Theoretische Informatik I

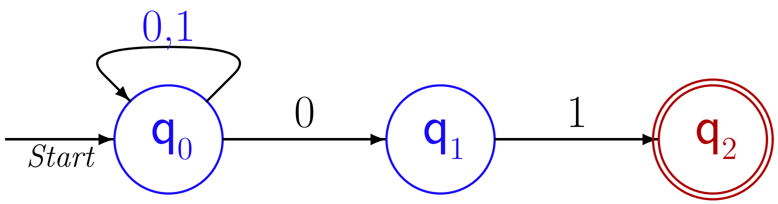
Einheit 2.2

Nichtdeterministische Automaten

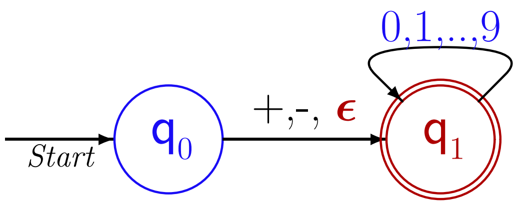
1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Äquivalenz zu deterministischen Automaten

Was ist Nichtdetermismus?

- **Verhalten nicht eindeutig bestimmt**
  - Automat wählt Folgezustand aus mehreren Möglichkeiten



  - Automat erkennt Strings, die mit `01` enden
  - Eine 0 kann das erste Symbol des Endes `01` sein ... oder auch nicht
- **Spontane Übergänge zwischen Zuständen**
  - Automat geht ohne Eingabe in anderen Zustand über (**ϵ-Übergang**)

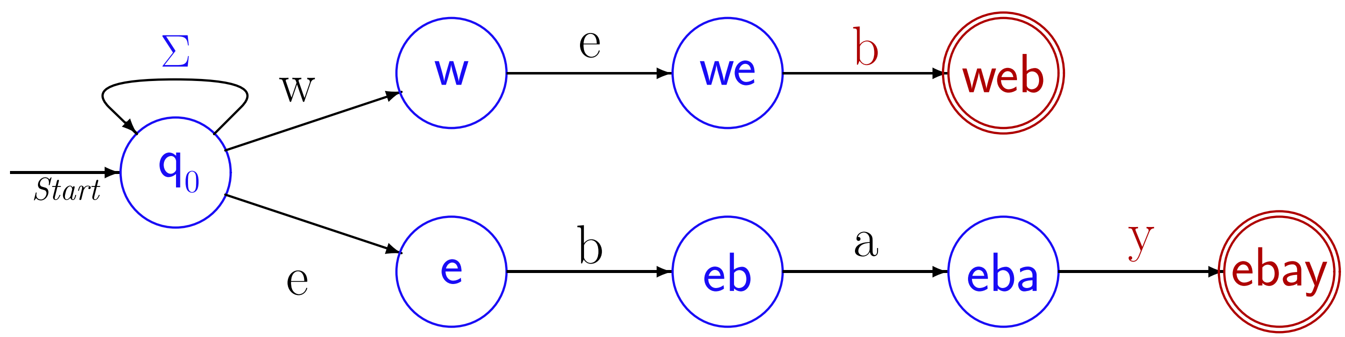


  - Automat erkennt ganze Zahlen mit und ohne Vorzeichen
- **Hilfreiches Modell für Entwurfsphase**
  - Elegantere Beschreibungsform, leichter als korrekt nachzuweisen
  - Begrenzte physikalische Realisierung durch Parallelrechner möglich

Nichtdeterministische Automaten – wozu?

- **Elegante Form der Textsuche in Dokumenten**
  - Viele verschiedene Wörter in großen Textsammlungen (Internet)
  - Leichte Beschreibung der Suchanfrage
  - Deterministisches Erkennungsverfahren mühsam zu beschreiben

- **Idee: Simultane Verarbeitung von Alternativen**
  - z.B. Suche nach den Wörtern `web` und `ebay`

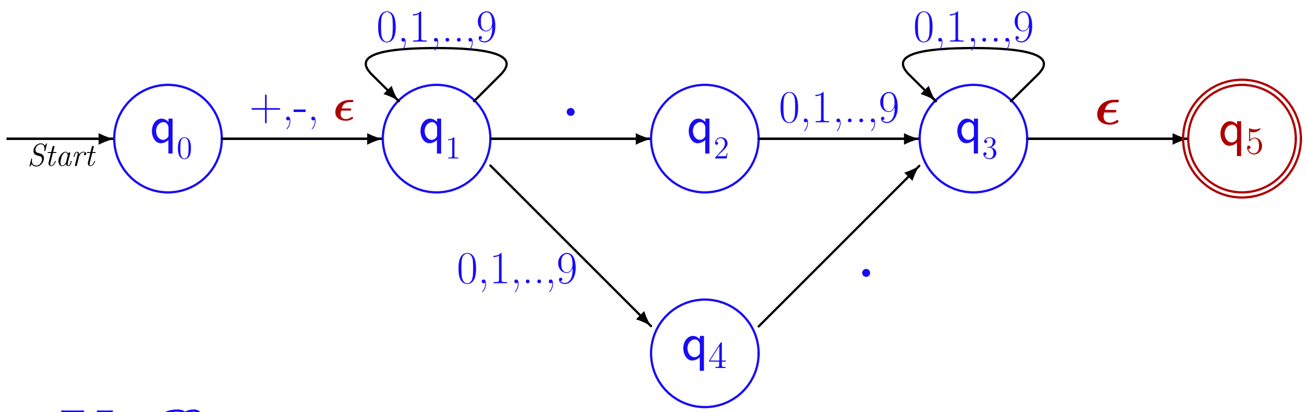


  - Ein `w` könnte der Anfang von `web` sein
  - Ein `e` könnte der Anfang von `ebay` sein
  - Aber vor den Wörtern könnte noch etwas anderes stehen

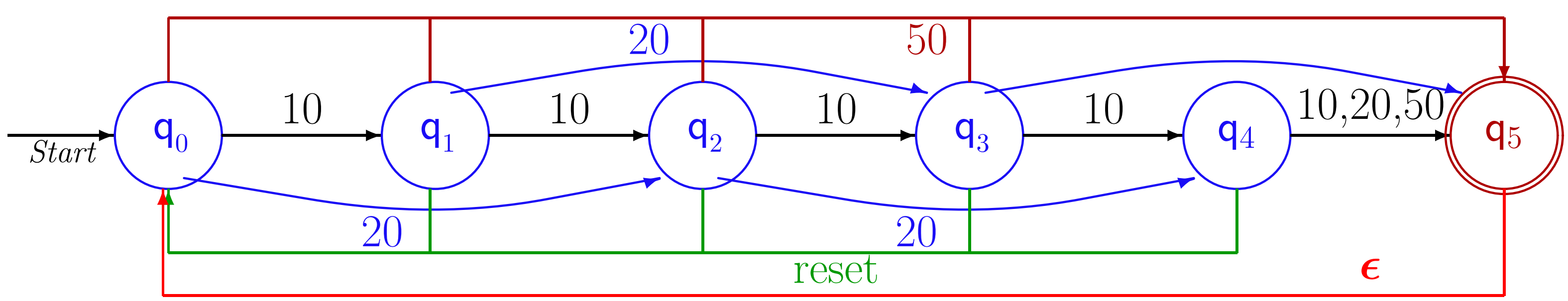
Nichtdeterminismus $\hat{=}$ verfolge alle Möglichkeiten simultan

ϵ-Übergänge – Verarbeitung optionaler Eingaben

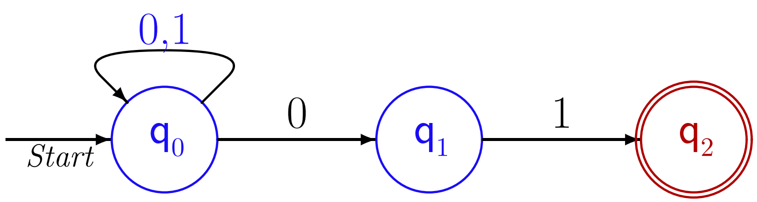
- **Erkenne Dezimalzahlen im Programmcode**
  - Zwei Zeichenreihen von Ziffern getrennt durch Dezimalpunkt
  - Eine der beiden Zeichenreihen darf leer sein, aber nicht beide
  - Optionales Vorzeichen **+** oder **-**

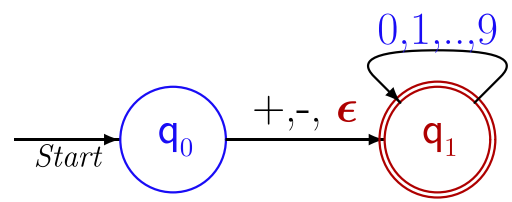


- **50c Kaffeeautomat**
  - Akzeptiert 10,20,50c, mit Reset-Taste und automatischer Rücksetzung



Nichtdeterministische Automaten – präzisiert





Ein **ϵ-NEA** (**nichtdeterministischer endlicher Automat mit ϵ-Übergängen**) ist ein 5-Tupel $\boldsymbol{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ (endliches) **Eingabealphabet** mit $\epsilon \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ **Zustandsüberführungsfunktion** *
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (End-) **Zuständen**

Ein **NEA** ist ein nichtdet. endlicher Automat ohne ϵ-Übergänge

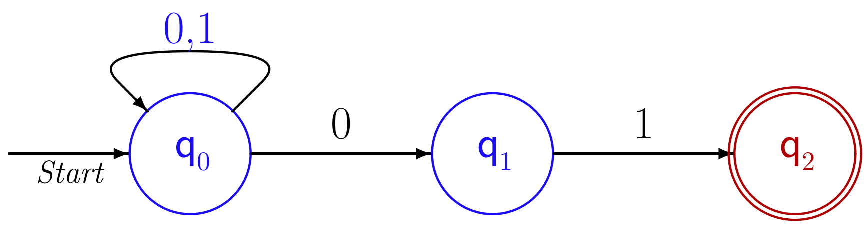
---

* $\boldsymbol{\mathcal{P}(Q)} = \{\boldsymbol{S} \mid \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Q}\}$ (**Potenzmenge** von $\boldsymbol{Q}$)

Bei ϵ-NEAs ist $\boldsymbol{\delta(q', a)}$ ist eine (möglicherweise leere) Menge von Zuständen

Arbeitsweise von NEAs

Erkenne Strings, die mit 01 enden



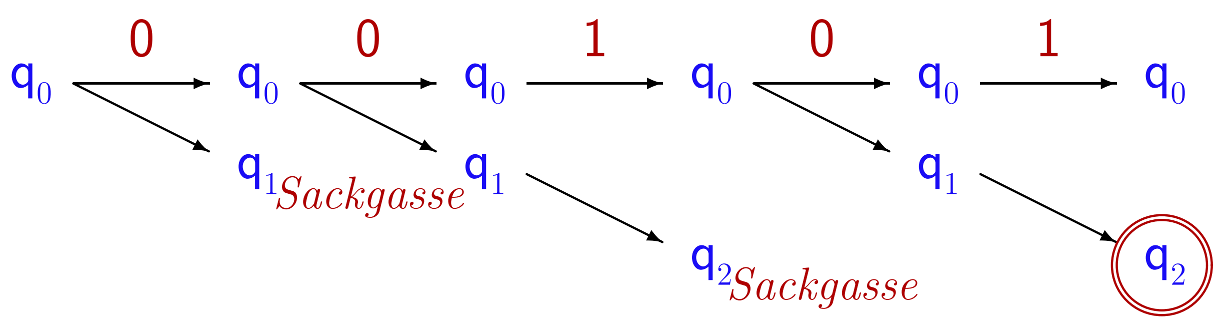
(1) Jedes Teilwort kann in q_0 bleiben

(2) Ein Teilwort muss mit 0 enden, um nach q_1 zu führen

(3) Ein Teilwort muss mit 01 enden, um nach q_2 zu führen

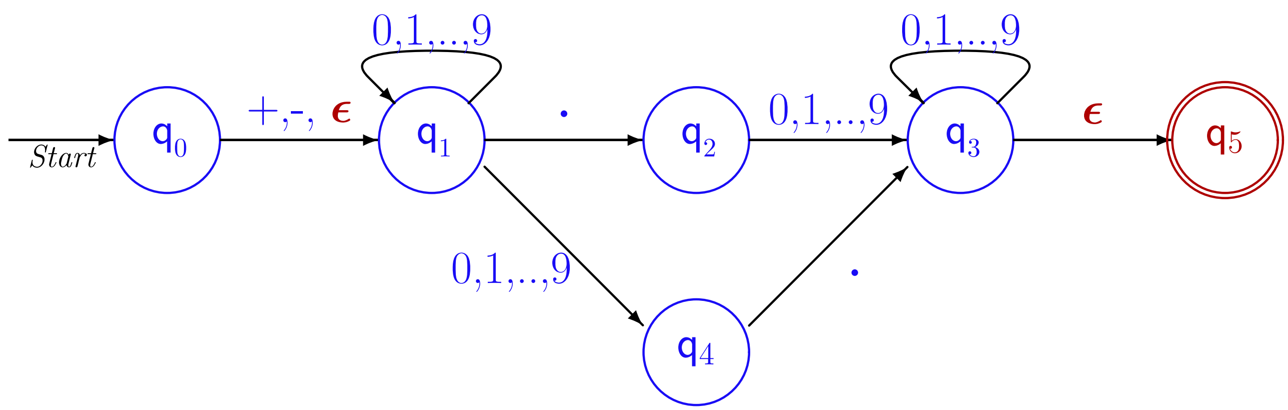
(4) In q_2 muss das Wort abgearbeitet sein

Beispiel: Abarbeitung von 00101



Ein Abarbeitungsweg führt zu einem akzeptierenden Zustand

Arbeitsweise von NEAs mit ϵ-Übergängen



(1) Die Teilwörter `+`, `-`, und ϵ führen nach q_1

(2) Teilwörter der Form v`{0..9}`$^+$ mit $v \in \{$`+`, `-`, $\epsilon\}$ führen nach q_1 oder q_4

(3) Teilwörter der Form v`{0..9}`$^+$`.` führen nach q_2 oder q_3

(4) Teilwörter der Form v`{0..9}`*`.{0..9}`$^+$ führen nach q_3

(5) Wörter die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

Beispiel: Abarbeitung von `3.14159`

$$\begin{tikzcd}
q_0 \arrow[r, "\epsilon"] & q_1 \arrow[r, "3"] \arrow[dr] & q_1 \arrow[r, "."] & q_2 \arrow[r, "1"] & q_3 \arrow[r, "4"] & q_3 \arrow[r, "1"] & q_3 \arrow[r, "5"] & q_3 \arrow[r, "9"] & q_3 \arrow[r, "\epsilon"] & q_5 \\
& & q_4 \arrow[r] & q_3 \arrow[ur] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Ein Abarbeitungsweg mit ϵ-Übergängen führt zu einem Endzustand

Arbeitsweise von ϵ-NEAs – präzisiert

- **Beschreibe ϵ-Hülle eines Zustands q**
  - Die von q mit ϵ-Übergängen erreichbaren Zustände
  - Iterative Definition: Kleinste Menge mit der Eigenschaft

    $q \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$ und $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \wedge r \in \delta(p,\epsilon) \Rightarrow r \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$

- **Erweiterte Überführungsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$**
  - Aufsammeln aller bei der Abarbeitung erreichbaren Zustände einschließlich derjenigen, die ohne Eingabe erreicht werden
  - Induktive Definition (kaskadisches Aufsammeln von Zuständen)

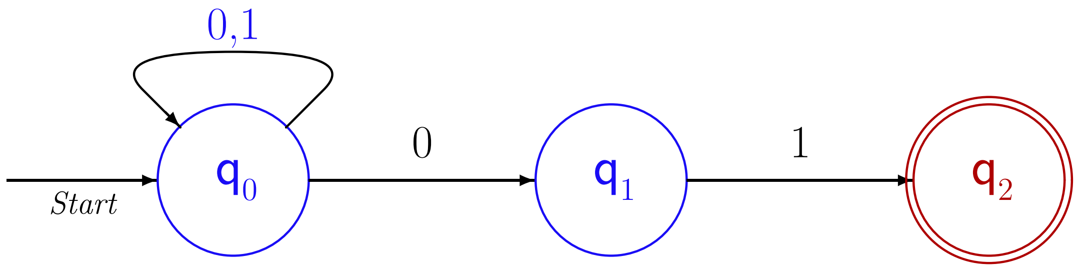
$$\hat{\delta}(q,w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & \text{falls } w{=}\epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q,v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q',a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & \text{falls } w{=}v\,a \ (a \in \Sigma) \end{cases} \quad *$$

* d.h. $p \in \hat{\delta}(q,w)$ gdw. es gibt ein $q' \in \hat{\delta}(q,v)$ und $q'' \in \delta(q',a)$ so dass $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q'')$

- **Von A akzeptierte Sprache**
  - Menge der Eingaben w, für die $\hat{\delta}(q_0,w)$ einen Endzustand enthält

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0,w) \cap F \neq \emptyset\}$$

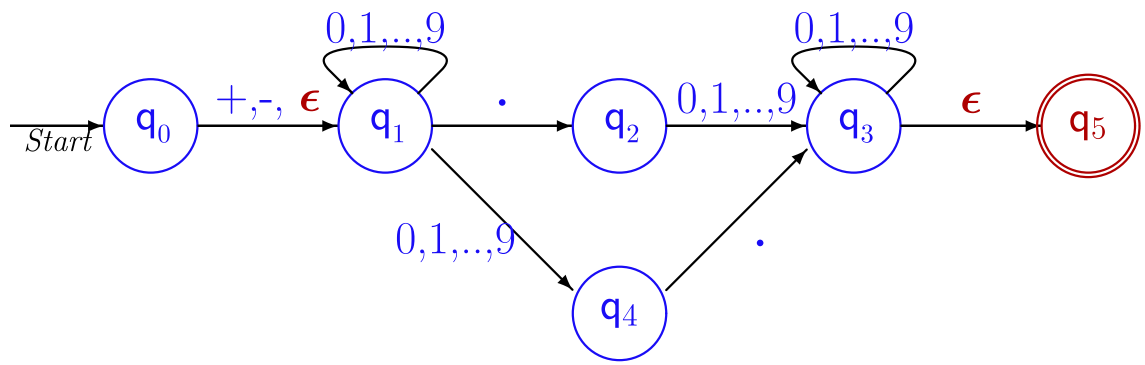
Überführungsfunktion $\hat{\delta}$ (ohne ϵ-Übergänge)



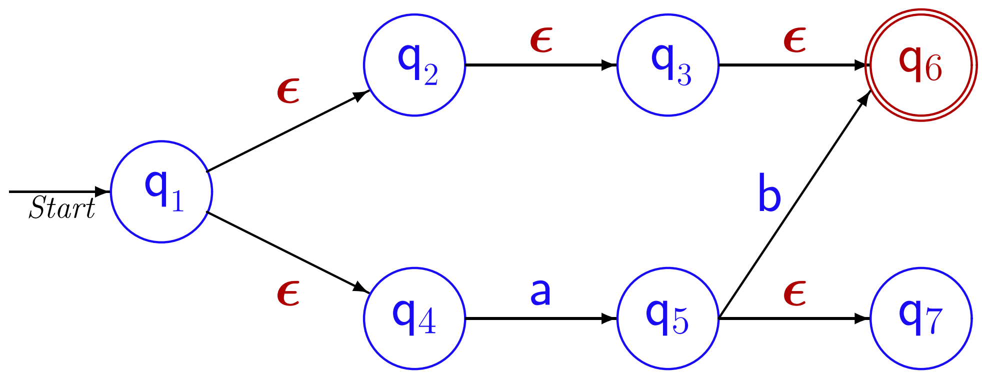
- **Abarbeitung von** `00101`
  - $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) =$ $\boldsymbol{\{q_0\}}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) =$ $\boldsymbol{\{q_0, q_1\}}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset =$ $\boldsymbol{\{q_0, q_1\}}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} =$ $\boldsymbol{\{q_0, q_2\}}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset =$ $\boldsymbol{\{q_0, q_1\}}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} =$ $\boldsymbol{\{q_0, q_2\}}$
- `00101` **wird akzeptiert da** $\boldsymbol{\hat{\delta}(q_0, 00101) \cap F = \{q_2\}}$

Bestimmung der ϵ-Hülle

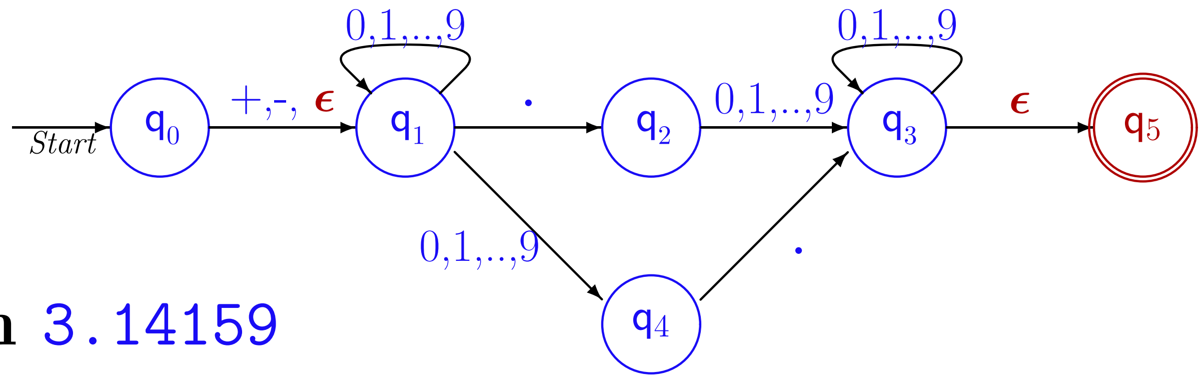
- **Dezimalautomat**
  - Nur zwei ϵ-Übergänge
  - ϵ-Hülle$(q_0) = \{q_0, q_1\}$
  - ϵ-Hülle$(q_3) = \{q_3, q_5\}$
  - ϵ-Hülle$(q_i) = \{q_i\}$ sonst



- **Viele ϵ-Übergänge**
  - ϵ-Hülle$(q_1) = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6\}$
  - ϵ-Hülle$(q_2) = \{q_2, q_3, q_6\}$
  - ϵ-Hülle$(q_3) = \{q_3, q_6\}$
  - ϵ-Hülle$(q_4) = \{q_4\}$
  - ϵ-Hülle$(q_5) = \{q_5, q_7\}$
  - ϵ-Hülle$(q_6) = \{q_6\}$
  - ϵ-Hülle$(q_7) = \{q_7\}$



Überführungsfunktion $\hat{\delta}$ (mit ϵ-Übergängen)



Abarbeitung von `3.14159`

- $\boldsymbol{\hat{\delta}(q_0, \epsilon)} = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \quad \boldsymbol{\{q_0, q_1\}}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3)$: $\delta(q_0, 3) \cup \delta(q_1, 3) = \emptyset \cup \{q_1, q_4\} = \{q_1, q_4\}$

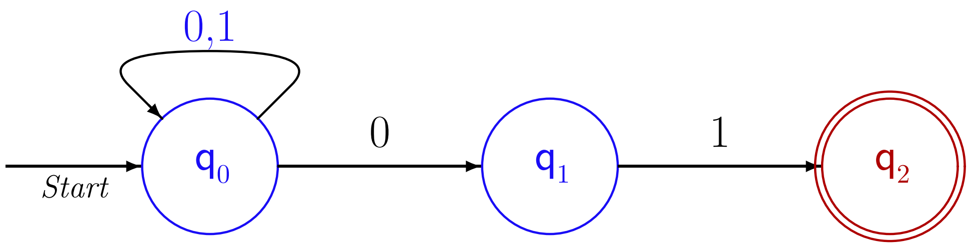
  $\boldsymbol{\hat{\delta}(q_0, 3)} = \epsilon\text{-Hülle}(q_1) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_4) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \quad \boldsymbol{\{q_1, q_4\}}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.)$: $\delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$

  $\boldsymbol{\hat{\delta}(q_0, 3.)} = \epsilon\text{-Hülle}(q_2) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_2\} \cup \{q_3, q_5\} = \boldsymbol{\{q_2, q_3, q_5\}}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.1)$: $\delta(q_2, 1) \cup \delta(q_3, 1) \cup \delta(q_5, 1) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$

  $\boldsymbol{\hat{\delta}(q_0, 3.1)} = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \quad \boldsymbol{\{q_3, q_5\}}$
- $\boldsymbol{\hat{\delta}(q_0, 3.14)} = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \quad \boldsymbol{\{q_3, q_5\}}$

  $\vdots$
- $\boldsymbol{\hat{\delta}(q_0, 3.14159)} = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \quad \boldsymbol{\{q_3, q_5\}}$

Nachweis der erkannten Sprache (ohne ϵ-Übergänge)

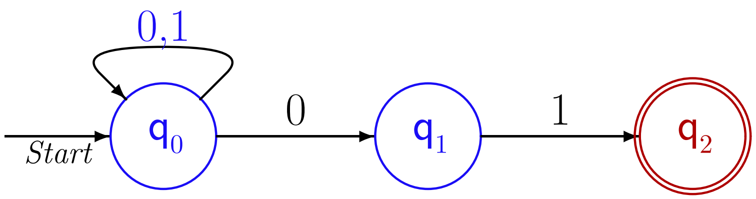


$$L(A) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ endet mit } 01\}$$

- **Zeige durch simultane Induktion für alle $w \in \{0,1\}^*$**
  a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
  b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ **genau dann, wenn w mit 0 endet**
  c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ **genau dann, wenn w mit 01 endet**
  Es folgt $w \in L(A) \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta}(q_0, w) \cap \{q_2\} \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\;$ **w endet mit 01**

- **Induktionsanfang $w = \epsilon$**
  – Per Definition ist $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$. Also gilt Aussage a)
  – w endet weder mit 0 noch mit 01. Aussagen b) und c) gelten trivialerweise

Nachweis der erkannten Sprache II



a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 0 endet
c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 01 endet

- **Induktionsschritt:** $\boldsymbol{w = va}$ **für** $\boldsymbol{v \in \{0,1\}^*,\ a \in \{0,1\}}$
  - Die Aussagen a), b), und c) seien für v gültig

    a) Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_0 \in \delta(q_0, a)$ für $a \in \{0,1\}$ folgt $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

    b) Sei $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_1 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q{=}q_0 \wedge a{=}0$ muss w mit 0 enden

    Wenn umgekehrt w mit 0 endet, dann ist $a{=}0$.

    Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_1 \in \delta(q_0, a)$ folgt $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

    c) Sei $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_2 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q{=}q_1 \wedge a{=}1$ muss w mit 1 enden

    und $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ gelten. Wegen b) für v endet v mit 0, also w mit 01

    Wenn umgekehrt w mit 01 endet, dann ist $a{=}1$ und v endet mit 0.

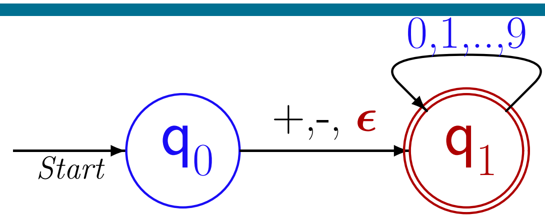
    Wegen $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ nach b) und $q_2 \in \delta(q_1, a)$ folgt $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

Arbeitsweise von ϵ-NEAs – Alternative Beschreibung mit Konfigurationsübergängen

- **Definiere Konfigurationen**
  - Formal dargestellt als Tupel $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{q},\boldsymbol{w}) \in Q \times \Sigma^*$
- **Definiere Konfigurationsübergangsrelation $\vdash^*$**
  - Wechsel zwischen Konfigurationen durch Abarbeitung von Wörtern
  - $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{aw}) \vdash (\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})$, falls $p \in \delta(q,a)$
  - $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{w}) \vdash (\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})$, falls $p \in \delta(q,\epsilon)$
  - $\boldsymbol{K_1} \vdash^* \boldsymbol{K_2}$, falls $K_1 = K_2$ oder
    es gibt eine Konfiguration K mit $K_1 \vdash K$ und $K \vdash^* K_2$
- **Akzeptierte Sprache**
  - Menge der Eingaben, für die $\vdash^*$ zu akzeptierenden Zustand führt

$$\boldsymbol{L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F.\ (q_0, w) \vdash^* (p,\epsilon)\}}$$

Nachweis der erkannten Sprache (mit ϵ-Übergängen)



$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \{0,..,9\}^*. \; w{=}u \vee w{=}{+}u \vee w{=}{-}u\}$$

- **Zeige** $(q_1, w\,v) \vdash^* (q_1, v) \;\Leftrightarrow\; w \in \{0,..,9\}^*$ **für alle** $w, v \in \Sigma^*$
- **Basisfall $w = \epsilon$:**
  - Per Definition gilt $(q_1, v) \vdash^* (q_1, v)$ und $\epsilon \in \{0,..,9\}^*$ $\surd$
- **Schrittfall $w = ua$ für ein $u \in \Sigma^*, a \in \Sigma$:**

  $\Rightarrow$: Es gelte $(q_1, w\,v) \vdash^* (q_1, v)$.

  Dann gilt $(q_1, u\,a\,v) \vdash^* (p, a\,v) \vdash (q_1, v)$ für einen Zustand p.

  Es folgt $p = q_1$, $a \in \{0,..,9\}$ und per Induktion $w \in \{0,..,9\}^*$ $\surd$

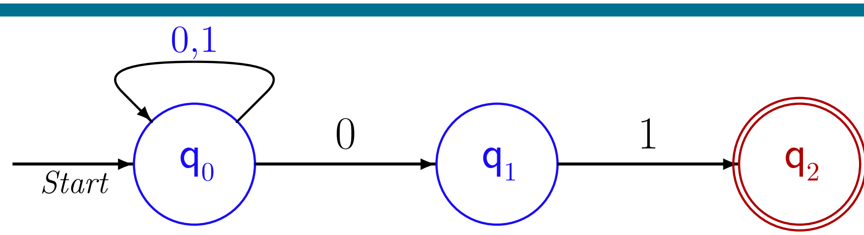
  $\Leftarrow$: Es sei $w \in \{0,..,9\}^*$. Dann ist $u \in \{0,..,9\}^*$ und $a \in \{0,..,9\}$.

  Mit der Induktionsannahme folgt $(q_1, u\,a\,v) \vdash^* (q_1, a\,v) \vdash (q_1, v)$ $\surd$
- **Es folgt**

$$\begin{aligned}
w \in L(A) \;&\Leftrightarrow\; (q_0, w) \vdash^* (q_1, \epsilon)\\
&\Leftrightarrow\; \exists u \in \Sigma^*. w \in \{u, +u, -u\}.\; (q_0, w) \vdash (q_1, u) \vdash^* (q_1, \epsilon)\\
&\Leftrightarrow\; \exists u \in \{0,..,9\}^*. w = w{=}u \vee w{=}{+}u \vee w{=}{-}u \;\Leftrightarrow\; w \in L
\end{aligned}$$

Beziehung zu deterministischen Automaten

- **Nichtdeterministische Automaten sind flexibler**
  - Man muss sich nicht auf eine genaue Verarbeitungsfolge festlegen
  - Man kann optionale Eingaben elegant verarbeiten
- **DEAs sind genauso ausdrucksstark wie ϵ-NEAs**
  - Man kann Mengen von ϵ-NEA-Zuständen als DEA Zustände codieren
  - Man kann mengenwertige Zustandsüberführungsfunktionen codieren
- **(Potenzmengen- oder) Teilmengenkonstruktion**
  - Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat
  - Konstruiere äquivalenten DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ mit
    - $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
    - $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$ (= $\{q_0\}$ bei NEAs)
    - $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$
    - $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_N(q, a) = \{p \mid \exists q \in S.\, p \in \hat{\delta}_N(q, a)\}$ (erfaßt ϵ-Hülle)
  - Dann gilt **$L(A_D) = L(A_N)$**
  - Konstruktion benötigt **$2^{|Q_N|}$ Zustände** (Optimierung möglich)



Konstruierter deterministischer Automat

$$Q_D = \mathcal{P}(\{q_0,q_1,q_2\})$$
$$q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0\}$$
$$F_D = \{S \subseteq \{q_0,q_1,q_2\} \mid q_2 \in S\}$$

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
$* \{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1,q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$

Viele überflüssige Zustände (nur drei von $\{q_0\}$ erreichbar)

- **Optimierung: $Q_D \hat{=}$ erreichbare Zustände**
  - Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat
  - Konstruiere Zustandsmenge Q_D iterativ gleichzeitig mit δ_D
  - Start: $Q_0 := \{q_D\} = \{\epsilon\text{-Hülle}(q_0)\}$
  - Schritt: $Q_{i+1} := Q_i \cup \{\delta_D(S,a) \mid S \in Q_i, a \in \Sigma\}$

    Dabei konstruiere die nötigen Werte $\delta_D(S,a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_N(q,a)$
  - Abschluss: Wenn $Q_{i+1} = Q_i$, dann halte an und setze $Q_D := Q_i$
  - Setze $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$ und $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$
  - DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ enthält keine überflüssigen Zustände
- **ϵ-NEAs und DEAs akzeptieren dieselben Sprachen**
  - Jeder DEA ist als “eindeutiger” ϵ-NEA beschreibbar

Optimierte Teilmengenkonstruktion: Korrektheit

Für den konstruierten DEA gilt $L(A_D) = L(A_N)$

Zeige: $\hat{\delta_D}(q_D, w) = \hat{\delta_N}(q_0, w)$ **für alle** $w \in \Sigma^*$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau der Wörter aus Σ^*

– Basisfall: Sei $w = \epsilon$:

$\hat{\delta_D}(q_D, \epsilon) = q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \hat{\delta_N}(q_0, \epsilon)$

– Induktionsschritt: Sei $w = va$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$:

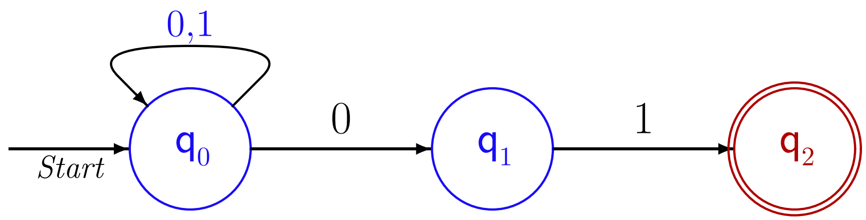
– Induktionsannahme: Es gelte $\hat{\delta_D}(q_D, v) = \hat{\delta_N}(q_0, v)$

Dann gilt $\hat{\delta_D}(q_D, w)$

$$
\begin{aligned}
&= \delta_D(\hat{\delta_D}(q_D, v), a) && \text{(Definition } \hat{\delta_D}\text{)}\\
&= \delta_D(\hat{\delta_N}(q_0, v), a) && \text{(Induktionsannahme)}\\
&= \bigcup_{q' \in \hat{\delta_N}(q_0,v)} \hat{\delta_N}(q', a) && \text{(Konstruktion von } \delta_D\text{)}\\
&= \bigcup_{q' \in \hat{\delta_N}(q_0,v)} \bigcup_{q'' \in \delta_N(q',a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') && \text{(Definition } \hat{\delta_N}\text{)}\\
&= \hat{\delta_N}(q_0, w) && \text{(Definition } \hat{\delta_N}\text{)}
\end{aligned}
$$

Es folgt $L(A_D) = \{w \mid \hat{\delta_D}(q_D, w) \in F_D\} = \{w \mid \hat{\delta_N}(q_0, w) \cap F_N \neq \emptyset\} = L(A_N)$

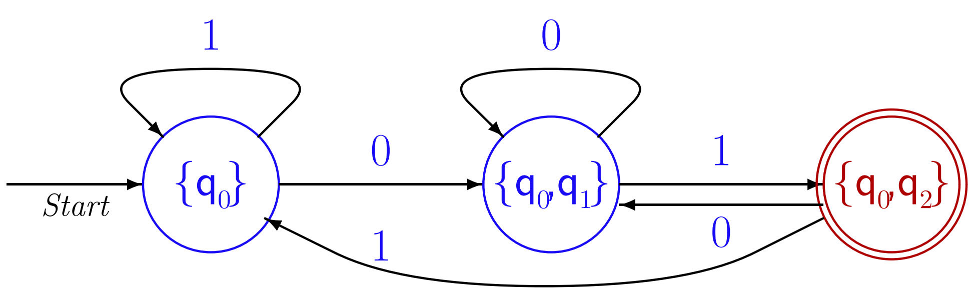
Optimierte Teilmengenkonstruktion für NEAs



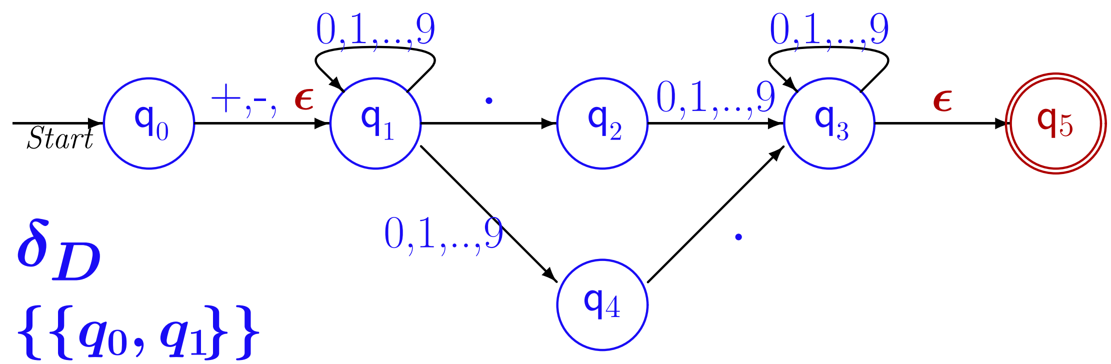
- **Konstruktion von Zustandsmengen und (reduzierter) Überführungsfunktion**
  - $Q_0 := \{\{q_0\}\}$
  - $Q_1 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}\}$
  - $Q_2 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}\}$
  - $Q_3 = Q_2$, also $Q_D = Q_2$,

	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
$* \{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$

- **Resultierender deterministischer Automat**



Optimierte Teilmengenkonstruktion für ϵ-NEAs



- **Konstruiere Q_D und δ_D**

  $\boldsymbol{Q_0} = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-Hülle}(q_0)\} = \boldsymbol{\{\{q_0, q_1\}\}}$

  – $\delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}$, $\quad\delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$

  – $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \ldots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}$, $\delta_D(\{q_0, q_1\}, .) = \{q_2\}$

  $\boldsymbol{Q_1 = \{\ \{q_0, q_1\}\ \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}\ \}}$

  – $\delta_D(\{q_1\}, +) = \delta_D(\{q_2\}, +) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset, \ \ldots$

  – $\delta_D(\{q_1\}, 0) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\}$ $\quad\delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \ \ldots$

  – $\delta_D(\{q_1\}, .) = \{q_2\}$, $\quad\delta_D(\{q_2\}, .) = \emptyset$ $\quad\delta_D(\{q_1, q_4\}, .) = \{q_2, q_3, q_5\}$

  $\boldsymbol{Q_2 = \{\ \{q_0, q_1\}\ \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\}\ \}}$

  – $\delta_D(\emptyset, +) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, +) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, +) = \emptyset, \ \ldots$

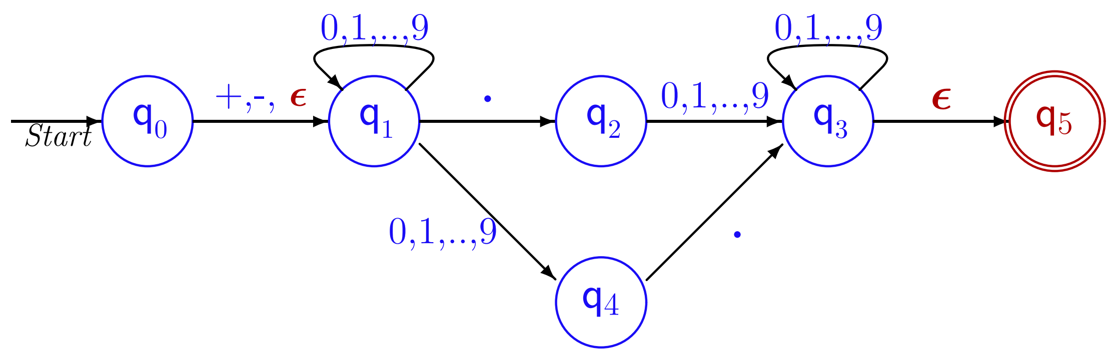
  – $\delta_D(\emptyset, 0) = \emptyset$, $\delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, 0) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \ \ldots$

  – $\delta_D(\emptyset, .) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, .) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, .) = \emptyset$

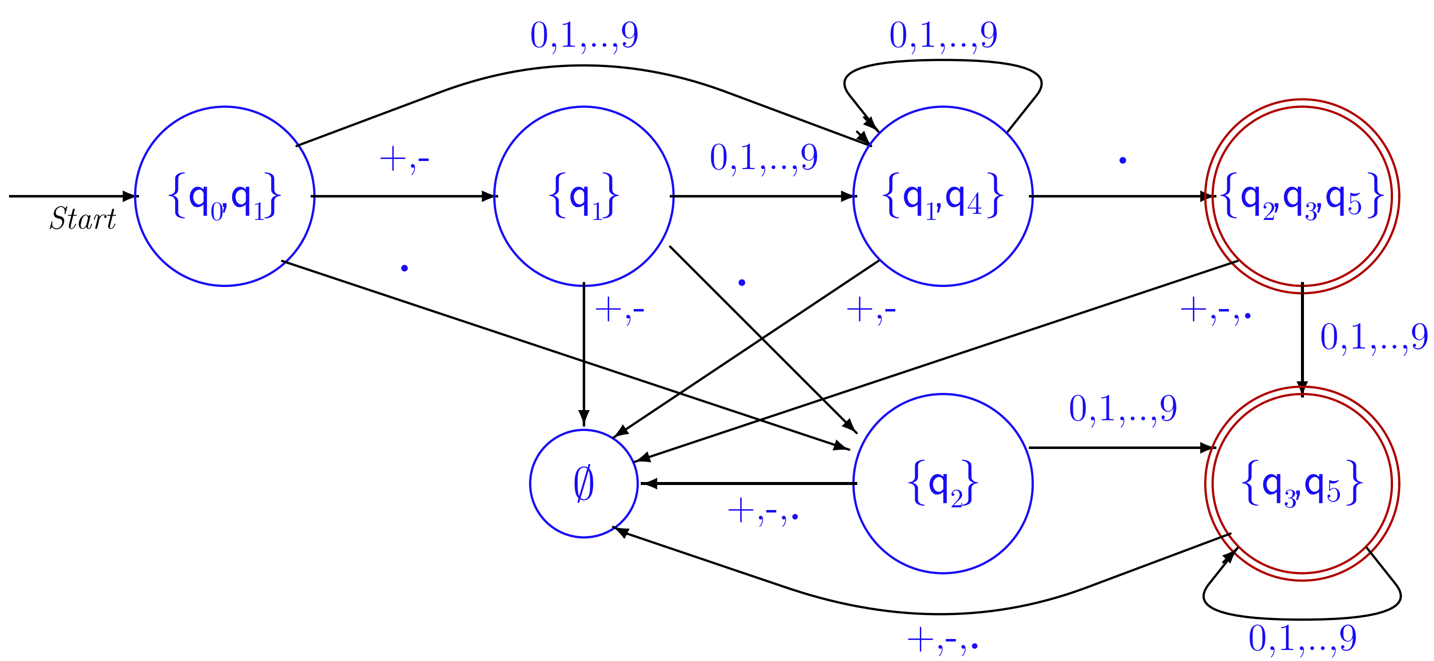
  $\boldsymbol{Q_3} = \{\ \{q_0, q_1\}\ \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\}\ \} = Q_2 =: \boldsymbol{Q_D}$

Erzeugter DEA für Dezimalzahlerkennung

Ursprünglicher ϵ-NEA

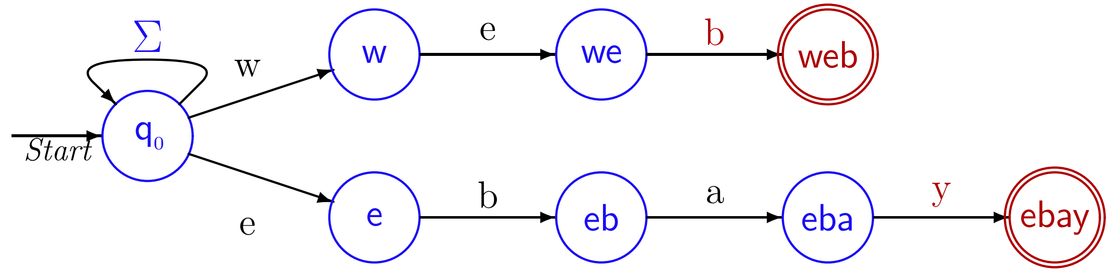


Generierter DEA

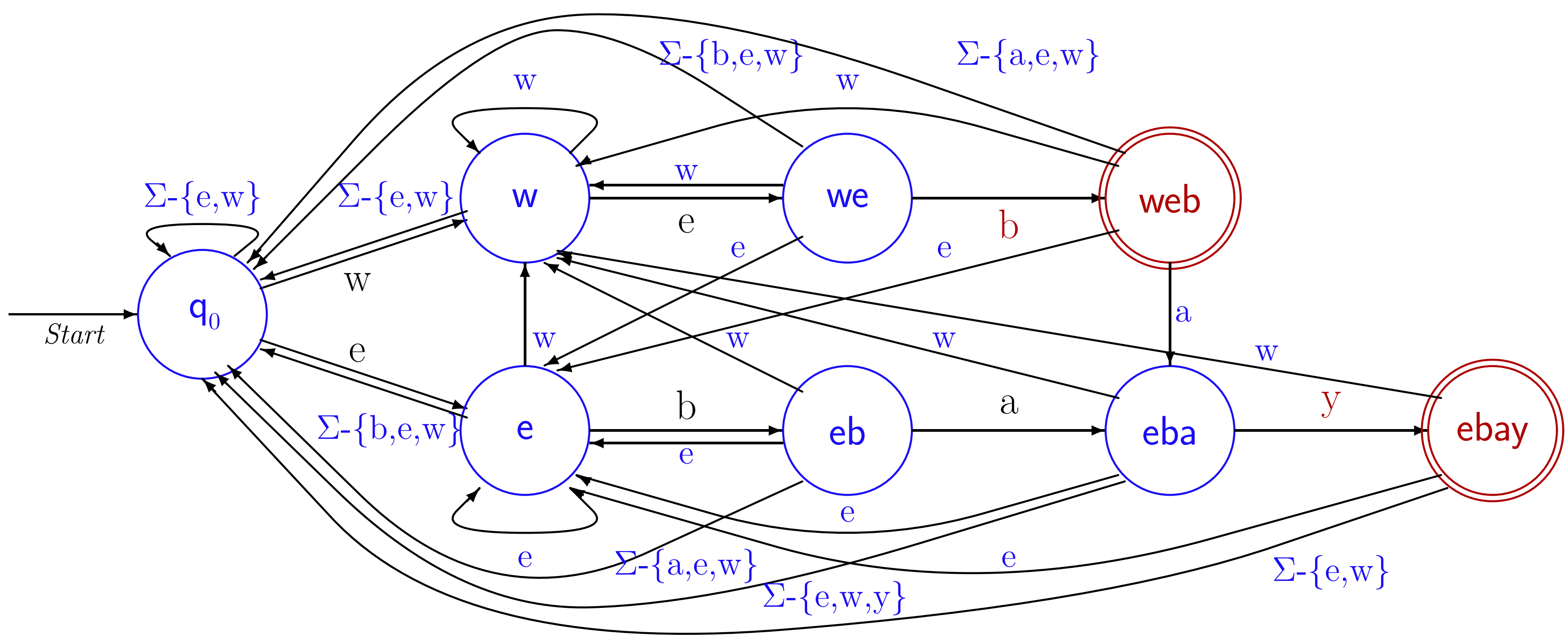


Deterministische Automaten für Textanalyse

Ursprünglicher ϵ-NEA



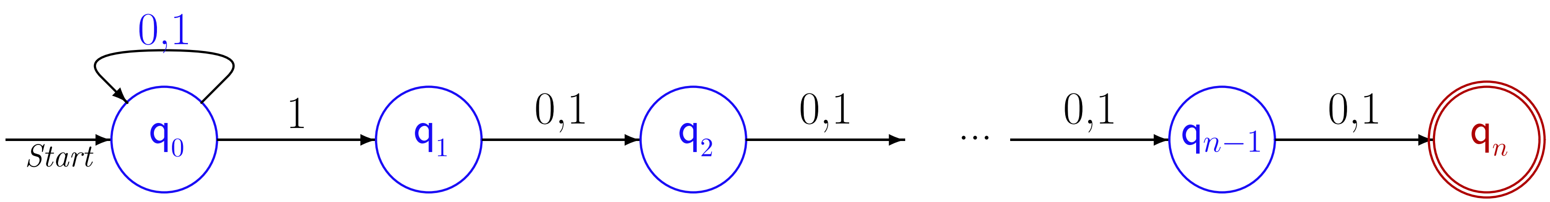
Generierter DEA



Analyse der optimierten Teilmengenkonstruktion

- **A_D kann so klein sein wie A_N**
  – Nur wenige Teilmengen von Q_N werden wirklich erreicht

- **A_D kann exponentiell größer werden**



  – $L(A_N) = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{das } n\text{-te Zeichen vor dem Ende ist eine } 1\}$

  – **Jeder DEA A für $L(A_N)$ benötigt mindestens 2^n Zustände**

  – **Beweis:** Es gibt 2^n Wörter der Länge n in $\{0,1\}^*$

  Hat A weniger als 2^n Zustände, so gibt es $w = a_1..a_n$ und $v = b_1..b_n$ mit $w \neq v$ und $\hat{\delta}_A(q_0, w) = \hat{\delta}_A(q_0, v)$ **(Schubfachprinzip)**

  Sei $a_i \neq b_i$. Für $q = \delta_A(q_0, w0^{i-1}) = \delta_A(q_0, v0^{i-1})$ folgt $q \in F$ und $q \notin F$

Endliche Automaten – Zusammenfassung

- **Deterministische Endliche Automaten (DEA)**
  - Endliche Menge von Zuständen, endliche Menge von Eingabesymbolen
  - Ein fester Startzustand, null oder mehr akzeptierende Zustände
  - Überführungsfunktion bestimmt Änderung des Zustands bei Abarbeitung der Eingabe
  - Erkannte Sprache: Eingaben, deren Abarbeitung in einem akzeptierenden Zustand endet
- **Automaten mit Ausgabe (Mealy/Moore-Automat)**
  - Wie DEA, mit zusätzlicher Ausgabefunktion
  - Gegenseitige Simulation möglich
- **Nichtdeterministische Automaten (ϵ-NEA / NEA)**
  - Wie DEA, aber mit mengenwertiger Überführungsfunktion und Zustandsüberführung bei leerer Eingabe
  - Durch Teilmengenkonstruktion in äquivalenten DEA transformierbar