ▶ d.h. für alle Morphismen $f : c' \rightarrow c$ und $g : d \rightarrow d'$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fc, d) & \xrightarrow{\varphi_{c,d}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd) \\
 \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Ff, g) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Gg) \\
 \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fc', d') & \xrightarrow{\varphi_{c',d'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c', Gd')
 \end{array}$$

Definition II

- ▶ $\varphi_{c,d} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd)$
- ▶ F ist **linksadjungiert** zu G , G ist **rechtsadjungiert** zu F
- ▶ jedes adjungierte Paar definiert eine natürliche Transformation $\eta : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$, die **Einheit**, mit

$$\eta_c : c \rightarrow GF(c) \text{ wobei } \eta_c = \varphi_{c,Fc}(Id_{Fc})$$

- ▶ jedes adjungierte Paar definiert eine natürliche Transformation $\epsilon : FG \rightarrow Id_{\mathcal{D}}$, die **Koeinheit**, mit

$$\epsilon_d : FG(d) \rightarrow d \text{ wobei } \epsilon_d = \varphi_{Gd,d}^{-1}(Id_{Gd})$$

Beispiel $\mathbf{mod}^{\models}, \mathbf{th}^{\models}$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{P}(\mathcal{M})^{\text{op}}}(\mathbf{mod}^{\models}(\Phi), M) & \xrightarrow{\varphi_{\Phi, M}} & \text{Hom}_{\mathcal{P}(F_L)}(\Phi, \mathbf{th}^{\models} M) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Hom}_{\mathcal{P}(\mathcal{M})^{\text{op}}}(f, \mathbf{mod}^{\models} g) & & \text{Hom}_{\mathcal{P}(F_L)}(\mathbf{th}^{\models} f, g) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Hom}_{\mathcal{P}(\mathcal{M})^{\text{op}}}(\mathbf{mod}^{\models}(\Phi'), M') & \xrightarrow{\varphi_{\Phi', M'}} & \text{Hom}_{\mathcal{P}(F_L)}(\Phi', \mathbf{th}^{\models} M')
 \end{array}$$

$\text{Hom}_{\mathcal{P}(F_L)}(\Phi, \mathbf{th}^{\models} M) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\Phi \subseteq \mathbf{th}^{\models}(M)$ genau dann wenn $M \subseteq \mathbf{mod}(\Phi)$.

Die Einheit $\eta_{\Phi} =: \Phi \subseteq \mathbf{Cn}(\Phi)$, die Koeinheit $\epsilon_M =: M \subseteq \mathbf{cl}(M)$

Currying

Sei $b \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, Funktoren $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, mit

$$F(a) = a \times b \quad G(c) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b, c) = c^b$$

$$\varphi_{a,c} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a \times b, c) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, c^b)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 a & & a \times b & & \\
 \downarrow f' & & \downarrow f & \searrow (f', \text{id}_b) & \\
 c^b & & c & \longleftarrow & c^b \times b \\
 & & & \text{ev} &
 \end{array}$$

Freie Objekte und Vergißfunktoren

- ▶ $F : \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{Grp}$ ordnet einer Menge X die freie Gruppe G_X über X zu, $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{SET}$ Vergißfunktoren
- ▶ F ist linksadjungiert zu G
- ▶ die Einheit von (F, G) ist die Einbettung von X in die Menge G_X

Produkte

- ▶ $\Delta : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}^2$ der Diagonalfunktor
- ▶ $\Pi : \mathbf{Grp}^2 \rightarrow \mathbf{Grp}$ der Produktfunktork mit $\Pi(a, b) = a \times b$
- ▶ Universaleigenschaft der Produktgruppe zeigt, daß Π rechtsadjungiert zu Δ ist
- ▶ die Koeinheit gibt die natürlichen Projektionen vom Produkt in die Faktoren.

Eigenschaften adjungierter Funktorpaare

- ▶ für jedes \mathcal{C} -Objekt c ist (F_c, η_c) ein universeller Pfeil von c nach G
- ▶ universelle Konstruktionen sind allgemeiner: Universelle Konstruktionen sind wie Optimierungsprobleme; sie ergeben ein adjungiertes Funktorpaar, gdw. für jedes \mathcal{C} -Objekt eine solche optimale Lösung existiert
- ▶ Charakterisierung über Einheit und Koeinheit: falls $\eta : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ und $\epsilon : FG \rightarrow Id_{\mathcal{D}}$ existieren und falls

$$\epsilon F \circ F \eta = Id_F \text{ und } G \epsilon \circ \eta G = Id_G$$

dann sind F und G ein adjungiertes Funktorpaar.

Eigenschaften II

- ▶ Jeder Funktor G , der einen links(rechts-)adjungierten Funktor hat, ist stetig(ko-stetig), d.h. er kommutiert mit Kolimiten(Kolimiten).

Satz (Freyds Theorem)

\mathcal{D} sei vollständig. G hat einen linksadjungierten Funktor, gdw.

1. G stetig ist,
2. für jedes $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ eine Familie $\{f_i : c \rightarrow G(d_i)\}_{i \in I}$ existiert, so daß
3. für jedes $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd)$ gilt $h = G(t) \circ f_i$ für ein $i \in I$ und ein $t : d_i \rightarrow d$.