Theoretische Informatik I

Einheit 2.3

Reguläre Ausdrücke

1. Anwendungen
2. Syntax und Semantik
3. Vereinfachungsregeln
4. Beziehung zu endlichen Automaten

Eine algebraische Beschreibung für Sprachen

- **Automaten beschreiben Abarbeitung von Sprachen**
  - **Operationale Semantik**: Symbole führen zu Zustandsänderungen
  - Bestimmte Wörter bzw. Symbolketten werden durch Zustände akzeptiert
  - Für Automaten ist Sprache $\hat{=}$ Menge der akzeptierten Wörter

Eine algebraische Beschreibung für Sprachen

- **Automaten beschreiben Abarbeitung von Sprachen**
  - **Operationale Semantik**: Symbole führen zu Zustandsänderungen
  - Bestimmte Wörter bzw. Symbolketten werden durch Zustände akzeptiert
  - Für Automaten ist Sprache $\hat{=}$ Menge der akzeptierten Wörter
- **Wie beschreibt man Eigenschaften von Wörtern?**
  - **Deklarative Semantik**: äußere Form von Zeichenreihen einer Sprache

    z.B. *Wörter haben eine führende Null, dann beliebig viele Einsen*
  - Anwendungen brauchen präzise Beschreibungssprache für Wörter
    - Grundeinheiten von Programmiersprachen, Suchmuster für Browser, ...

Eine algebraische Beschreibung für Sprachen

- **Automaten beschreiben Abarbeitung von Sprachen**
  - **Operationale Semantik**: Symbole führen zu Zustandsänderungen
  - Bestimmte Wörter bzw. Symbolketten werden durch Zustände akzeptiert
  - Für Automaten ist Sprache $\hat{=}$ Menge der akzeptierten Wörter
- **Wie beschreibt man Eigenschaften von Wörtern?**
  - **Deklarative Semantik**: äußere Form von Zeichenreihen einer Sprache

    z.B. *Wörter haben eine führende Null, dann beliebig viele Einsen*
  - Anwendungen brauchen präzise Beschreibungssprache für Wörter
    - Grundeinheiten von Programmiersprachen, Suchmuster für Browser, ...
- **Reguläre Ausdrücke als formale Syntax**
  - Kurze, prägnante Beschreibung des Aufbaus der Wörter einer Sprache

    z.B. `01*`: "Zuerst eine Null, dann beliebig viele Einsen"

Anwendung: Lexikalische Analyse

Wichtigster Grundbestandteil von Compilern

- **Reguläre Ausdrücke beschreiben Token**
  - Logische Grundeinheiten von Programmiersprachen
  - z.B. Schlüsselwörter, Bezeichner, Dezimalzahlen, ...

Anwendung: Lexikalische Analyse

Wichtigster Grundbestandteil von Compilern

- **Reguläre Ausdrücke beschreiben Token**
  - Logische Grundeinheiten von Programmiersprachen
  - z.B. Schlüsselwörter, Bezeichner, Dezimalzahlen, ...
- **“Lexer” transformieren reguläre Ausdrücke in Analyseprogramme**
  - Analyse kann die Token der Programmiersprache identifizieren

Anwendung: Lexikalische Analyse

Wichtigster Grundbestandteil von Compilern

- **Reguläre Ausdrücke beschreiben Token**
  - Logische Grundeinheiten von Programmiersprachen
  - z.B. Schlüsselwörter, Bezeichner, Dezimalzahlen, ...
- **"Lexer" transformieren reguläre Ausdrücke in Analyseprogramme**
  - Analyse kann die Token der Programmiersprache identifizieren
  - Zugrundeliegende Technik: Umwandlung regulärer Ausdrücke in DEAs

Reguläre Ausdrücke als Suchmuster in Unix

grep *searches files for lines containing a match to a given pattern*

– A regular expression is a pattern that describes a set of strings. Regular expressions are constructed by using various operators to combine smaller expressions.

Reguläre Ausdrücke als Suchmuster in Unix

grep *searches files for lines containing a match to a given pattern*

- A regular expression is a pattern that describes a set of strings. Regular expressions are constructed by using various operators to combine smaller expressions.
- Fundamental building blocks are expressions that match a single character.

Reguläre Ausdrücke als Suchmuster in Unix

grep *searches files for lines containing a match to a given pattern*

- A regular expression is a pattern that describes a set of strings. Regular expressions are constructed by using various operators to combine smaller expressions.
- Fundamental building blocks are expressions that match a single character.
- A bracket expression is a list of characters enclosed by `[` and `]`. It matches any single character in that list. For example, `[0123456789]` matches any single digit.
- Within a bracket expression, a range expression consists of two characters separated by a hyphen. It matches any single character that sorts between the two characters.
  For example, in the default C locale, `[a-d]` is equivalent to `[abcd]`.

Reguläre Ausdrücke als Suchmuster in Unix

grep *searches files for lines containing a match to a given pattern*

- A regular expression is a pattern that describes a set of strings. Regular expressions are constructed by using various operators to combine smaller expressions.
- Fundamental building blocks are expressions that match a single character.
- A bracket expression is a list of characters enclosed by `[` and `]`. It matches any single character in that list. For example, `[0123456789]` matches any single digit.
- Within a bracket expression, a range expression consists of two characters separated by a hyphen. It matches any single character that sorts between the two characters. For example, in the default C locale, `[a-d]` is equivalent to `[abcd]`.
- Certain named classes of characters are predefined within bracket expressions. They are `[:alnum:]`, `[:alpha:]`, `[:cntrl:]`, `[:digit:]`, . . .

Reguläre Ausdrücke als Suchmuster in Unix

grep searches files for lines containing a match to a given pattern

- A regular expression is a pattern that describes a set of strings. Regular expressions are constructed by using various operators to combine smaller expressions.
- Fundamental building blocks are expressions that match a single character.
- A bracket expression is a list of characters enclosed by `[` and `]`. It matches any single character in that list. For example, `[0123456789]` matches any single digit.
- Within a bracket expression, a range expression consists of two characters separated by a hyphen. It matches any single character that sorts between the two characters. For example, in the default C locale, `[a-d]` is equivalent to `[abcd]`.
- Certain named classes of characters are predefined within bracket expressions. They are `[:alnum:]`, `[:alpha:]`, `[:cntrl:]`, `[:digit:]`, ...
- The period `.` matches any single character.
- The caret `^` and the dollar sign `$` are metacharacters that match the empty string ...

Reguläre Ausdrücke als Suchmuster in Unix

grep *searches files for lines containing a match to a given pattern*

– A regular expression is a pattern that describes a set of strings. Regular expressions are constructed by using various operators to combine smaller expressions.

– Fundamental building blocks are expressions that match a single character.

– A bracket expression is a list of characters enclosed by `[` and `]`. It matches any single character in that list. For example, `[0123456789]` matches any single digit.

– Within a bracket expression, a range expression consists of two characters separated by a hyphen. It matches any single character that sorts between the two characters.
For example, in the default C locale, `[a-d]` is equivalent to `[abcd]`.

– Certain named classes of characters are predefined within bracket expressions.
They are `[:alnum:]`, `[:alpha:]`, `[:cntrl:]`, `[:digit:]`, . . .

– The period `.` matches any single character.

– The caret `^` and the dollar sign `$` are metacharacters that match the empty string . . .

– A regular expression may be followed by one of several repetition operators:
`?`: The preceding item is optional and matched at most once.
`*`: The preceding item will be matched zero or more times.
`+` The preceding item will be matched one or more times.

Reguläre Ausdrücke als Suchmuster in Unix

grep *searches files for lines containing a match to a given pattern*

- A regular expression is a pattern that describes a set of strings. Regular expressions are constructed by using various operators to combine smaller expressions.
- Fundamental building blocks are expressions that match a single character.
- A bracket expression is a list of characters enclosed by `[` and `]`. It matches any single character in that list. For example, `[0123456789]` matches any single digit.
- Within a bracket expression, a range expression consists of two characters separated by a hyphen. It matches any single character that sorts between the two characters. For example, in the default C locale, `[a-d]` is equivalent to `[abcd]`.
- Certain named classes of characters are predefined within bracket expressions. They are `[:alnum:]`, `[:alpha:]`, `[:cntrl:]`, `[:digit:]`, ...
- The period `.` matches any single character.
- The caret `^` and the dollar sign `$` are metacharacters that match the empty string ...
- A regular expression may be followed by one of several repetition operators:
  `?`: The preceding item is optional and matched at most once.
  `*`: The preceding item will be matched zero or more times.
  `+` The preceding item will be matched one or more times.
- Two regular expressions may be concatenated; the resulting regular expression matches any string concatenating two substrings that match the subexpressions.

Reguläre Ausdrücke als Suchmuster in Unix

grep *searches files for lines containing a match to a given pattern*

- A regular expression is a pattern that describes a set of strings. Regular expressions are constructed by using various operators to combine smaller expressions.
- Fundamental building blocks are expressions that match a single character.
- A bracket expression is a list of characters enclosed by `[` and `]`. It matches any single character in that list. For example, `[0123456789]` matches any single digit.
- Within a bracket expression, a range expression consists of two characters separated by a hyphen. It matches any single character that sorts between the two characters. For example, in the default C locale, `[a-d]` is equivalent to `[abcd]`.
- Certain named classes of characters are predefined within bracket expressions. They are `[:alnum:]`, `[:alpha:]`, `[:cntrl:]`, `[:digit:]`, ...
- The period `.` matches any single character.
- The caret `^` and the dollar sign `$` are metacharacters that match the empty string ...
- A regular expression may be followed by one of several repetition operators:
  `?`: The preceding item is optional and matched at most once.
  `*`: The preceding item will be matched zero or more times.
  `+` The preceding item will be matched one or more times.
- Two regular expressions may be concatenated; the resulting regular expression matches any string concatenating two substrings that match the subexpressions.
- Two regular expressions may be joined by the infix operator `|`
  The resulting regular expression matches any string matching either subexpression.

Reguläre Ausdrücke beschreiben Sprachen

- **Ausdrücke für einfache Basissprachen**
  - Leere Sprache – Sprache ohne Elemente
  - Einelementige Sprachen: Sprache, die nur das leere Wort enthält
    Sprache, die nur ein Symbol $a \in \Sigma$ enthält

Reguläre Ausdrücke beschreiben Sprachen

- **Ausdrücke für einfache Basissprachen**
  - Leere Sprache – Sprache ohne Elemente
  - Einelementige Sprachen: Sprache, die nur das leere Wort enthält
    Sprache, die nur ein Symbol $a \in \Sigma$ enthält

- **Ausdrücke für Komposition von Sprachen**
  - Vereinigung zweier Sprachen
    $$\boldsymbol{L \cup M} = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L \ \vee \ w \in M\}$$

Reguläre Ausdrücke beschreiben Sprachen

- **Ausdrücke für einfache Basissprachen**
  - Leere Sprache – Sprache ohne Elemente
  - Einelementige Sprachen: Sprache, die nur das leere Wort enthält
    Sprache, die nur ein Symbol $a \in \Sigma$ enthält

- **Ausdrücke für Komposition von Sprachen**
  - Vereinigung zweier Sprachen
    $$\boldsymbol{L \cup M} = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L \;\vee\; w \in M\}$$
  - Verkettung der Wörter zweier Sprachen
    $$\boldsymbol{L \circ M} = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L.\ \exists v \in M.\ w = uv\}$$

Reguläre Ausdrücke beschreiben Sprachen

- **Ausdrücke für einfache Basissprachen**
  - Leere Sprache – Sprache ohne Elemente
  - Einelementige Sprachen: Sprache, die nur das leere Wort enthält
    Sprache, die nur ein Symbol $a \in \Sigma$ enthält

- **Ausdrücke für Komposition von Sprachen**
  - Vereinigung zweier Sprachen
    $$L \cup M \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid w \in L \;\vee\; w \in M\}$$
  - Verkettung der Wörter zweier Sprachen
    $$L \circ M \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L.\ \exists v \in M.\ w = uv\}$$
  - Verkettung einer festen Anzahl von Wörtern einer Sprache
    $$L^n \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid \exists u_1, .., u_n \in L.\ w = u_1..u_n\}\ (n \in \mathbb{N}) \quad (L^0 = \{\epsilon\})$$

Reguläre Ausdrücke beschreiben Sprachen

- **Ausdrücke für einfache Basissprachen**
  - Leere Sprache – Sprache ohne Elemente
  - Einelementige Sprachen: Sprache, die nur das leere Wort enthält
    Sprache, die nur ein Symbol $a \in \Sigma$ enthält
- **Ausdrücke für Komposition von Sprachen**
  - Vereinigung zweier Sprachen
    $$\boldsymbol{L \cup M} = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L \lor w \in M\}$$
  - Verkettung der Wörter zweier Sprachen
    $$\boldsymbol{L \circ M} = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L.\ \exists v \in M.\ w = uv\}$$
  - Verkettung einer festen Anzahl von Wörtern einer Sprache
    $$\boldsymbol{L^n} = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u_1, .., u_n \in L.\ w = u_1..u_n\}\ (n \in \mathbb{N}) \quad (L^0 = \{\epsilon\})$$
  - (Kleene'sche) Hülle: Verkettung beliebig vieler Wörter einer Sprache
    $$\boldsymbol{L^*} = \bigcup_{n \geq 0} L^n = \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}.\ \exists u_1, .., u_n \in L.\ w = u_1..u_n\}$$

Reguläre Ausdrücke beschreiben Sprachen

- **Ausdrücke für einfache Basissprachen**
  - Leere Sprache – Sprache ohne Elemente
  - Einelementige Sprachen: Sprache, die nur das leere Wort enthält
    Sprache, die nur ein Symbol $a \in \Sigma$ enthält

- **Ausdrücke für Komposition von Sprachen**
  - Vereinigung zweier Sprachen
    $$L \cup M = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L \ \vee \ w \in M\}$$
  - Verkettung der Wörter zweier Sprachen
    $$L \circ M = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L.\ \exists v \in M.\ w = uv\}$$
  - Verkettung einer festen Anzahl von Wörtern einer Sprache
    $$L^n = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u_1, .., u_n \in L.\ w = u_1..u_n\} \ (n \in \mathbb{N}) \quad (L^0 = \{\epsilon\})$$
  - (Kleene'sche) Hülle: Verkettung beliebig vieler Wörter einer Sprache
    $$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n = \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}.\ \exists u_1, .., u_n \in L.\ w = u_1..u_n\}$$

Mehr Ausdrücke möglich, aber nicht erforderlich

Reguläre Ausdrücke präzisiert

- **Syntax:** **Terme über $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, +, \circ, {}^*, (,)\}$**

Reguläre Ausdrücke präzisiert

- **Syntax:** **Terme über** $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, +, \circ, {}^*, (,)\}$
  - $\emptyset$, ϵ, und `a` (für alle $a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke
  - Sind E und F reguläre Ausdrücke, dann auch $E \circ F$, E^*, $E+F$ und (E)

Reguläre Ausdrücke präzisiert

- **Syntax:** **Terme über $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, +, \circ, {}^*, (,)\}$**
  - $\emptyset$, ϵ, und `a` (für alle $a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke
  - Sind E und F reguläre Ausdrücke, dann auch $E \circ F$, E^*, $E + F$ und (E)
- **Semantik: Sprachen über Σ**

  Die Sprache $L(E)$ des regulären Ausdrucks E, ist induktiv definiert

Reguläre Ausdrücke präzisiert

- **Syntax:** **Terme über $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, +, \circ, ^*, (,)\}$**
  - $\emptyset$, ϵ, und $\mathtt{a}$ (für alle $a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke
  - Sind E und F reguläre Ausdrücke, dann auch $E \circ F$, E^*, $E + F$ und (E)
- **Semantik:** **Sprachen über Σ**

  Die Sprache $L(E)$ des regulären Ausdrucks E, ist induktiv definiert
  - $L(\emptyset) = \emptyset$, $\quad L(\epsilon) = \{\epsilon\}$, $\quad L(\mathtt{a}) = \{a\}$ (für alle $a \in \Sigma$)

Reguläre Ausdrücke präzisiert

- **Syntax:** **Terme über $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, +, \circ, {}^*, (,)\}$**
  - $\emptyset$, ϵ, und `a` (für alle $a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke
  - Sind E und F reguläre Ausdrücke, dann auch $\boldsymbol{E \circ F}$, $\boldsymbol{E^*}$, $\boldsymbol{E + F}$ und $\boldsymbol{(E)}$
- **Semantik: Sprachen über Σ**

  Die Sprache $\boldsymbol{L(E)}$ des regulären Ausdrucks E, ist induktiv definiert
  - $L(\emptyset) = \emptyset$, $\quad L(\epsilon) = \{\epsilon\}$, $\quad L(\mathtt{a}) = \{a\}$ (für alle $a \in \Sigma$)
  - $L(E \circ F) = L(E) \circ L(F) = \{v\,w \mid v \in L(E) \wedge w \in L(F)\}$,

    $L(E^*) = (L(E))^* = \{w_1 w_2 .. w_n \mid n \in \mathbb{N} \wedge w_i \in L(E)\}$,

    $L(E + F) = L(E) \cup L(F)$

    $L((E)) = L(E)$

Reguläre Ausdrücke präzisiert

- **Syntax:** **Terme über $\Sigma \cup \{\emptyset,\epsilon,+,\circ,{}^*,(,)\}$**
  - $\emptyset$, ϵ, und `a` (für alle $a\in\Sigma$) sind reguläre Ausdrücke
  - Sind E und F reguläre Ausdrücke, dann auch $\boldsymbol{E\circ F}$, $\boldsymbol{E^*}$, $\boldsymbol{E+F}$ und $\boldsymbol{(E)}$
- **Semantik: Sprachen über Σ**

  Die Sprache $\boldsymbol{L(E)}$ des regulären Ausdrucks E, ist induktiv definiert
  - $L(\emptyset) = \emptyset,\quad L(\epsilon) = \{\epsilon\},\quad L(\mathtt{a}) = \{a\}$ (für alle $a\in\Sigma$)
  - $L(E\circ F) = L(E)\circ L(F) \qquad = \{v\,w \mid v\in L(E) \wedge w\in L(F)\}$,

    $L(E^*) \quad = (L(E))^* \qquad = \{w_1 w_2..w_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge w_i\in L(E)\}$,

    $L(E+F) = L(E)\cup L(F)$

    $L((E)) \quad = L(E)$
- **Konventionen**
  - $E\circ F$ wird üblicherweise als $\boldsymbol{EF}$ abgekürzt

Reguläre Ausdrücke präzisiert

- **Syntax:** **Terme über $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, +, \circ, {}^*, (,)\}$**
  - $\emptyset$, ϵ, und `a` (für alle $a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke
  - Sind E und F reguläre Ausdrücke, dann auch $\boldsymbol{E \circ F}$, $\boldsymbol{E^*}$, $\boldsymbol{E+F}$ und $\boldsymbol{(E)}$
- **Semantik: Sprachen über Σ**

  Die Sprache $\boldsymbol{L(E)}$ des regulären Ausdrucks E, ist induktiv definiert
  - $L(\emptyset) = \emptyset$, $\quad L(\epsilon) = \{\epsilon\}$, $\quad L(\mathtt{a}) = \{a\}$ (für alle $a \in \Sigma$)
  - $L(E \circ F) = L(E) \circ L(F) \quad = \{v\,w \mid v \in L(E) \wedge w \in L(F)\}$,

    $L(E^*) \quad = (L(E))^* \quad = \{w_1 w_2 .. w_n \mid n \in \mathbb{N} \wedge w_i \in L(E)\}$,

    $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$

    $L((E)) \ = L(E)$
- **Konventionen**
  - $E \circ F$ wird üblicherweise als $\boldsymbol{EF}$ abgekürzt
  - Definitorische Abkürzungen: $\boldsymbol{E^+} \equiv EE^*$, $\quad \boldsymbol{[a_1 ... a_n]} \equiv a_1 + ... + a_n$

Reguläre Ausdrücke präzisiert

- **Syntax: Terme über $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, +, \circ, ^*, (,)\}$**
  – $\emptyset$, ϵ, und $\mathtt{a}$ (für alle $a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke
  – Sind E und F reguläre Ausdrücke, dann auch $E\circ F$, E^*, $E+F$ und (E)
- **Semantik: Sprachen über Σ**
  Die Sprache $L(E)$ des regulären Ausdrucks E, ist induktiv definiert
  – $L(\emptyset) = \emptyset$, $\quad L(\epsilon) = \{\epsilon\}$, $\quad L(\mathtt{a}) = \{a\}$ (für alle $a \in \Sigma$)
  – $L(E\circ F) = L(E)\circ L(F) \qquad = \{v\,w \mid v \in L(E) \wedge w \in L(F)\}$,
  $L(E^*) \quad = (L(E))^* \qquad = \{w_1 w_2 .. w_n \mid n \in \mathbb{N} \wedge w_i \in L(E)\}$,
  $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$
  $L((E)) \; = L(E)$
- **Konventionen**
  – $E\circ F$ wird üblicherweise als EF abgekürzt
  – Definitorische Abkürzungen: $E^+ \equiv EE^*$, $\quad [a_1 ... a_n] \equiv a_1 + ... + a_n$
  – Prioritätsregelungen ermöglichen es, überflüssige Klammern wegzulassen
    · * („Sternoperator") bindet stärker als $\circ$, und dies stärker als $+$
    · Verkettung $\circ$ und Vereinigung $+$ sind assoziativ

Entwicklung regulärer Ausdrücke

Beschreibe Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln

1. Regulärer Ausdruck für die Sprache $\{01\}$

– `0` repräsentiert $\{0\}$, `1` repräsentiert $\{1\}$

– Also ist $L(\texttt{01}) \;=\; L(\texttt{0})\circ L(\texttt{1}) \;=\; \{0\}\circ\{1\} \;=\; \{01\}$

Entwicklung regulärer Ausdrücke

Beschreibe Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln

1. Regulärer Ausdruck für die Sprache $\{01\}$

– `0` repräsentiert $\{0\}$, `1` repräsentiert $\{1\}$

– Also ist $L(\texttt{01}) = L(\texttt{0}) \circ L(\texttt{1}) = \{0\} \circ \{1\} = \{01\}$

2. Erzeuge $\{01, 0101, 010101, ..\}$ durch Sternbildung

– $L(\texttt{(01)}^*) = L(\texttt{01})^* = \{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \ldots\}$

Entwicklung regulärer Ausdrücke

Beschreibe Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln

1. Regulärer Ausdruck für die Sprache $\{01\}$

– `0` repräsentiert $\{0\}$, `1` repräsentiert $\{1\}$

– Also ist $L(\texttt{01}) = L(\texttt{0})\circ L(\texttt{1}) = \{0\}\circ\{1\} = \{01\}$

2. Erzeuge $\{01, 0101, 010101, ..\}$ durch Sternbildung

– $L(\texttt{(01)}^*) = L(\texttt{01})^* = \{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \ldots\}$

3. Manche Wörter nicht erfaßt

– Start mit Eins statt Null: $\texttt{(10)}^*$

– Start und Ende mit Null: $\texttt{(01)}^*\texttt{0}$

– Start und Ende mit Eins: $\texttt{(10)}^*\texttt{1}$

Vollständiger Ausdruck: $\texttt{(01)}^* + \texttt{(10)}^* + \texttt{(01)}^*\texttt{0} + \texttt{(10)}^*\texttt{1}$

Entwicklung regulärer Ausdrücke

Beschreibe Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln

1. Regulärer Ausdruck für die Sprache $\{01\}$

– 0 repräsentiert $\{0\}$, 1 repräsentiert $\{1\}$

– Also ist $L(\texttt{01}) = L(\texttt{0})\circ L(\texttt{1}) = \{0\}\circ\{1\} = \{01\}$

2. Erzeuge $\{01, 0101, 010101, ..\}$ durch Sternbildung

– $L(\texttt{(01)}^*) = L(\texttt{01})^* = \{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \ldots\}$

3. Manche Wörter nicht erfaßt

– Start mit Eins statt Null: $\texttt{(10)}^*$

– Start und Ende mit Null: $\texttt{(01)}^*\texttt{0}$

– Start und Ende mit Eins: $\texttt{(10)}^*\texttt{1}$

Vollständiger Ausdruck: $\texttt{(01)}^* + \texttt{(10)}^* + \texttt{(01)}^*\texttt{0} + \texttt{(10)}^*\texttt{1}$

4. Es geht auch kürzer

– Optional 1 am Anfang oder 0 am Ende: $\texttt{(}\epsilon\texttt{+1)(01)}^*\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}$

Bestimmung der Semantik von $\texttt{(}\epsilon\texttt{+1)(01)}^*\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}$

$$L\big(\texttt{(}\epsilon\texttt{+1)(01)}^*\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}\big)$$

Bestimmung der Semantik von $\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+1)(01)^*(}\epsilon\mathtt{+0)}$

$$
\begin{aligned}
& L\big(\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+1)(01)^*(}\epsilon\mathtt{+0)}\big) \\
= \; & L\big(\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+1)}\big) \circ L\big(\mathtt{(01)^*}\big) \circ L\big(\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+0)}\big)
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Semantik von $(\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$

$$
\begin{aligned}
& L\big((\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)\big) \\
= {} & L\big((\epsilon+1)\big) \circ L\big((01)^*\big) \circ L\big((\epsilon+0)\big) \\
= {} & L(\epsilon) \cup L(1) \circ L\big((01)\big)^* \circ L(\epsilon) \cup L(0)
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Semantik von $\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+1)(01)}^*\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+0)}$

$$
\begin{aligned}
& L\big(\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+1)(01)}^*\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+0)}\big) \\
=\; & L\big(\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+1)}\big) \circ L\big(\mathtt{(01)}^*\big) \circ L\big(\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+0)}\big) \\
=\; & L(\epsilon) \cup L(\mathtt{1}) \circ L\big(\mathtt{(01)}\big)^* \circ L(\epsilon) \cup L(\mathtt{0}) \\
=\; & \{\epsilon\} \cup \{1\} \circ \big(L(\mathtt{0}) \circ L(\mathtt{1})\big)^* \circ \{\epsilon\} \cup \{0\}
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Semantik von $\texttt{(}\epsilon\texttt{+1)(01)}^*\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}$

$$
\begin{aligned}
& L(\texttt{(}\epsilon\texttt{+1)(01)}^*\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}) \\
&= L(\texttt{(}\epsilon\texttt{+1)}) \circ L(\texttt{(01)}^*) \circ L(\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}) \\
&= L(\epsilon) \cup L(\texttt{1}) \circ L(\texttt{(01)})^* \circ L(\epsilon) \cup L(\texttt{0}) \\
&= \{\epsilon\} \cup \{1\} \circ (L(\texttt{0}) \circ L(\texttt{1}))^* \circ \{\epsilon\} \cup \{0\} \\
&= \{\epsilon,1\} \circ \{01\}^* \circ \{\epsilon,0\}
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Semantik von $(\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$

$$
\begin{aligned}
& L\big((\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)\big) \\
= \; & L\big((\epsilon+1)\big) \circ L\big((01)^*\big) \circ L\big((\epsilon+0)\big) \\
= \; & L(\epsilon) \cup L(1) \circ L\big((01)\big)^* \circ L(\epsilon) \cup L(0) \\
= \; & \{\epsilon\} \cup \{1\} \circ (L(0) \circ L(1))^* \circ \{\epsilon\} \cup \{0\} \\
= \; & \{\epsilon,1\} \circ \{01\}^* \circ \{\epsilon,0\} \\
= \; & \{\epsilon,1\} \circ \{w \mid \exists n \in \mathbb{N}.\ w = \underbrace{01...01}_{n-mal}\} \circ \{\epsilon,0\}
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Semantik von $(\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$

$$
\begin{aligned}
& L((\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)) \\
&= L((\epsilon+1)) \circ L((01)^*) \circ L((\epsilon+0)) \\
&= L(\epsilon)\cup L(1) \circ L((01))^* \circ L(\epsilon)\cup L(0) \\
&= \{\epsilon\}\cup\{1\} \circ (L(0)\circ L(1))^* \circ \{\epsilon\}\cup\{0\} \\
&= \{\epsilon,1\} \circ \{01\}^* \circ \{\epsilon,0\} \\
&= \{\epsilon,1\} \circ \{w \mid \exists n\in\mathbb{N}.\ w = \underbrace{01\ldots01}_{n-mal}\} \circ \{\epsilon,0\} \\
&= \{w \mid \exists n\in\mathbb{N}.\ w = \underbrace{01\ldots01}_{n-mal} \ \vee w = 1\underbrace{01\ldots01}_{n-mal} \\
&\qquad\qquad \vee w = \underbrace{01\ldots01}_{n-mal}0 \vee w = 1\underbrace{01\ldots01}_{n-mal}0\,\}
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Semantik von (ϵ+1)(01)*(ϵ+0)

$$
\begin{aligned}
& L(\texttt{(}\epsilon\texttt{+1)(01)}^{*}\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}) \\
&= L(\texttt{(}\epsilon\texttt{+1)}) \circ L(\texttt{(01)}^{*}) \circ L(\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}) \\
&= L(\epsilon)\cup L(\texttt{1}) \circ L(\texttt{(01)})^{*} \circ L(\epsilon)\cup L(\texttt{0}) \\
&= \{\epsilon\}\cup\{1\} \circ (L(\texttt{0})\circ L(\texttt{1}))^{*} \circ \{\epsilon\}\cup\{0\} \\
&= \{\epsilon,1\} \circ \{01\}^{*} \circ \{\epsilon,0\} \\
&= \{\epsilon,1\} \circ \{w \mid \exists n\in\mathbb{N}.\ w = \underbrace{01...01}_{n-mal}\} \circ \{\epsilon,0\} \\
&= \{w \mid \exists n\in\mathbb{N}.\ w = \underbrace{01...01}_{n-mal} \vee w = 1\underbrace{01...01}_{n-mal} \\
&\qquad \vee w = \underbrace{01...01}_{n-mal}0 \vee w = 1\underbrace{01...01}_{n-mal}0\,\}
\end{aligned}
$$

$= \text{Die Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln}$

(Mühsamer Beweis durch Induktion)

Sprachen vs. Ausdrücke

- **Sprachen sind Mengen von Wörtern**
  - Abstraktes semantisches Konzept: Ungeordnete Kollektion von Wörtern

Sprachen vs. Ausdrücke

- **Sprachen sind Mengen von Wörtern**
  - Abstraktes semantisches Konzept: Ungeordnete Kollektion von Wörtern
  - Beschreibung von Mengen (auf Folie, Tafel, ...) benötigt textuelle Notation
  - Notation benutzt Kurzschreibweisen wie $\cup$, $\circ$, $*$ für Mengenoperationen

Sprachen vs. Ausdrücke

- **Sprachen sind Mengen von Wörtern**
  - Abstraktes semantisches Konzept: Ungeordnete Kollektion von Wörtern
  - Beschreibung von Mengen (auf Folie, Tafel, ...) benötigt textuelle Notation
  - Notation benutzt Kurzschreibweisen wie $\cup$, $\circ$, $*$ für Mengenoperationen

    ... aber ist selbst nur ein Hilfsmittel zur Kommunikation

Sprachen vs. Ausdrücke

- **Sprachen sind Mengen von Wörtern**
  - Abstraktes semantisches Konzept: Ungeordnete Kollektion von Wörtern
  - Beschreibung von Mengen (auf Folie, Tafel, ...) benötigt textuelle Notation
  - Notation benutzt Kurzschreibweisen wie $\cup$, $\circ$, $*$ für Mengenoperationen

    ... aber ist selbst nur ein Hilfsmittel zur Kommunikation
- **Reguläre Ausdrücke sind Terme**
  - Eine syntaktische Beschreibungsform, die ein Computer versteht

Sprachen vs. Ausdrücke

- **Sprachen sind Mengen von Wörtern**
  - Abstraktes semantisches Konzept: Ungeordnete Kollektion von Wörtern
  - Beschreibung von Mengen (auf Folie, Tafel, ...) benötigt textuelle Notation
  - Notation benutzt Kurzschreibweisen wie $\cup$, $\circ$, $*$ für Mengenoperationen

    ... aber ist selbst nur ein Hilfsmittel zur Kommunikation

- **Reguläre Ausdrücke sind Terme**
  - Eine syntaktische Beschreibungsform, die ein Computer versteht
  - Reguläre Ausdrücke werden zur Beschreibung von Sprachen benutzt

    und sind ähnlich zur Standardnotation von Mengen

Sprachen vs. Ausdrücke

- **Sprachen sind Mengen von Wörtern**
  - Abstraktes semantisches Konzept: Ungeordnete Kollektion von Wörtern
  - Beschreibung von Mengen (auf Folie, Tafel, ...) benötigt textuelle Notation
  - Notation benutzt Kurzschreibweisen wie $\cup$, $\circ$, $*$ für Mengenoperationen
    ... aber ist selbst nur ein Hilfsmittel zur Kommunikation
- **Reguläre Ausdrücke sind Terme**
  - Eine syntaktische Beschreibungsform, die ein Computer versteht
  - Reguläre Ausdrücke werden zur Beschreibung von Sprachen benutzt
    und sind ähnlich zur Standardnotation von Mengen
- **Reguläre Ausdrücke sind selbst keine Sprachen**
  - Unterscheide Ausdruck E von Sprache des Ausdrucks $L(E)$

Sprachen vs. Ausdrücke

- **Sprachen sind Mengen von Wörtern**
  - Abstraktes semantisches Konzept: Ungeordnete Kollektion von Wörtern
  - Beschreibung von Mengen (auf Folie, Tafel, ...) benötigt textuelle Notation
  - Notation benutzt Kurzschreibweisen wie $\cup$, $\circ$, $*$ für Mengenoperationen

    ... aber ist selbst nur ein Hilfsmittel zur Kommunikation
- **Reguläre Ausdrücke sind Terme**
  - Eine syntaktische Beschreibungsform, die ein Computer versteht
  - Reguläre Ausdrücke werden zur Beschreibung von Sprachen benutzt

    und sind ähnlich zur Standardnotation von Mengen
- **Reguläre Ausdrücke sind selbst keine Sprachen**
  - Unterscheide Ausdruck E von Sprache des Ausdrucks $L(E)$
  - Man verzichtet auf den Unterschied wenn der Kontext eindeutig ist

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $\texttt{(01)}^* + \texttt{(10)}^* + \texttt{(01)}^*\texttt{0} + \texttt{(10)}^*\texttt{1} \cong (\epsilon\texttt{+1})\texttt{(01)}^*(\epsilon\texttt{+0})$ **?**

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $\boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{F}$, falls $L(E) = L(F)$

“Rechenregeln” für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $\texttt{(01)}^* + \texttt{(10)}^* + \texttt{(01)}^*\texttt{0} + \texttt{(10)}^*\texttt{1} \cong \texttt{(}\epsilon\texttt{+1)(01)}^*\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}$ **?**

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $\boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{F}$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $\texttt{(01)}^* + \texttt{(10)}^* + \texttt{(01)}^*\texttt{0} + \texttt{(10)}^*\texttt{1} \cong (\epsilon\texttt{+1)(01)}^*(\epsilon\texttt{+0)}$?

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $\boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{F}$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke
- **Einheiten und Annihilatoren**
  - $\emptyset + \boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{E} + \emptyset$:

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $\texttt{(01)}^*\texttt{+(10)}^*\texttt{+(01)}^*\texttt{0+(10)}^*\texttt{1} \cong \texttt{(}\epsilon\texttt{+1)(01)}^*\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}$?

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $\boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{F}$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke
- **Einheiten und Annihilatoren**
  - $\boldsymbol{\emptyset+E \cong E \cong E+\emptyset}$: $\quad L(\emptyset+E) = L(\emptyset)\cup L(E) = \emptyset\cup L(E) = L(E)$

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $(01)^*+(10)^*+(01)^*0+(10)^*1 \cong (\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$ **?**

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $\boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{F}$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke
- **Einheiten und Annihilatoren**
  - $\boldsymbol{\emptyset+E \cong E \cong E+\emptyset}$: $\quad L(\emptyset+E) = L(\emptyset)\cup L(E) = \emptyset\cup L(E) = L(E)$
  - $\boldsymbol{\epsilon\circ E \cong E \cong E\circ\epsilon}$:

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $\texttt{(01)}^* + \texttt{(10)}^* + \texttt{(01)}^*\texttt{0} + \texttt{(10)}^*\texttt{1} \cong (\epsilon\texttt{+1})\texttt{(01)}^*(\epsilon\texttt{+0})$?

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $\boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{F}$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke
- **Einheiten und Annihilatoren**
  - $\boldsymbol{\emptyset + E \cong E \cong E + \emptyset}$: $\quad L(\emptyset+E) = L(\emptyset) \cup L(E) = \emptyset \cup L(E) = L(E)$
  - $\boldsymbol{\epsilon \circ E \cong E \cong E \circ \epsilon}$: $\quad L(\epsilon \circ E) = L(\epsilon) \circ L(E) = \{\epsilon\} \circ L(E) = L(E)$

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $(01)^* + (10)^* + (01)^*0 + (10)^*1 \cong (\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$?

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $E \cong F$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke
- **Einheiten und Annihilatoren**
  - $\emptyset + E \cong E \cong E + \emptyset$: $\quad L(\emptyset+E) = L(\emptyset) \cup L(E) = \emptyset \cup L(E) = L(E)$
  - $\epsilon \circ E \cong E \cong E \circ \epsilon$: $\quad L(\epsilon \circ E) = L(\epsilon) \circ L(E) = \{\epsilon\} \circ L(E) = L(E)$
  - $\emptyset \circ E \cong \emptyset \cong E \circ \emptyset$:

“Rechenregeln” für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $\texttt{(01)}^* + \texttt{(10)}^* + \texttt{(01)}^*\texttt{0} + \texttt{(10)}^*\texttt{1} \cong (\epsilon\texttt{+1})\texttt{(01)}^*(\epsilon\texttt{+0})$ **?**

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $\boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{F}$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke
- **Einheiten und Annihilatoren**
  - $\boldsymbol{\emptyset + E \cong E \cong E + \emptyset}$: $L(\emptyset + E) = L(\emptyset) \cup L(E) = \emptyset \cup L(E) = L(E)$
  - $\boldsymbol{\epsilon \circ E \cong E \cong E \circ \epsilon}$: $L(\epsilon \circ E) = L(\epsilon) \circ L(E) = \{\epsilon\} \circ L(E) = L(E)$
  - $\boldsymbol{\emptyset \circ E \cong \emptyset \cong E \circ \emptyset}$: $L(\emptyset \circ E) = L(\emptyset) \circ L(E) = \emptyset \circ L(E) = \emptyset = L(\emptyset)$

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $(01)^* + (10)^* + (01)^*0 + (10)^*1 \cong (\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$?

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $E \cong F$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke
- **Einheiten und Annihilatoren**
  - $\emptyset+E \cong E \cong E+\emptyset$: $\quad L(\emptyset+E) = L(\emptyset)\cup L(E) = \emptyset\cup L(E) = L(E)$
  - $\epsilon\circ E \cong E \cong E\circ\epsilon$: $\quad L(\epsilon\circ E) = L(\epsilon)\circ L(E) = \{\epsilon\}\circ L(E) = L(E)$
  - $\emptyset\circ E \cong \emptyset \cong E\circ\emptyset$: $\quad L(\emptyset\circ E) = L(\emptyset)\circ L(E) = \emptyset\circ L(E) = \emptyset = L(\emptyset)$
- **Kommutativität von +**
  - $E+F \cong F+E$:

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man `(01)`*`+(10)`*`+(01)`*`0+(10)`*`1` $\cong$ `(`ϵ`+1)(01)`*`(`ϵ`+0)` **?**

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $E \cong F$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke
- **Einheiten und Annihilatoren**
  - $\emptyset{+}E \cong E \cong E{+}\emptyset$: $\quad L(\emptyset{+}E) = L(\emptyset) \cup L(E) = \emptyset \cup L(E) = L(E)$
  - $\epsilon{\circ}E \cong E \cong E{\circ}\epsilon$: $\quad L(\epsilon{\circ}E) = L(\epsilon){\circ}L(E) = \{\epsilon\}{\circ}L(E) = L(E)$
  - $\emptyset{\circ}E \cong \emptyset \cong E{\circ}\emptyset$: $\quad L(\emptyset{\circ}E) = L(\emptyset){\circ}L(E) = \emptyset{\circ}L(E) = \emptyset = L(\emptyset)$
- **Kommutativität von +**
  - $E{+}F \cong F{+}E$: $\quad L(E{+}F) = L(E) \cup L(F) = L(F) \cup L(E) = L(F{+}E)$

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $\texttt{(01)}^*\texttt{+(10)}^*\texttt{+(01)}^*\texttt{0+(10)}^*\texttt{1} \cong \texttt{(}\epsilon\texttt{+1)(01)}^*\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}$ **?**

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $\boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{F}$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke
- **Einheiten und Annihilatoren**
  - $\boldsymbol{\emptyset+E \cong E \cong E+\emptyset}$: $\quad L(\emptyset+E) = L(\emptyset)\cup L(E) = \emptyset\cup L(E) = L(E)$
  - $\boldsymbol{\epsilon\circ E \cong E \cong E\circ\epsilon}$: $\quad L(\epsilon\circ E) = L(\epsilon)\circ L(E) = \{\epsilon\}\circ L(E) = L(E)$
  - $\boldsymbol{\emptyset\circ E \cong \emptyset \cong E\circ\emptyset}$: $\quad L(\emptyset\circ E) = L(\emptyset)\circ L(E) = \emptyset\circ L(E) = \emptyset = L(\emptyset)$
- **Kommutativität von +**
  - $\boldsymbol{E+F \cong F+E}$: $\quad L(E+F) = L(E)\cup L(F) = L(F)\cup L(E) = L(F+E)$
  - Kommutativität von $\circ$ gilt nicht: $\quad = L(\texttt{01}) = \{01\} \neq \{10\} = L(\texttt{10})$

“Rechenregeln” für reguläre Ausdrücke II

- **Assoziativität von $\circ$ und +**
  $(E\circ F)\circ G \cong E\circ(F\circ G)$:

“Rechenregeln” für reguläre Ausdrücke II

- **Assoziativität von $\circ$ und +**
  $(\boldsymbol{E}\circ\boldsymbol{F})\circ\boldsymbol{G} \cong \boldsymbol{E}\circ(\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{G})$:
  - $L((E\circ F)\circ G) = L(E\circ F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F\circ G) = L(E\circ(F\circ G))$

“Rechenregeln” für reguläre Ausdrücke II

- **Assoziativität von $\circ$ und +**

  $(\boldsymbol{E}\circ\boldsymbol{F})\circ\boldsymbol{G} \cong \boldsymbol{E}\circ(\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{G})$:

  – $L((E\circ F)\circ G) = L(E\circ F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F\circ G) = L(E\circ(F\circ G))$

  $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F})+\boldsymbol{G} \cong \boldsymbol{E}+(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})$:

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke II

- **Assoziativität von $\circ$ und +**

  $\boldsymbol{(E{\circ}F){\circ}G \cong E{\circ}(F{\circ}G)}$:

  – $L((E{\circ}F){\circ}G) = L(E{\circ}F){\circ}L(G) = L(E){\circ}L(F){\circ}L(G) = L(E){\circ}L(F{\circ}G) = L(E{\circ}(F{\circ}G))$

  $\boldsymbol{(E{+}F){+}G \cong E{+}(F{+}G)}$:

  – $L((E{+}F){+}G) = L(E{+}F){\cup}L(G) = L(E){\cup}L(F){\cup}L(G) = \ldots = L(E{+}(F{+}G))$

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke II

- **Assoziativität von $\circ$ und +**

  $(\boldsymbol{E}\circ\boldsymbol{F})\circ\boldsymbol{G} \cong \boldsymbol{E}\circ(\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{G})$:

  – $L((E\circ F)\circ G) = L(E\circ F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F\circ G) = L(E\circ(F\circ G))$

  $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F})+\boldsymbol{G} \cong \boldsymbol{E}+(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})$:

  – $L((E+F)+G) = L(E+F)\cup L(G) = L(E)\cup L(F)\cup L(G) = \ldots = L(E+(F+G))$

- **Distributivgesetze**

  – $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F})\circ\boldsymbol{G} \cong \boldsymbol{E}\circ\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{G}$:

“Rechenregeln” für reguläre Ausdrücke II

- **Assoziativität von ∘ und +**

  $(E{\circ}F){\circ}G \cong E{\circ}(F{\circ}G)$:
  - $L((E{\circ}F){\circ}G) = L(E{\circ}F){\circ}L(G) = L(E){\circ}L(F){\circ}L(G) = L(E){\circ}L(F{\circ}G) = L(E{\circ}(F{\circ}G))$

  $(E{+}F){+}G \cong E{+}(F{+}G)$:
  - $L((E{+}F){+}G) = L(E{+}F){\cup}L(G) = L(E){\cup}L(F){\cup}L(G) = \ldots = L(E{+}(F{+}G))$

- **Distributivgesetze**
  - $(E{+}F){\circ}G \cong E{\circ}G{+}F{\circ}G$:

$$
\begin{aligned}
& L((E{+}F){\circ}G) = (L(E){\cup}L(F)){\circ}L(G) \\
& = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L(E){\cup}L(F).\exists v \in L(G).w = uv\} \\
& = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L(E).\exists v \in L(G).w = uv \vee \exists u \in L(F).\exists v \in L(G).w = uv\} \\
& = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L(E).\exists v \in L(G).w = uv\} \cup \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L(F).\exists v \in L(G).w = uv\} \\
& = L(E){\circ}L(G){\cup}L(F){\circ}L(G) = L(E{\circ}G{+}F{\circ}G)
\end{aligned}
$$

“Rechenregeln” für reguläre Ausdrücke II

- **Assoziativität von $\circ$ und +**

  $(E\circ F)\circ G \cong E\circ(F\circ G)$:

  – $L((E\circ F)\circ G) = L(E\circ F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F\circ G) = L(E\circ(F\circ G))$

  $(E+F)+G \cong E+(F+G)$:

  – $L((E+F)+G) = L(E+F)\cup L(G) = L(E)\cup L(F)\cup L(G) = \ldots = L(E+(F+G))$

- **Distributivgesetze**

  – $(E+F)\circ G \cong E\circ G+F\circ G$:

  $$\begin{aligned} & L((E+F)\circ G) = (L(E)\cup L(F))\circ L(G) \\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E)\cup L(F).\exists v\in L(G).w=uv\} \\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E).\exists v\in L(G).w=uv \vee \exists u\in L(F).\exists v\in L(G).w=uv\} \\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E).\exists v\in L(G).w=uv\} \cup \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(F).\exists v\in L(G).w=uv\} \\ &= L(E)\circ L(G)\cup L(F)\circ L(G) = L(E\circ G+F\circ G) \end{aligned}$$

  – $G\circ(E+F) \cong G\circ E + G\circ F$

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke II

- **Assoziativität von ∘ und +**

  $(E\circ F)\circ G \cong E\circ(F\circ G)$:

  – $L((E\circ F)\circ G) = L(E\circ F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F\circ G) = L(E\circ(F\circ G))$

  $(E+F)+G \cong E+(F+G)$:

  – $L((E+F)+G) = L(E+F)\cup L(G) = L(E)\cup L(F)\cup L(G) = \ldots = L(E+(F+G))$

- **Distributivgesetze**

  – $(E+F)\circ G \cong E\circ G+F\circ G$:

  $$\begin{aligned} L((E+F)\circ G) &= (L(E)\cup L(F))\circ L(G) \\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E)\cup L(F).\exists v\in L(G).w=uv\} \\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E).\exists v\in L(G).w=uv \vee \exists u\in L(F).\exists v\in L(G).w=uv\} \\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E).\exists v\in L(G).w=uv\} \cup \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(F).\exists v\in L(G).w=uv\} \\ &= L(E)\circ L(G)\cup L(F)\circ L(G) = L(E\circ G+F\circ G) \end{aligned}$$

  – $G\circ(E+F) \cong G\circ E + G\circ F$

- **Idempotenz von +:** $E+E \cong E$

“Rechenregeln” für reguläre Ausdrücke II

- **Assoziativität von $\circ$ und +**

  $(E\circ F)\circ G \cong E\circ(F\circ G)$:

  – $L((E\circ F)\circ G) = L(E\circ F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F\circ G) = L(E\circ(F\circ G))$

  $(E+F)+G \cong E+(F+G)$:

  – $L((E+F)+G) = L(E+F)\cup L(G) = L(E)\cup L(F)\cup L(G) = \ldots = L(E+(F+G))$

- **Distributivgesetze**

  – $(E+F)\circ G \cong E\circ G+F\circ G$:

  $$\begin{aligned} L((E+F)\circ G) &= (L(E)\cup L(F))\circ L(G)\\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E)\cup L(F).\exists v\in L(G).w = uv\}\\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E).\exists v\in L(G).w = uv \vee \exists u\in L(F).\exists v\in L(G).w = uv\}\\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E).\exists v\in L(G).w = uv\} \cup \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(F).\exists v\in L(G).w = uv\}\\ &= L(E)\circ L(G)\cup L(F)\circ L(G) = L(E\circ G+F\circ G) \end{aligned}$$

  – $G\circ(E+F) \cong G\circ E + G\circ F$

- **Idempotenz von +:** $E+E \cong E$

- **Hüllengesetze:** $\emptyset^* \cong \epsilon,\quad \epsilon^* \cong \epsilon,\quad (E^*)^* \cong E^*$

  $E^+ \cong E\circ E^* \cong E^*\circ E,\quad E^* \cong \epsilon + E^+$

Beweismethodik für weitere Äquivalenzen

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**
  - Sei $w \in L((E+F)^*)$

Beweismethodik für weitere Äquivalenzen

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**
  – Sei $w \in L((E+F)^*)$
  – Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i

Beweismethodik für weitere Äquivalenzen

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**
  - Sei $w \in L((E+F)^*)$
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)

Beweismethodik für weitere Äquivalenzen

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**
  - Sei $w \in L((E+F)^*)$
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)
  - Also $w \in L((E^*F^*)^*)$

Beweismethodik für weitere Äquivalenzen

- **Beispiel: Nachweis von $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F})^* \cong (\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{F}^*)^*$**
  - Sei $w \in L((E+F)^*)$
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)
  - Also $w \in L((E^*F^*)^*)$
- **Beweis verwendet keine Information über $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{F}$**

Beweismethodik für weitere Äquivalenzen

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**
  - Sei $w \in L((E+F)^*)$
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)
  - Also $w \in L((E^*F^*)^*)$
- **Beweis verwendet keine Information über E und F**
  - Man könnte genauso gut $\texttt{(a+b)}^* \cong \texttt{(a}^*\texttt{b}^*\texttt{)}^*$ testen

    $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$ gilt, weil $\texttt{(a+b)}^* \cong \texttt{(a}^*\texttt{b}^*\texttt{)}^*$ gilt

Beweismethodik für weitere Äquivalenzen

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**
  - Sei $w \in L((E+F)^*)$
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)
  - Also $w \in L((E^*F^*)^*)$
- **Beweis verwendet keine Information über E und F**
  - Man könnte genauso gut $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ testen

    $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$ gilt, weil $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ gilt
- **Allgemeines Beweisverfahren**
  - E regulärer Ausdruck mit Metavariablen $E_1,..,E_m$ für Sprachen $L_1,..,L_m$

Beweismethodik für weitere Äquivalenzen

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**
  - Sei $w \in L((E+F)^*)$
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)
  - Also $w \in L((E^*F^*)^*)$
- **Beweis verwendet keine Information über E und F**
  - Man könnte genauso gut $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ testen
    $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$ gilt, weil $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ gilt
- **Allgemeines Beweisverfahren**
  - E regulärer Ausdruck mit Metavariablen $E_1,..,E_m$ für Sprachen $L_1,..,L_m$
  - Ersetze im Beweis für $E \cong F$ alle Metavariablen durch Symbole $a \in \Sigma$

Beweismethodik für weitere Äquivalenzen

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**
  - Sei $w \in L((E+F)^*)$
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)
  - Also $w \in L((E^*F^*)^*)$
- **Beweis verwendet keine Information über E und F**
  - Man könnte genauso gut $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ testen
    $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$ gilt, weil $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ gilt
- **Allgemeines Beweisverfahren**
  - E regulärer Ausdruck mit Metavariablen $E_1,..,E_m$ für Sprachen $L_1,..,L_m$
  - Ersetze im Beweis für $E \cong F$ alle Metavariablen durch Symbole $a \in \Sigma$
  - Teste Äquivalenz der konkreten Ausdrücke mit automatischem Prüfverfahren

$\mapsto$ Einheit 2.5

BEWEISMETHODIK FÜR WEITERE ÄQUIVALENZEN

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**
  - Sei $w \in L((E+F)^*)$
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)
  - Also $w \in L((E^*F^*)^*)$
- **Beweis verwendet keine Information über E und F**
  - Man könnte genauso gut $(\texttt{a+b})^* \cong (\texttt{a}^*\texttt{b}^*)^*$ testen
    $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$ gilt, weil $(\texttt{a+b})^* \cong (\texttt{a}^*\texttt{b}^*)^*$ gilt
- **Allgemeines Beweisverfahren**
  - E regulärer Ausdruck mit Metavariablen $E_1,..,E_m$ für Sprachen $L_1,..,L_m$
  - Ersetze im Beweis für $E \cong F$ alle Metavariablen durch Symbole $a \in \Sigma$
  - Teste Äquivalenz der konkreten Ausdrücke mit automatischem Prüfverfahren $\mapsto$ Einheit 2.5

  Korrektheitsbeweis: Induktion über Struktur regulärer Ausdrücke

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Für jeden regulären Ausdruck E gibt es einen ϵ-NEA A mit

– A hat genau einen akzeptierenden Zustand q_f

– Der Startzustand von A ist in keinem $\delta_A(q,a)$ enthalten

– Für alle $a \in \Sigma$ ist $\delta_A(q_f,a) = \emptyset$

– $L(E) = L(A)$

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Für jeden regulären Ausdruck E gibt es einen ϵ-NEA A mit

– A hat genau einen akzeptierenden Zustand q_f

– Der Startzustand von A ist in keinem $\delta_A(q,a)$ enthalten

– Für alle $a \in \Sigma$ ist $\delta_A(q_f,a) = \emptyset$

– $L(E) = L(A)$

Beweis durch strukturelle Induktion über Aufbau regulärer Ausdrücke

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Für jeden regulären Ausdruck E gibt es einen ϵ-NEA A mit

– A hat genau einen akzeptierenden Zustand q_f

– Der Startzustand von A ist in keinem $\delta_A(q,a)$ enthalten

– Für alle $a \in \Sigma$ ist $\delta_A(q_f,a) = \emptyset$

– $L(E) = L(A)$

Beweis durch strukturelle Induktion über Aufbau regulärer Ausdrücke

- **Induktionsanfänge**

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Für jeden regulären Ausdruck E gibt es einen ϵ-NEA A mit

– A hat genau einen akzeptierenden Zustand q_f

– Der Startzustand von A ist in keinem $\delta_A(q,a)$ enthalten

– Für alle $a \in \Sigma$ ist $\delta_A(q_f,a) = \emptyset$

– $L(E) = L(A)$

Beweis durch strukturelle Induktion über Aufbau regulärer Ausdrücke

- **Induktionsanfänge**

  – Für $E = \epsilon$ wähle $A =$

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Für jeden regulären Ausdruck E gibt es einen ϵ-NEA A mit

– A hat genau einen akzeptierenden Zustand q_f

– Der Startzustand von A ist in keinem $\delta_A(q,a)$ enthalten

– Für alle $a \in \Sigma$ ist $\delta_A(q_f,a) = \emptyset$

– $L(E) = L(A)$

Beweis durch strukturelle Induktion über Aufbau regulärer Ausdrücke

- **Induktionsanfänge**

  – Für $E = \epsilon$ wähle $A =$ 

  – Für $E = \emptyset$ wähle $A =$ 

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Für jeden regulären Ausdruck E gibt es einen ϵ-NEA A mit

– A hat genau einen akzeptierenden Zustand q_f

– Der Startzustand von A ist in keinem $\delta_A(q,a)$ enthalten

– Für alle $a \in \Sigma$ ist $\delta_A(q_f,a) = \emptyset$

– $L(E) = L(A)$

Beweis durch strukturelle Induktion über Aufbau regulärer Ausdrücke

- **Induktionsanfänge**

  – Für $E = \epsilon$ wähle $A =$

  – Für $E = \emptyset$ wähle $A =$

  – Für $E = \texttt{a}$ wähle $A =$

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Für jeden regulären Ausdruck E gibt es einen ϵ-NEA A mit

- A hat genau einen akzeptierenden Zustand q_f
- Der Startzustand von A ist in keinem $\delta_A(q,a)$ enthalten
- Für alle $a \in \Sigma$ ist $\delta_A(q_f,a) = \emptyset$
- $L(E) = L(A)$

Beweis durch strukturelle Induktion über Aufbau regulärer Ausdrücke

- **Induktionsanfänge**
  - Für $E = \epsilon$ wähle $A =$

  - Für $E = \emptyset$ wähle $A =$

  - Für $E = \texttt{a}$ wähle $A =$

  - **Korrektheit offensichtlich**, da jeweils maximal ein Zustandsübergang

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

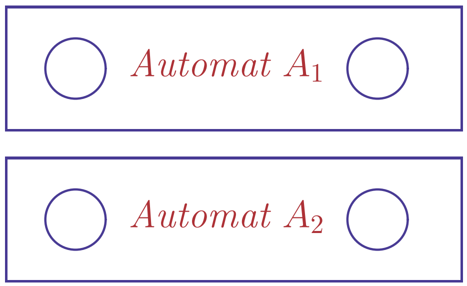
- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien $\boldsymbol{A_1}$ und $\boldsymbol{A_2}$ $\boldsymbol{\epsilon}$-NEAs für $\boldsymbol{E_1}$ und $\boldsymbol{E_2}$**

- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$

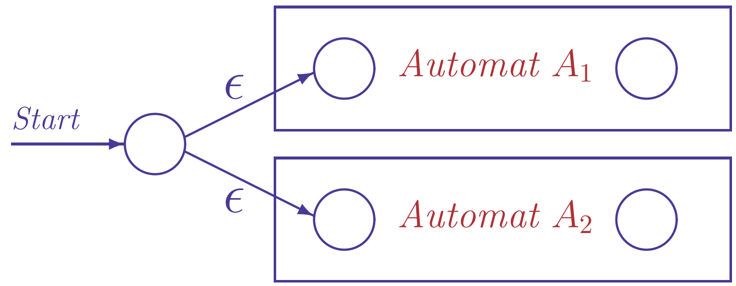


Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$

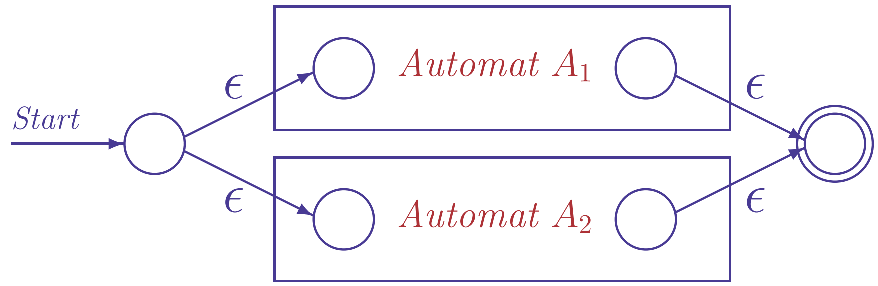


Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$

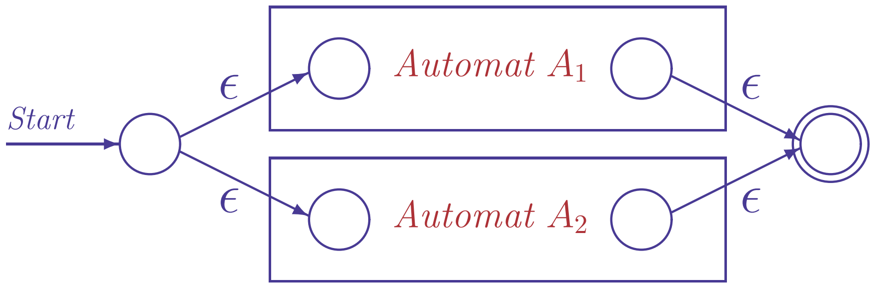


Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

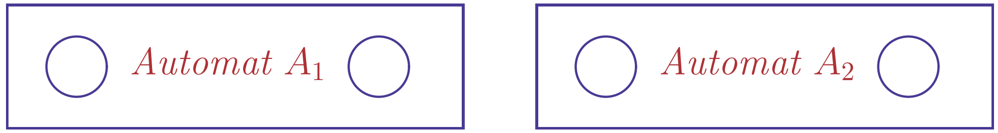
- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$



  – Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

$A =$

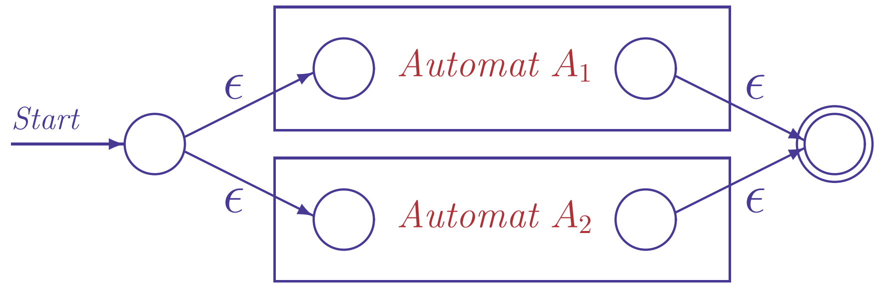


Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

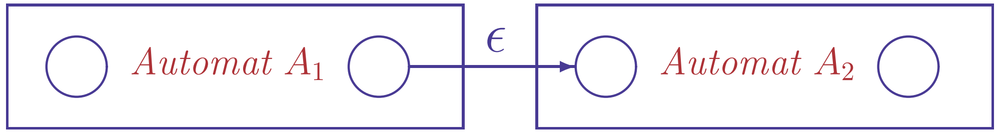
- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$



  – Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

$A =$

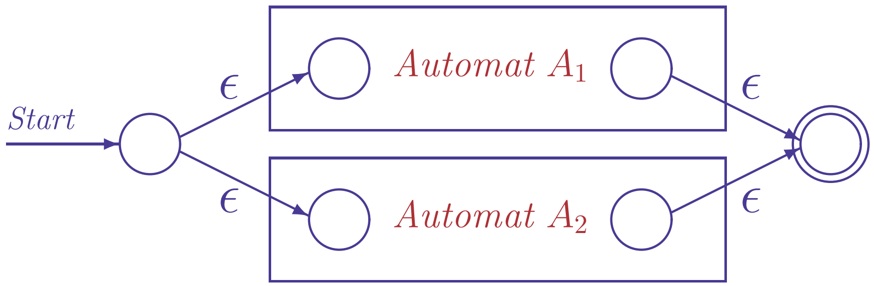


Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

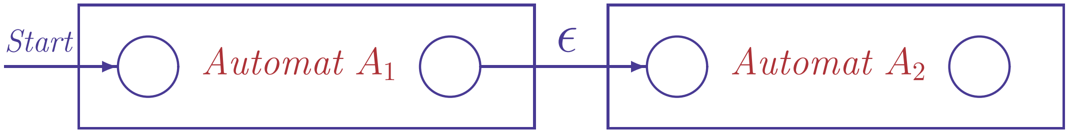
- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$



  – Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

$A =$

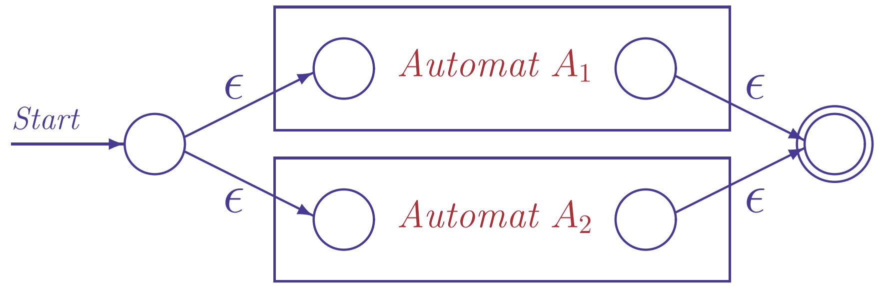


UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE IN AUTOMATEN

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

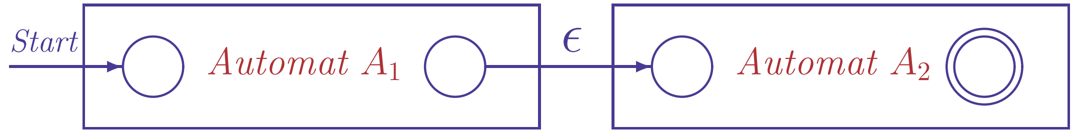
- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$



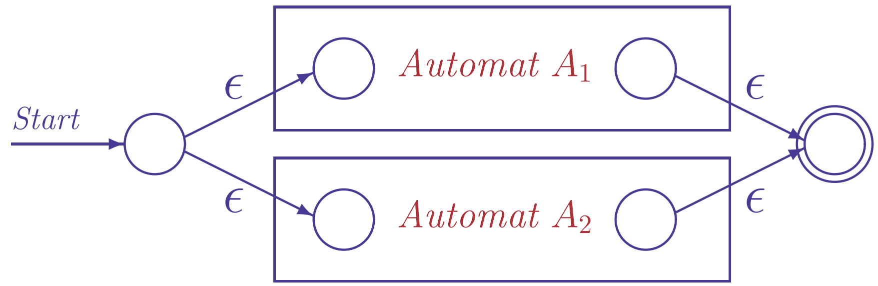
  – Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

$A =$



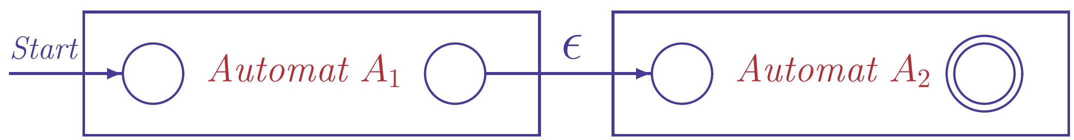
Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**
- **Induktionsschritt**
  - Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$

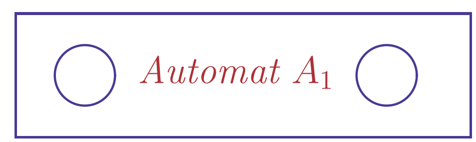


  - Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

$A =$



  - Für $E = E_1^*$ wähle $A =$

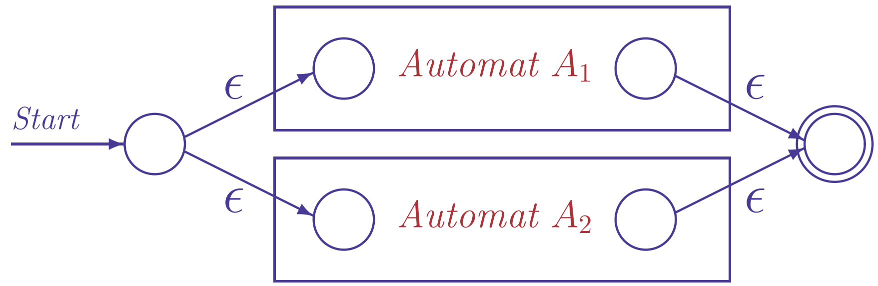


Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

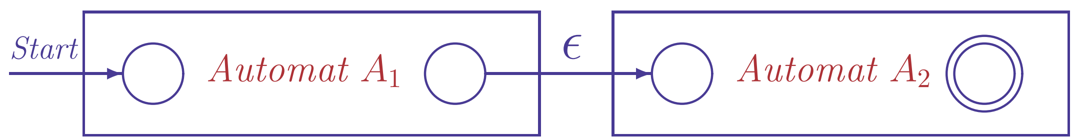
- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$

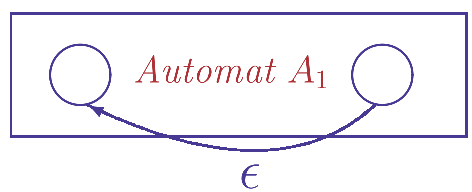


  – Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

$A =$



  – Für $E = E_1^*$ wähle $A =$

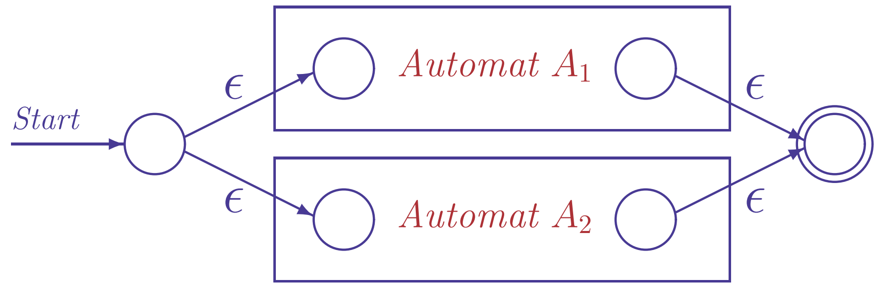


Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

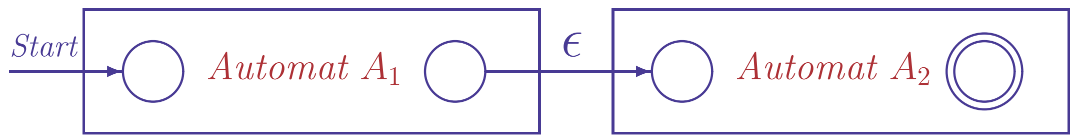
- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1{+}E_2$ wähle $A =$

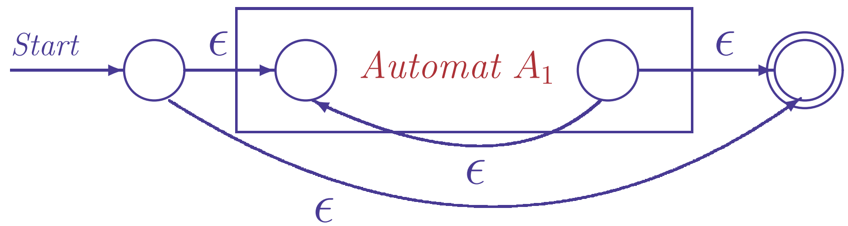


  – Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

$A =$



  – Für $E = E_1^*$ wähle $A =$

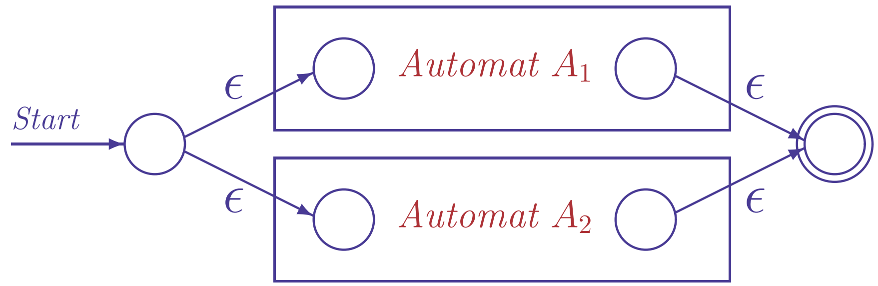


Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

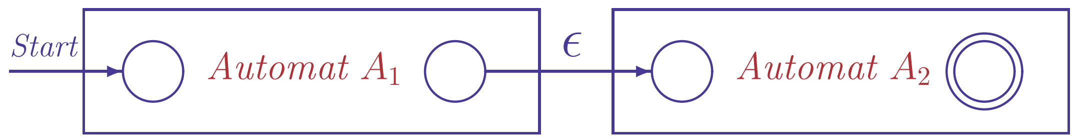
- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1+E_2$ wähle $A =$

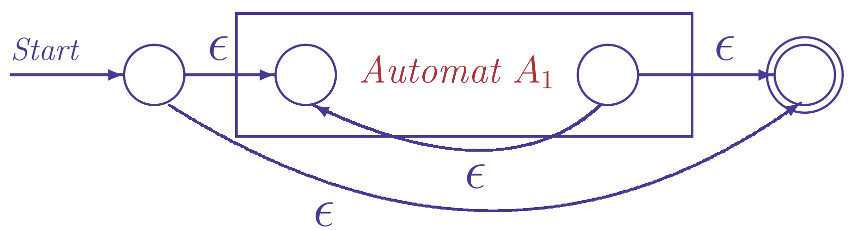


  – Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

  $A =$



  – Für $E = E_1^*$ wähle $A =$



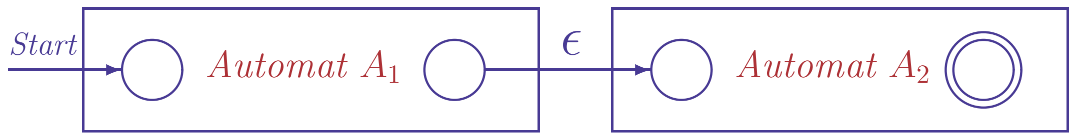
  – Für $E = (E_1)$ wähle $A = A_1$

Korrektheit der Umwandlungen

- **Klammern ändern nichts**
  - Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$

Korrektheit der Umwandlungen

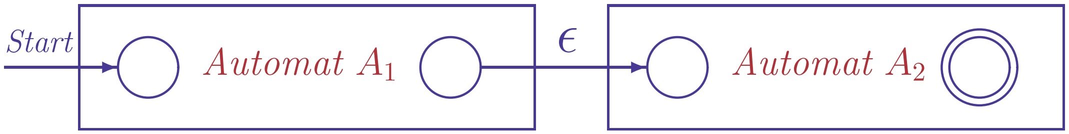
- **Klammern ändern nichts**
  - Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$
- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

Korrektheit der Umwandlungen

- **Klammern ändern nichts**
  - Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$
- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



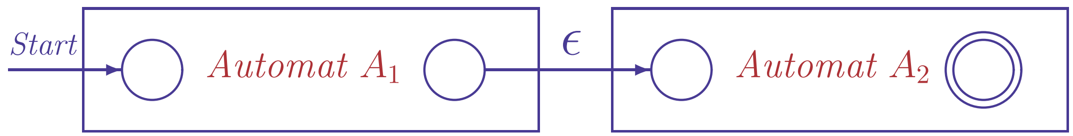
Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

$\Rightarrow\ w \in L(E_1) \circ L(E_2) = L(A_1) \circ L(A_2)$

Korrektheit der Umwandlungen

- **Klammern ändern nichts**
  – Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$

- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

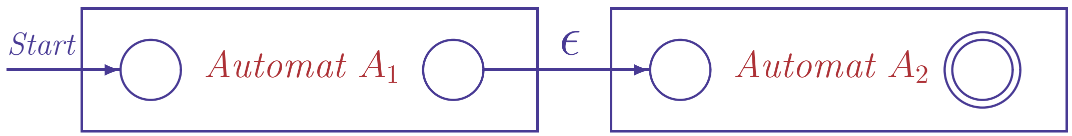
$\Rightarrow\ w \in L(E_1) \circ L(E_2) = L(A_1) \circ L(A_2)$

$\Rightarrow\ \exists u \in L(A_1). \exists v \in L(A_2). w = uv$

Korrektheit der Umwandlungen

- **Klammern ändern nichts**
  – Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$

- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



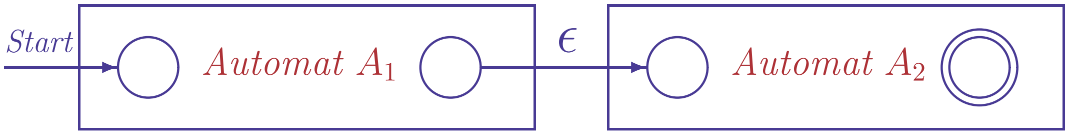
Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

$$\Rightarrow\ w \in L(E_1) \circ L(E_2) = L(A_1) \circ L(A_2)$$
$$\Rightarrow\ \exists u \in L(A_1). \exists v \in L(A_2). w = uv$$
$$\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{f,1} \in \hat{\delta}_1(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}_2(q_{0,2}, v)$$

Korrektheit der Umwandlungen

- **Klammern ändern nichts**
  - Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$

- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

$\Rightarrow\ w \in L(E_1) \circ L(E_2) = L(A_1) \circ L(A_2)$

$\Rightarrow\ \exists u \in L(A_1). \exists v \in L(A_2). w = uv$

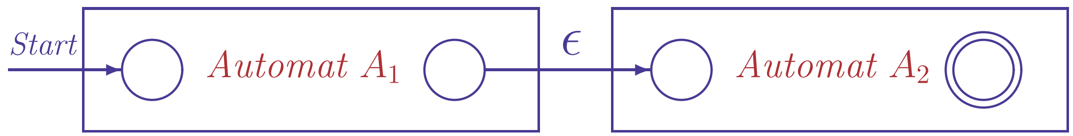
$\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{f,1} \in \hat{\delta}_1(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}_2(q_{0,2}, v)$

$\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{0,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,2}, v)$ $\quad (q_{0,2} \in \epsilon\text{-Hülle}(q_{f,1}))$

Korrektheit der Umwandlungen

- **Klammern ändern nichts**
  - Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$

- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

$$\Rightarrow\; w \in L(E_1) \circ L(E_2) = L(A_1) \circ L(A_2)$$

$$\Rightarrow\; \exists u \in L(A_1) . \exists v \in L(A_2) . w = uv$$

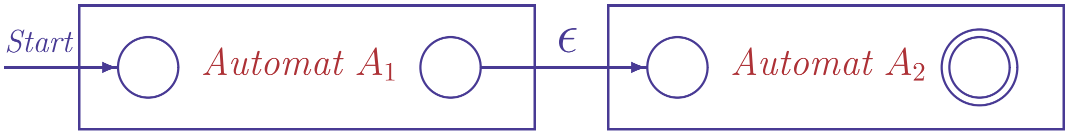
$$\Rightarrow\; \exists u, v \in \Sigma^* . w = uv \wedge q_{f,1} \in \hat{\delta}_1(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}_2(q_{0,2}, v)$$

$$\Rightarrow\; \exists u, v \in \Sigma^* . w = uv \wedge q_{0,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,2}, v) \qquad (q_{0,2} \in \epsilon\text{-Hülle}(q_{f,1}))$$

$$\Rightarrow\; q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, w) \qquad (\text{Definition } \hat{\delta})$$

Korrektheit der Umwandlungen

- **Klammern ändern nichts**
  - Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$
- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



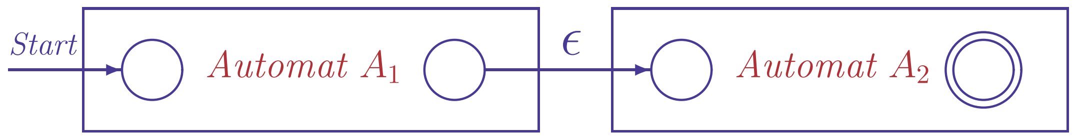
Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

$$\Rightarrow\ w \in L(E_1) \circ L(E_2) = L(A_1) \circ L(A_2)$$
$$\Rightarrow\ \exists u \in L(A_1). \exists v \in L(A_2). w = uv$$
$$\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{f,1} \in \hat{\delta}_1(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}_2(q_{0,2}, v)$$
$$\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{0,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,2}, v) \qquad (q_{0,2} \in \epsilon\text{-Hülle}(q_{f,1}))$$
$$\Rightarrow\ q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, w) \qquad (\text{Definition } \hat{\delta})$$
$$\Rightarrow\ w \in L(A)$$

Korrektheit der Umwandlungen

- **Klammern ändern nichts**
  – Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$

- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

$\Rightarrow\ w \in L(E_1) \circ L(E_2) = L(A_1) \circ L(A_2)$

$\Rightarrow\ \exists u \in L(A_1). \exists v \in L(A_2). w = uv$

$\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{f,1} \in \hat{\delta}_1(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}_2(q_{0,2}, v)$

$\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{0,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,2}, v)$ ($q_{0,2} \in \epsilon$-Hülle$(q_{f,1})$)

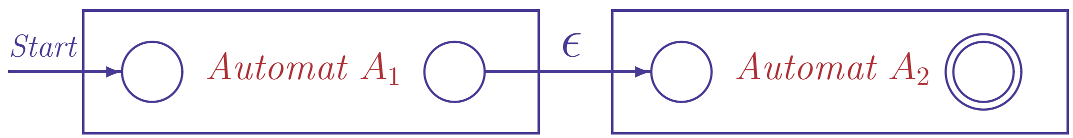
$\Rightarrow\ q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, w)$ (Definition $\hat{\delta}$)

$\Rightarrow\ w \in L(A)$

Argument ist umkehrbar, also $w \in L(A) \ \Rightarrow\ w \in L(E_1 \circ E_2)$

Korrektheit der Umwandlungen

- **Klammern ändern nichts**
  - Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$
- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ w \in L(E_1) \circ L(E_2) = L(A_1) \circ L(A_2)\\
&\Rightarrow\ \exists u \in L(A_1). \exists v \in L(A_2). w = uv\\
&\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{f,1} \in \hat{\delta}_1(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}_2(q_{0,2}, v)\\
&\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{0,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,2}, v) \qquad (q_{0,2} \in \epsilon\text{-Hülle}(q_{f,1}))\\
&\Rightarrow\ q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, w) \qquad (\text{Definition } \hat{\delta})\\
&\Rightarrow\ w \in L(A)
\end{aligned}
$$

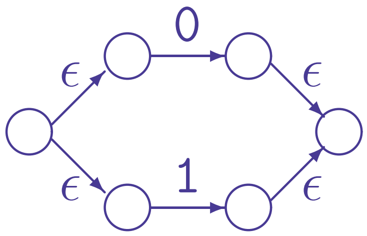
Argument ist umkehrbar, also $w \in L(A) \Rightarrow w \in L(E_1 \circ E_2)$

- **Sternbildung und Vereinigung ähnlich**

Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für (0+1)*1(0+1)

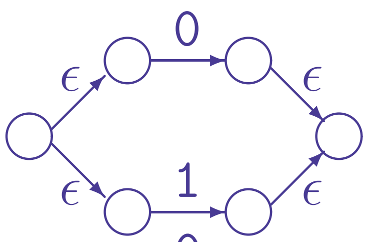
- **Teilautomat für** (0+1)



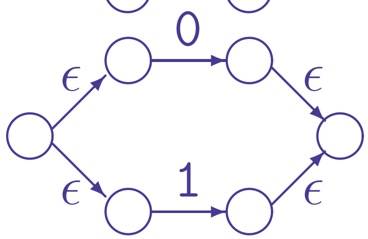
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für `(0+1)*1(0+1)`

- **Teilautomat für** `(0+1)`



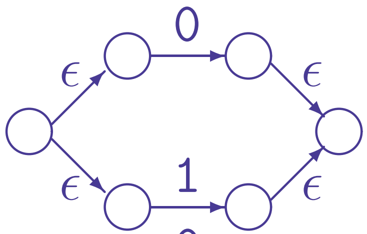
- **Teilautomat für** `(0+1)*`



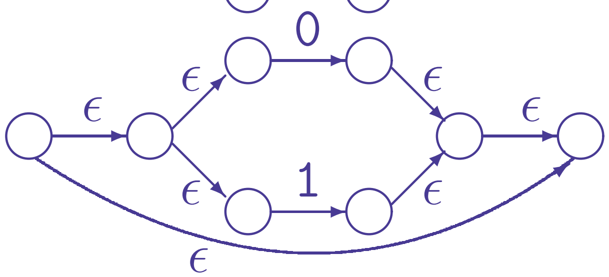
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für (0+1)*1(0+1)

- **Teilautomat für** (0+1)



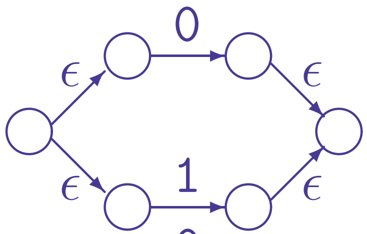
- **Teilautomat für** (0+1)*



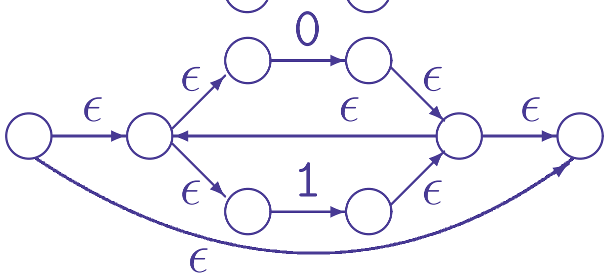
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für (0+1)*1(0+1)

- **Teilautomat für** (0+1)



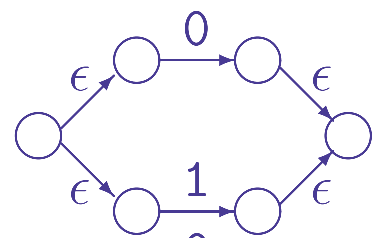
- **Teilautomat für** (0+1)*



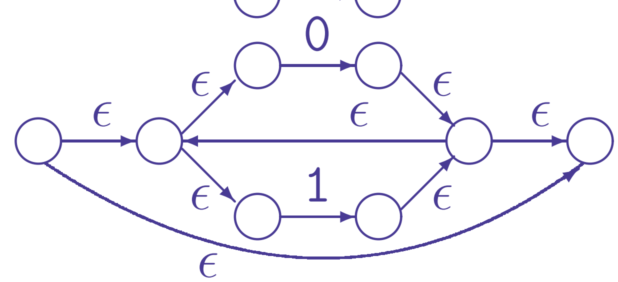
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für (0+1)*1(0+1)

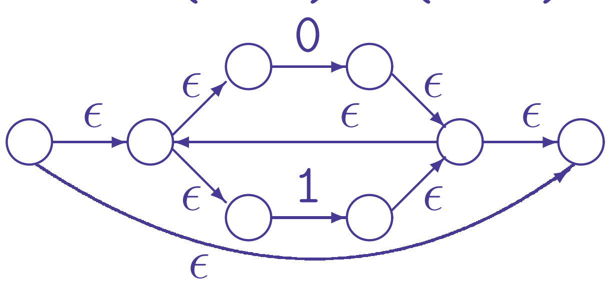
- **Teilautomat für** (0+1)



- **Teilautomat für** (0+1)*



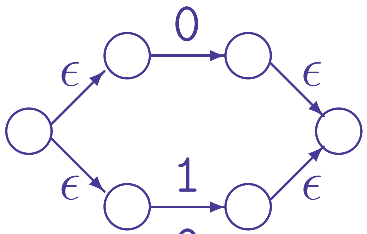
- **Automat für** (0+1)*1(0+1)



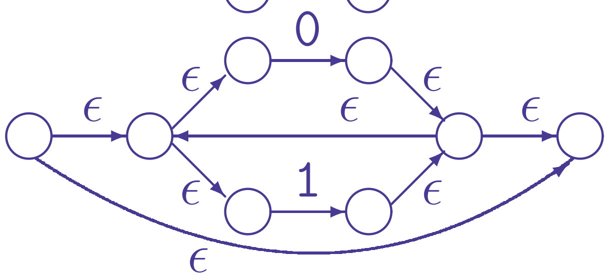
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für (0+1)*1(0+1)

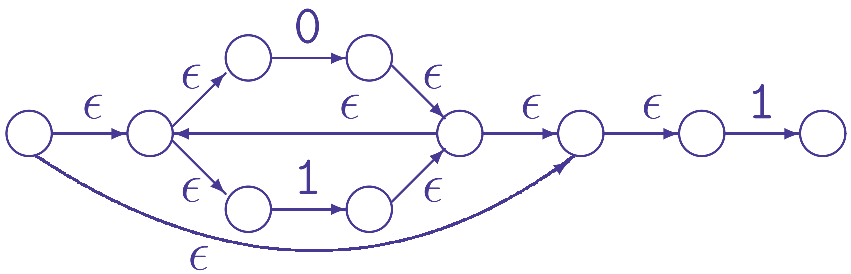
- **Teilautomat für** (0+1)



- **Teilautomat für** (0+1)*



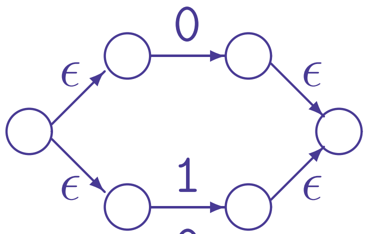
- **Automat für** (0+1)*1(0+1)



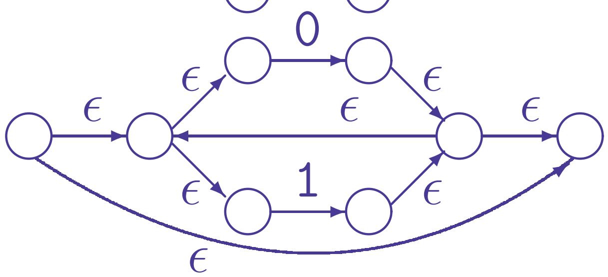
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für (0+1)*1(0+1)

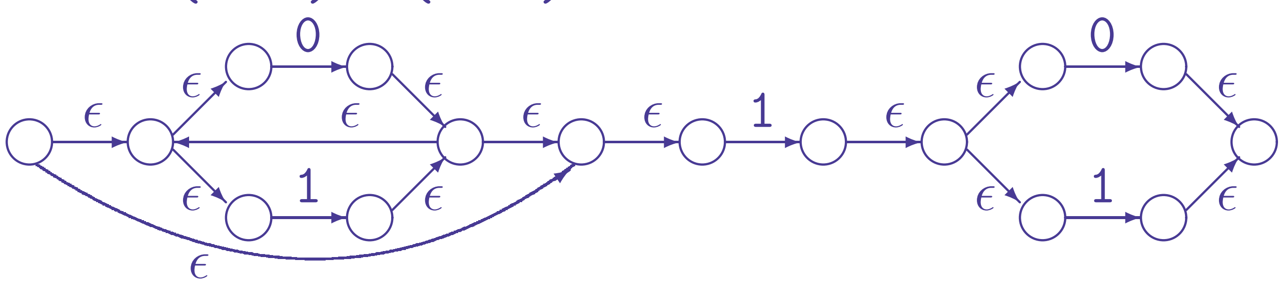
- **Teilautomat für** (0+1)



- **Teilautomat für** (0+1)*

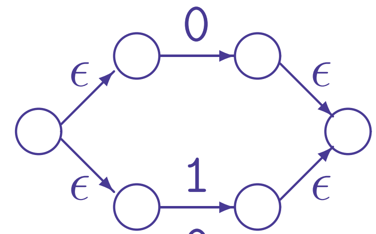


- **Automat für** (0+1)*1(0+1)

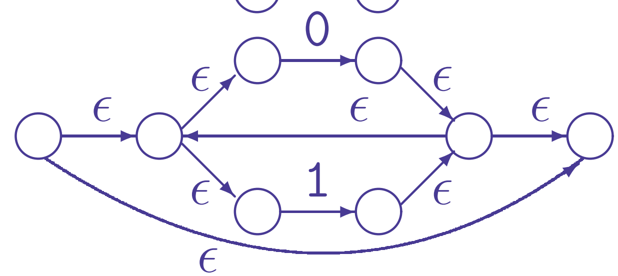


Konstruiere endlichen Automaten für `(0+1)*1(0+1)`

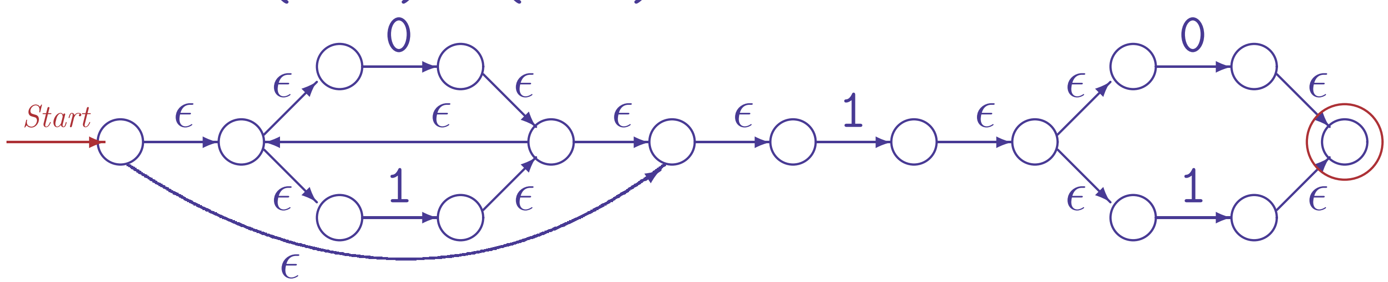
- **Teilautomat für** `(0+1)`



- **Teilautomat für** `(0+1)*`



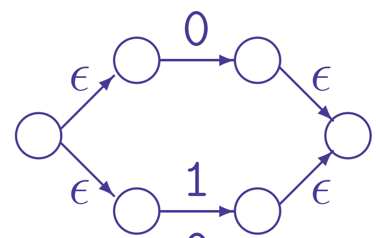
- **Automat für** `(0+1)*1(0+1)`



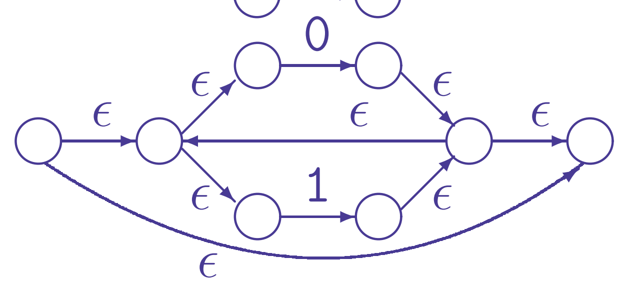
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für (0+1)*1(0+1)

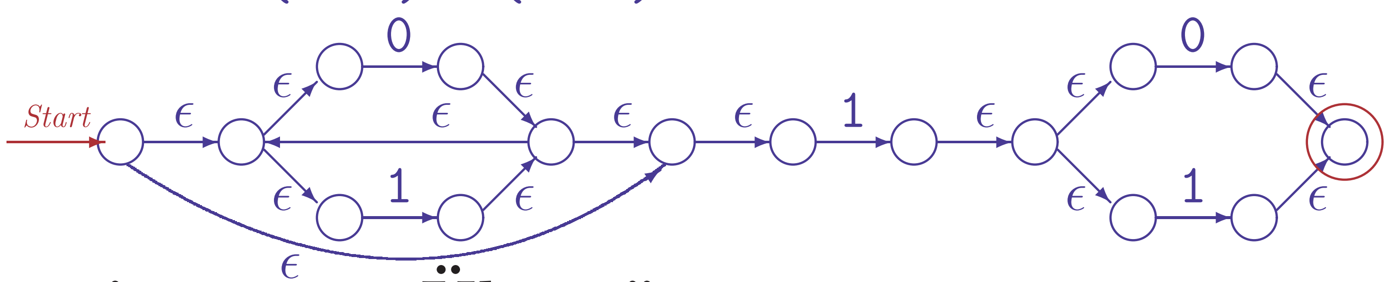
- **Teilautomat für** (0+1)



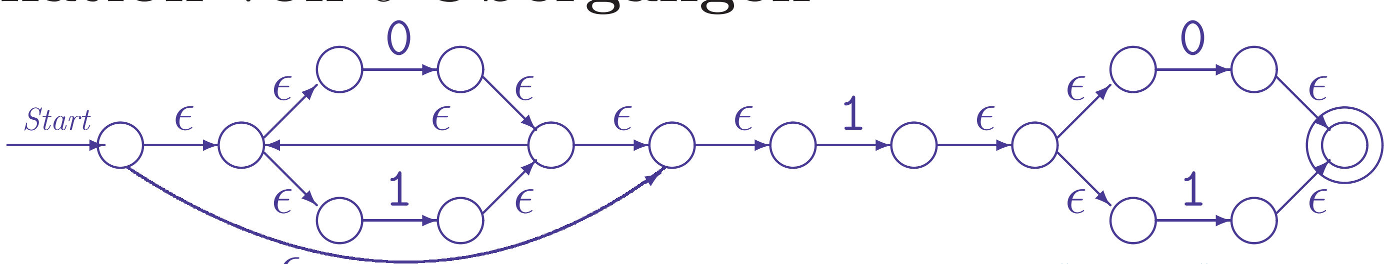
- **Teilautomat für** (0+1)*



- **Automat für** (0+1)*1(0+1)



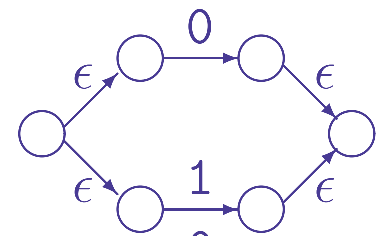
- **Elimination von ϵ-Übergängen**



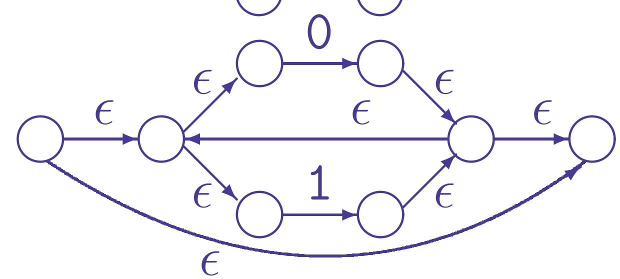
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für $(0+1)^*1(0+1)$

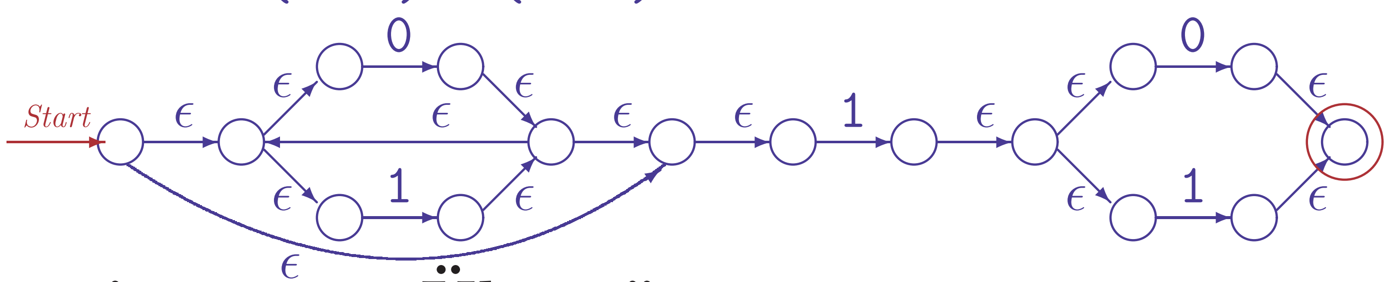
- **Teilautomat für** $(0+1)$



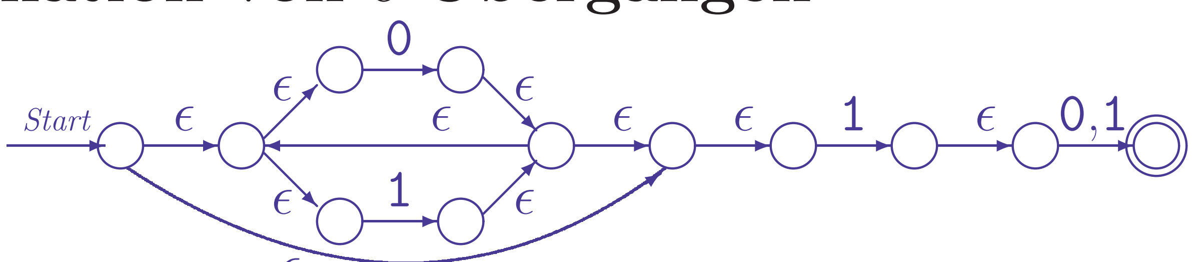
- **Teilautomat für** $(0+1)^*$



- **Automat für** $(0+1)^*1(0+1)$



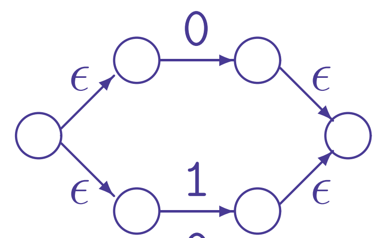
- **Elimination von ϵ-Übergängen**



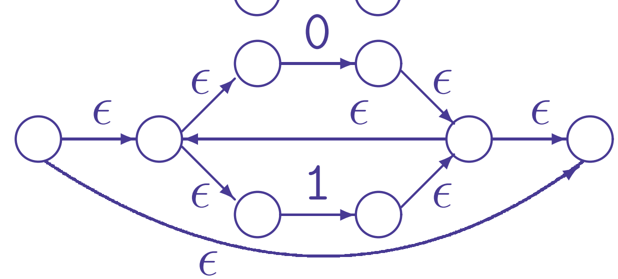
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für `(0+1)*1(0+1)`

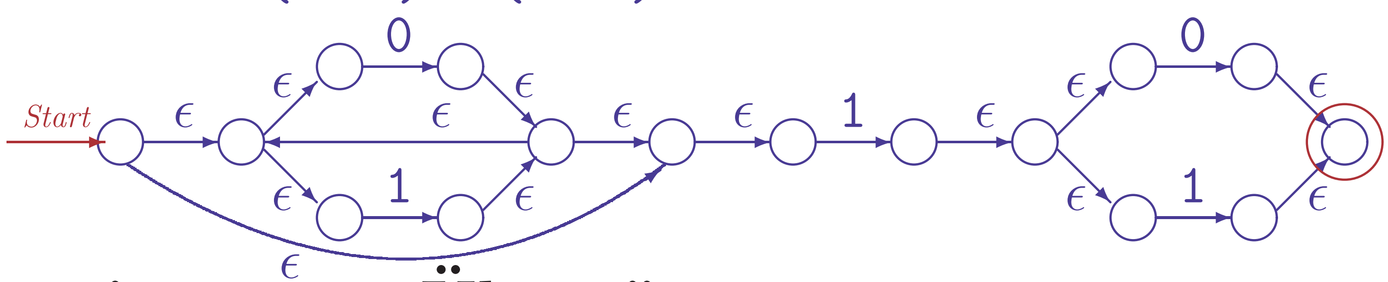
- **Teilautomat für** `(0+1)`



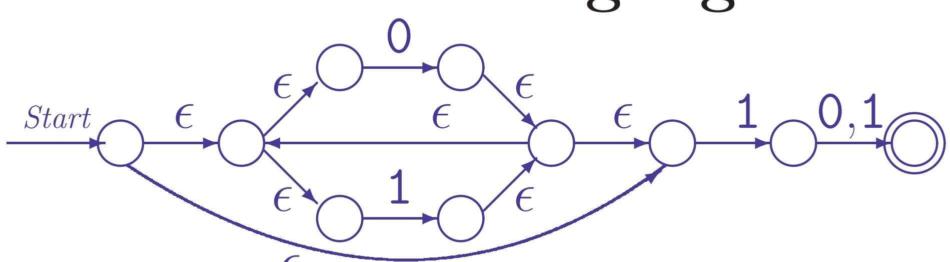
- **Teilautomat für** `(0+1)*`



- **Automat für** `(0+1)*1(0+1)`

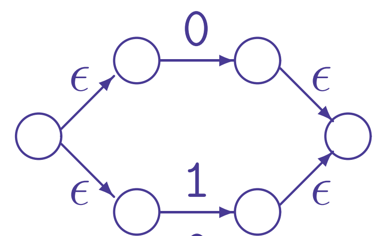


- **Elimination von ϵ-Übergängen**

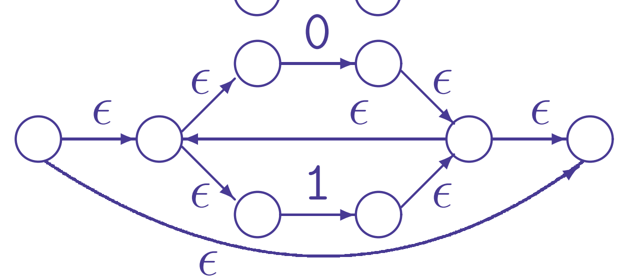


Konstruiere endlichen Automaten für (0+1)*1(0+1)

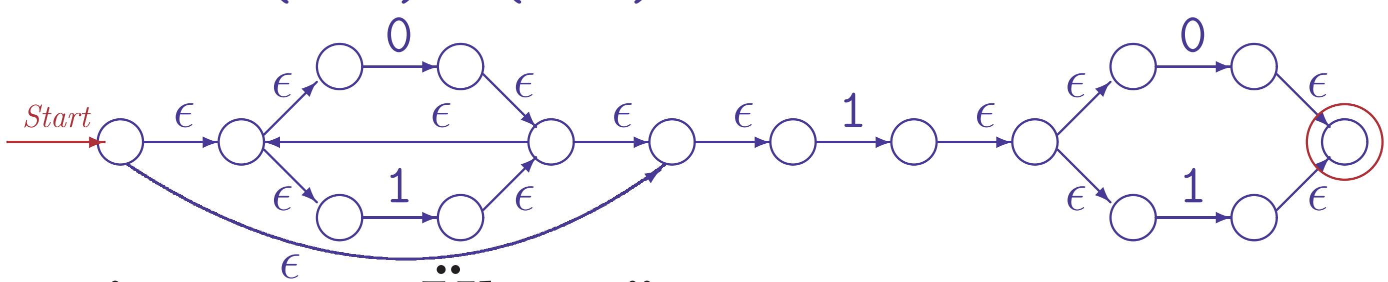
- **Teilautomat für** (0+1)



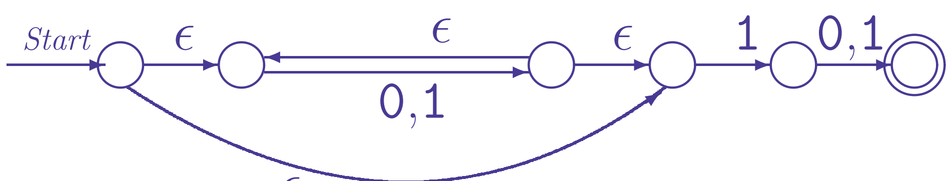
- **Teilautomat für** (0+1)*



- **Automat für** (0+1)*1(0+1)

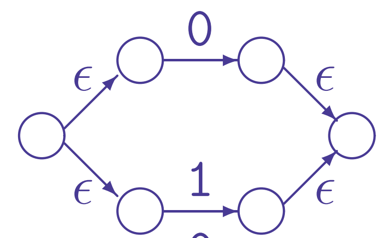


- **Elimination von ϵ-Übergängen**

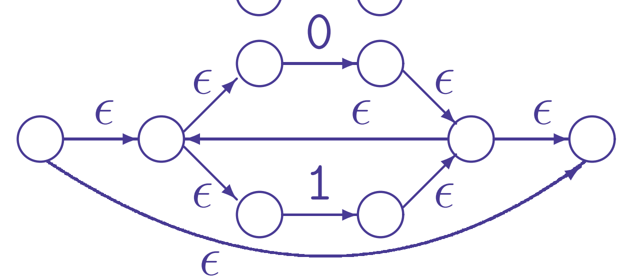


Konstruiere endlichen Automaten für `(0+1)*1(0+1)`

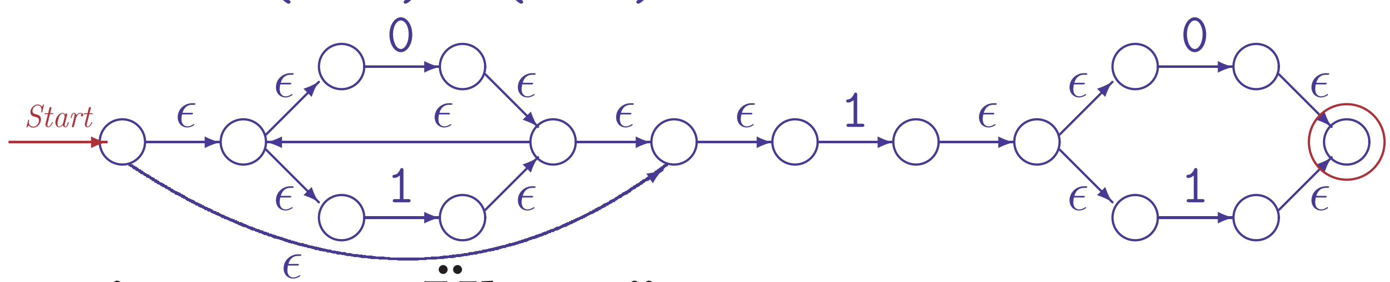
- **Teilautomat für** `(0+1)`



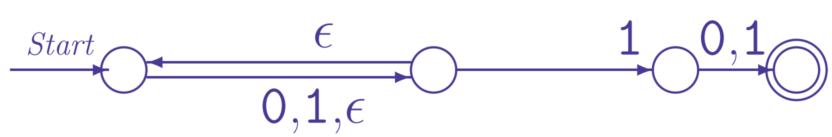
- **Teilautomat für** `(0+1)*`



- **Automat für** `(0+1)*1(0+1)`



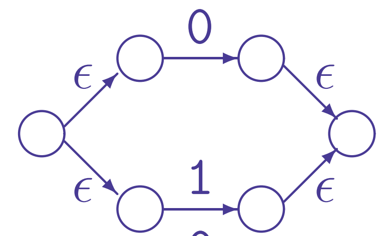
- **Elimination von ϵ-Übergängen**



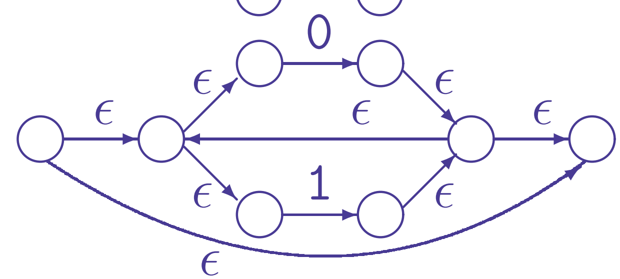
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für (0+1)*1(0+1)

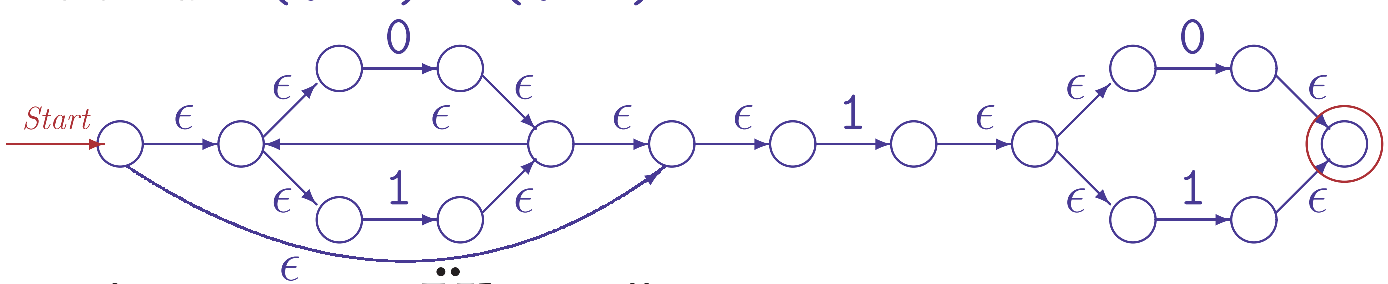
- **Teilautomat für** (0+1)



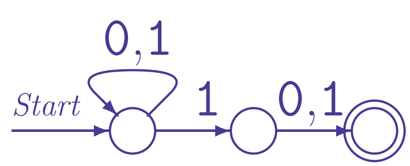
- **Teilautomat für** (0+1)*



- **Automat für** (0+1)*1(0+1)



- **Elimination von ϵ-Übergängen**



Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- **Gegeben DEA $A = (\{q_1, ..q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, ..q_{f_m}\})$**

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- **Gegeben DEA $A = (\{q_1, ..q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, ..q_{f_m}\})$**
- **Definiere Ausdrücke für Pfade durch A**
  - R_{ij}^k : Regulärer Ausdruck für Menge der Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$,
    so dass für alle $\epsilon{\neq}v{\sqsubseteq}w$ $(v{\neq}w)$ gilt: $\hat{\delta}(q_i, v){=}q_m \Rightarrow m{\leq}k$
    (Abarbeitung von w berührt keinen Zustand größer als k)

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- **Gegeben DEA** $\boldsymbol{A = (\{q_1, ..q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, ..q_{f_m}\})}$

- **Definiere Ausdrücke für Pfade durch** $\boldsymbol{A}$
  - $\boldsymbol{R_{ij}^k}$: Regulärer Ausdruck für Menge der Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$,
    so dass für alle $\epsilon{\neq}v{\sqsubseteq}w$ $(v{\neq}w)$ gilt: $\hat{\delta}(q_i, v){=}q_m \Rightarrow m{\leq}k$
    (Abarbeitung von w berührt keinen Zustand größer als k)

- **Setze die** $\boldsymbol{R_{ij}^k}$ **zu Ausdruck für** $\boldsymbol{L(A)}$ **zusammen**
  - Per Definition ist R_{ij}^n ein Ausdruck für Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- **Gegeben DEA** $\boldsymbol{A = (\{q_1, ..q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, ..q_{f_m}\})}$
- **Definiere Ausdrücke für Pfade durch** $\boldsymbol{A}$
  - $\boldsymbol{R_{ij}^k}$: Regulärer Ausdruck für Menge der Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$, so dass für alle $\epsilon{\neq}v{\sqsubseteq}w$ $(v{\neq}w)$ gilt: $\hat{\delta}(q_i, v){=}q_m \Rightarrow m{\leq}k$
    (Abarbeitung von w berührt keinen Zustand größer als k)
- **Setze die** $\boldsymbol{R_{ij}^k}$ **zu Ausdruck für** $\boldsymbol{L(A)}$ **zusammen**
  - Per Definition ist R_{ij}^n ein Ausdruck für Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$
  - Setze $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_{1f_1}^n + ... + R_{1f_m}^n}$

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- **Gegeben DEA $A = (\{q_1, ..q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, ..q_{f_m}\})$**
- **Definiere Ausdrücke für Pfade durch A**
  - R_{ij}^k : Regulärer Ausdruck für Menge der Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$,
    so dass für alle $\epsilon{\neq}v{\sqsubseteq}w$ $(v{\neq}w)$ gilt: $\hat{\delta}(q_i, v){=}q_m \Rightarrow m{\leq}k$
    (Abarbeitung von w berührt keinen Zustand größer als k)
- **Setze die R_{ij}^k zu Ausdruck für $L(A)$ zusammen**
  - Per Definition ist R_{ij}^n ein Ausdruck für Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$
  - Setze $R = R_{1f_1}^n + ... + R_{1f_m}^n$
  - Dann gilt $L(R) = \bigcup_{j=1}^m \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_1, w) = q_{f_j}\}$

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- **Gegeben DEA $A = (\{q_1, ..q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, ..q_{f_m}\})$**
- **Definiere Ausdrücke für Pfade durch A**
  - R_{ij}^k : Regulärer Ausdruck für Menge der Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$,
    so dass für alle $\epsilon{\neq}v{\sqsubseteq}w$ $(v{\neq}w)$ gilt: $\hat{\delta}(q_i, v){=}q_m \;\Rightarrow\; m{\leq}k$
    (Abarbeitung von w berührt keinen Zustand größer als k)
- **Setze die R_{ij}^k zu Ausdruck für $L(A)$ zusammen**
  - Per Definition ist R_{ij}^n ein Ausdruck für Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$
  - Setze $R = R_{1f_1}^n + ... + R_{1f_m}^n$
  - Dann gilt $L(R) = \bigcup_{j=1}^m \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_1, w) = q_{f_j}\}$
    $= \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in \{q_{f_1}, .., q_{f_m}\}.\; \hat{\delta}(q_1, w) = q\}$

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- **Gegeben DEA $A = (\{q_1, ..q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, ..q_{f_m}\})$**

- **Definiere Ausdrücke für Pfade durch A**
  - R_{ij}^k : Regulärer Ausdruck für Menge der Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$,
    so dass für alle $\epsilon{\neq}v{\sqsubseteq}w$ $(v{\neq}w)$ gilt: $\hat{\delta}(q_i, v){=}q_m \Rightarrow m{\leq}k$
    (Abarbeitung von w berührt keinen Zustand größer als k)

- **Setze die R_{ij}^k zu Ausdruck für $L(A)$ zusammen**
  - Per Definition ist R_{ij}^n ein Ausdruck für Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$
  - Setze $R = R_{1f_1}^n + ... + R_{1f_m}^n$
  - Dann gilt $L(R) = \bigcup_{j=1}^m \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_1, w) = q_{f_j}\}$
    $= \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in \{q_{f_1}, .., q_{f_m}\}.\ \hat{\delta}(q_1, w) = q\} = L(A)$

ITERATIVE BESTIMMUNG DER AUSDRÜCKE R_{ij}^k

- **Basisfall $\boldsymbol{R_{ij}^0}$:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren

Iterative Bestimmung der Ausdrücke R_{ij}^k

- **Basisfall R_{ij}^0:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$

Iterative Bestimmung der Ausdrücke R_{ij}^k

- **Basisfall $\boldsymbol{R_{ij}^0}$:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$

Iterative Bestimmung der Ausdrücke R_{ij}^k

- **Basisfall R_{ij}^0:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$
  - Ergebnis: $R_{ii}^0 = \epsilon + \mathtt{a}_1 + .. + \mathtt{a}_k$, wobei $\{a_1, .., a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a){=}q_j\}$

    $R_{ij}^0 = \emptyset + \mathtt{a}_1 + .. + \mathtt{a}_k \quad (i{\neq}j)$

ITERATIVE BESTIMMUNG DER AUSDRÜCKE R_{ij}^k

- **Basisfall $\boldsymbol{R_{ij}^0}$:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$
  - Ergebnis: $\boldsymbol{R_{ii}^0} = \epsilon + \mathtt{a}_1 + \mathtt{..} + \mathtt{a}_k$, wobei $\{a_1, .., a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a){=}q_j\}$

    $\boldsymbol{R_{ij}^0} = \emptyset + \mathtt{a}_1 + \mathtt{..} + \mathtt{a}_k$ $(i{\neq}j)$

- **Schrittfall $\boldsymbol{R_{ij}^k}$** $(0{<}k{\leq}n)$: zwei Alternativen

ITERATIVE BESTIMMUNG DER AUSDRÜCKE R^k_{ij}

- **Basisfall $\boldsymbol{R^0_{ij}}$:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R^0_{ii})$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R^0_{ij})$
  - Ergebnis: $\boldsymbol{R^0_{ii}} = \epsilon + \mathtt{a}_1 + \ldots + \mathtt{a}_k$, wobei $\{a_1, .., a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a){=}q_j\}$

    $\boldsymbol{R^0_{ij}} = \emptyset + \mathtt{a}_1 + \ldots + \mathtt{a}_k$ $(i{\neq}j)$

- **Schrittfall $\boldsymbol{R^k_{ij}}$** $(0{<}k{\leq}n)$: zwei Alternativen
  - Wörter $w \in L(R^k_{ij})$, deren Pfad q_k nicht enthält, gehören zu $L(\boldsymbol{R^{k-1}_{ij}})$

Iterative Bestimmung der Ausdrücke R_{ij}^k

- **Basisfall R_{ij}^0:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$
  - Ergebnis: $R_{ii}^0 = \epsilon + \mathtt{a}_1 + \mathtt{..} + \mathtt{a}_k$, wobei $\{a_1, .., a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a){=}q_j\}$

    $R_{ij}^0 = \emptyset + \mathtt{a}_1 + \mathtt{..} + \mathtt{a}_k$ $(i{\neq}j)$

- **Schrittfall R_{ij}^k** $(0{<}k{\leq}n)$: zwei Alternativen
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k nicht enthält, gehören zu $L(R_{ij}^{k-1})$
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k enthält:

    Zerlege w in $uz_1..z_pv$ mit $\hat{\delta}(q_i, u){=}q_k \wedge \forall l{\leq}p. \hat{\delta}(q_k, z_l){=}q_k \wedge \hat{\delta}(q_k, v){=}q_j$

Iterative Bestimmung der Ausdrücke R_{ij}^k

- **Basisfall $\boldsymbol{R_{ij}^0}$:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$
  - Ergebnis: $\boldsymbol{R_{ii}^0} = \epsilon + \mathtt{a}_1 + \mathtt{..} + \mathtt{a}_k$, wobei $\{a_1, .., a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a){=}q_j\}$

    $\boldsymbol{R_{ij}^0} = \emptyset + \mathtt{a}_1 + \mathtt{..} + \mathtt{a}_k$ $(i{\neq}j)$

- **Schrittfall $\boldsymbol{R_{ij}^k}$** $(0{<}k{\leq}n)$: zwei Alternativen
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k nicht enthält, gehören zu $L(\boldsymbol{R_{ij}^{k-1}})$
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k enthält:

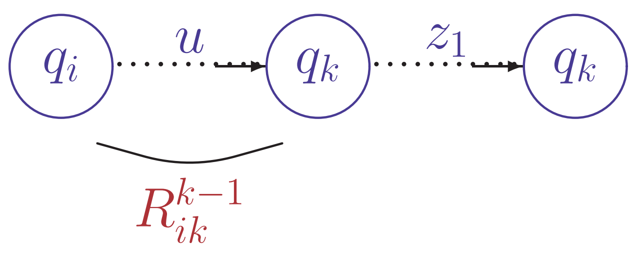
    Zerlege w in $uz_1..z_pv$ mit $\hat{\delta}(q_i, u){=}q_k \wedge \forall l{\leq}p.\hat{\delta}(q_k, z_l){=}q_k \wedge \hat{\delta}(q_k, v){=}q_j$

$$\underbrace{q_i \xrightarrow{u} q_k}_{R_{ik}^{k-1}}$$

Iterative Bestimmung der Ausdrücke R_{ij}^k

- **Basisfall $\boldsymbol{R_{ij}^0}$:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$
  - Ergebnis: $\boldsymbol{R_{ii}^0} = \epsilon + \mathtt{a}_1 + \ldots + \mathtt{a}_k$, wobei $\{a_1, .., a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) {=} q_j\}$
    $\boldsymbol{R_{ij}^0} = \emptyset + \mathtt{a}_1 + \ldots + \mathtt{a}_k$ $(i{\neq}j)$

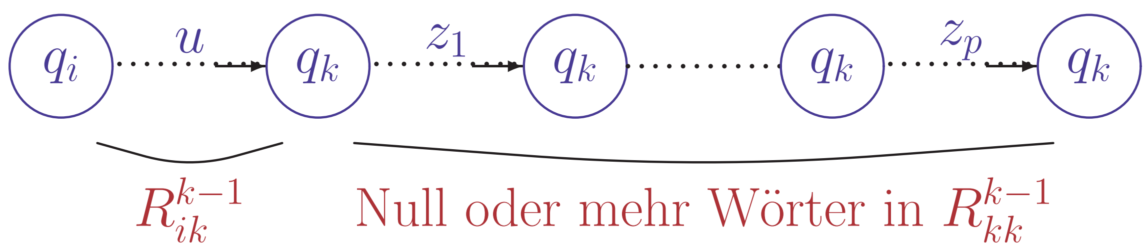
- **Schrittfall $\boldsymbol{R_{ij}^k}$** $(0{<}k{\leq}n)$: zwei Alternativen
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k nicht enthält, gehören zu $L(\boldsymbol{R_{ij}^{k-1}})$
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k enthält:
    Zerlege w in $uz_1..z_pv$ mit $\hat{\delta}(q_i, u){=}q_k \wedge \forall l{\leq}p.\hat{\delta}(q_k, z_l){=}q_k \wedge \hat{\delta}(q_k, v){=}q_j$



Iterative Bestimmung der Ausdrücke R_{ij}^k

- **Basisfall $\boldsymbol{R_{ij}^0}$:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$
  - Ergebnis: $\boldsymbol{R_{ii}^0} = \epsilon + \mathtt{a}_1 + \ldots + \mathtt{a}_k$, wobei $\{a_1, .., a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a){=}q_j\}$
    $\boldsymbol{R_{ij}^0} = \emptyset + \mathtt{a}_1 + \ldots + \mathtt{a}_k$ $(i{\neq}j)$

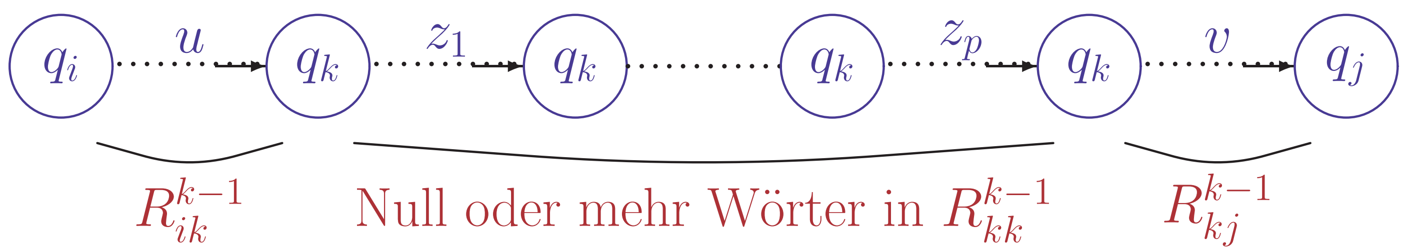
- **Schrittfall $\boldsymbol{R_{ij}^k}$** $(0{<}k{\leq}n)$: zwei Alternativen
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k nicht enthält, gehören zu $L(\boldsymbol{R_{ij}^{k-1}})$
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k enthält:
    Zerlege w in $uz_1..z_pv$ mit $\hat\delta(q_i, u){=}q_k \wedge \forall l{\leq}p.\hat\delta(q_k, z_l){=}q_k \wedge \hat\delta(q_k, v){=}q_j$



Iterative Bestimmung der Ausdrücke R_{ij}^k

- **Basisfall R_{ij}^0:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$
  - Ergebnis: $\boldsymbol{R_{ii}^0} = \epsilon + \mathtt{a}_1 + \mathtt{..} + \mathtt{a}_k$, wobei $\{a_1, .., a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) {=} q_j\}$
    $\boldsymbol{R_{ij}^0} = \emptyset + \mathtt{a}_1 + \mathtt{..} + \mathtt{a}_k$ $(i{\neq}j)$

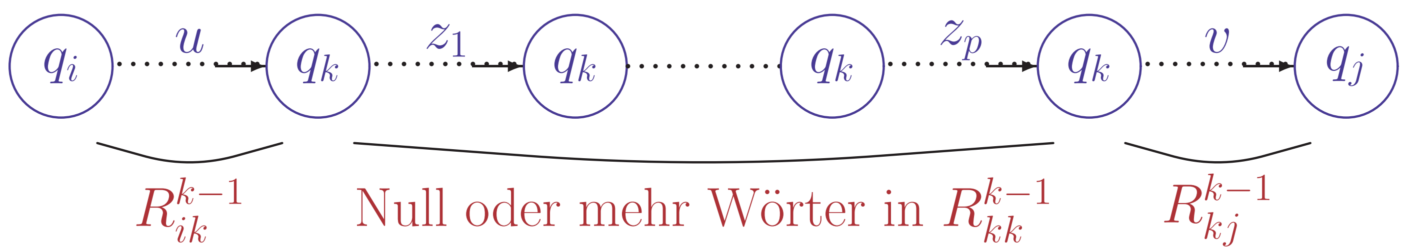
- **Schrittfall R_{ij}^k** $(0{<}k{\leq}n)$: zwei Alternativen
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k nicht enthält, gehören zu $L(\boldsymbol{R_{ij}^{k-1}})$
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k enthält:
    Zerlege w in $uz_1..z_pv$ mit $\hat{\delta}(q_i, u){=}q_k \wedge \forall l{\leq}p.\hat{\delta}(q_k, z_l){=}q_k \wedge \hat{\delta}(q_k, v){=}q_j$



Iterative Bestimmung der Ausdrücke R_{ij}^k

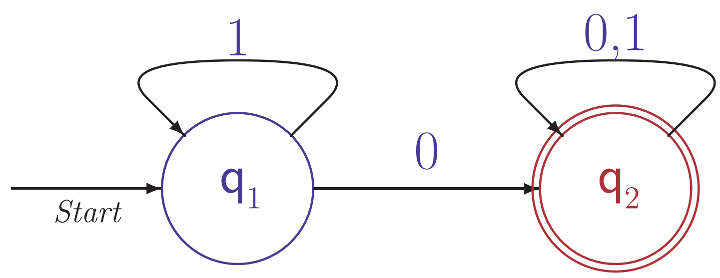
- **Basisfall R_{ij}^0:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$
  - Ergebnis: $\boldsymbol{R_{ii}^0} = \epsilon + \mathtt{a}_1 + \ldots + \mathtt{a}_k$, wobei $\{a_1, .., a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a){=}q_j\}$
    $\boldsymbol{R_{ij}^0} = \emptyset + \mathtt{a}_1 + \ldots + \mathtt{a}_k$ $(i{\neq}j)$

- **Schrittfall R_{ij}^k** $(0{<}k{\leq}n)$: zwei Alternativen
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k nicht enthält, gehören zu $L(\boldsymbol{R_{ij}^{k-1}})$
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k enthält:
    Zerlege w in $uz_1..z_pv$ mit $\hat{\delta}(q_i, u){=}q_k \wedge \forall l{\leq}p.\hat{\delta}(q_k, z_l){=}q_k \wedge \hat{\delta}(q_k, v){=}q_j$



  - Ergebnis: $\boldsymbol{R_{ij}^k} = \boldsymbol{R_{ij}^{k-1}} + \boldsymbol{R_{ik}^{k-1}} \circ (\boldsymbol{R_{kk}^{k-1}})^* \circ \boldsymbol{R_{kj}^{k-1}}$

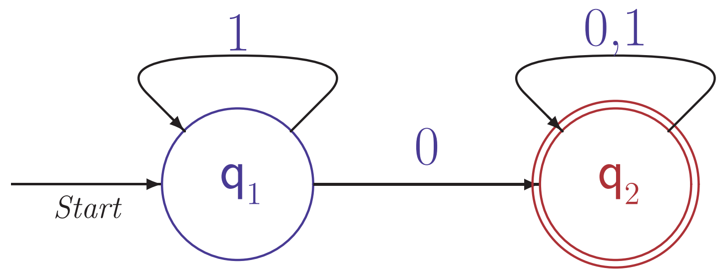
Umwandlung von Automaten am Beispiel



Umwandlung von Automaten am Beispiel

- **Basisfall**

  $R_{11}^{0} = \epsilon\ \texttt{+}\ \texttt{1}$

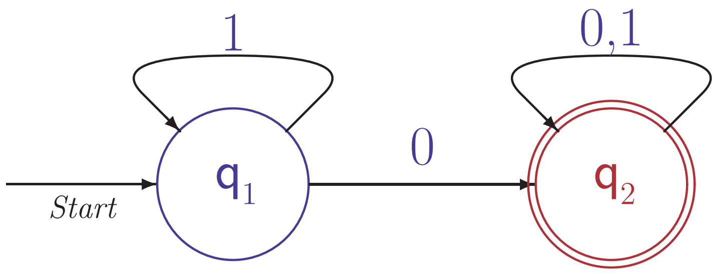


Umwandlung von Automaten am Beispiel

- **Basisfall**

  $R_{11}^{0} = \epsilon + \mathtt{1}$

  $R_{12}^{0} = \mathtt{0}$



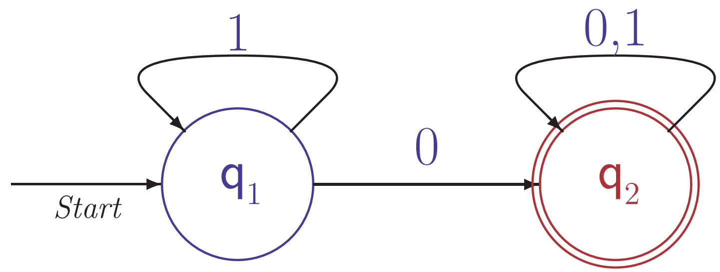
Umwandlung von Automaten am Beispiel

- **Basisfall**

  $R_{11}^{0} = \epsilon + \mathtt{1}$

  $R_{12}^{0} = \mathtt{0}$

  $R_{21}^{0} = \emptyset$



Umwandlung von Automaten am Beispiel

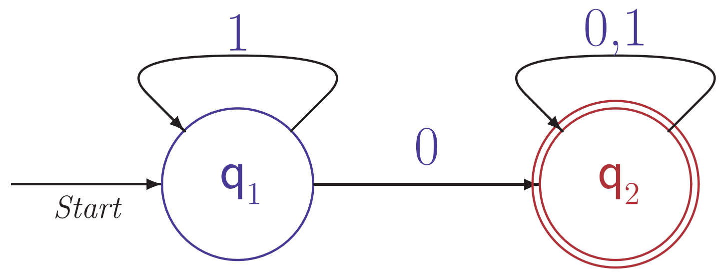
- **Basisfall**

$R_{11}^{0} = \epsilon + \mathtt{1}$

$R_{12}^{0} = \mathtt{0}$

$R_{21}^{0} = \emptyset$

$R_{22}^{0} = \epsilon + \mathtt{0} + \mathtt{1}$



Umwandlung von Automaten am Beispiel

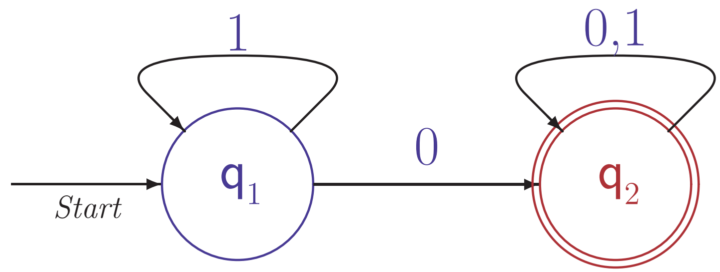
- **Basisfall**

  $R^0_{11} = \epsilon + 1$

  $R^0_{12} = 0$

  $R^0_{21} = \emptyset$

  $R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

  $R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1)$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

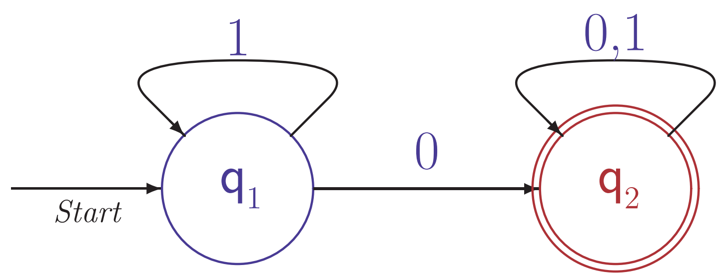
- **Basisfall**

  $R_{11}^{0} = \epsilon \texttt{ + 1}$

  $R_{12}^{0} = \texttt{0}$

  $R_{21}^{0} = \emptyset$

  $R_{22}^{0} = \epsilon \texttt{ + 0 + 1}$



- **Stufe 1**

  $R_{11}^{1} = R_{11}^{0} + R_{11}^{0}(R_{11}^{0})^{*}R_{11}^{0} = \epsilon\texttt{+1+(}\epsilon\texttt{+1)(}\epsilon\texttt{+1)}^{*}\texttt{(}\epsilon\texttt{+1)}$

  $R_{12}^{1} = R_{12}^{0} + R_{11}^{0}(R_{11}^{0})^{*}R_{12}^{0} = \texttt{0+(}\epsilon\texttt{+1)(}\epsilon\texttt{+1)}^{*}\texttt{0}$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

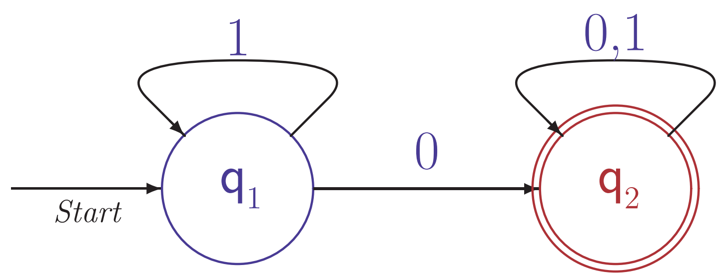
- **Basisfall**

  $R^0_{11} = \epsilon + 1$

  $R^0_{12} = 0$

  $R^0_{21} = \emptyset$

  $R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

  $R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1)$

  $R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0$

  $R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1)$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

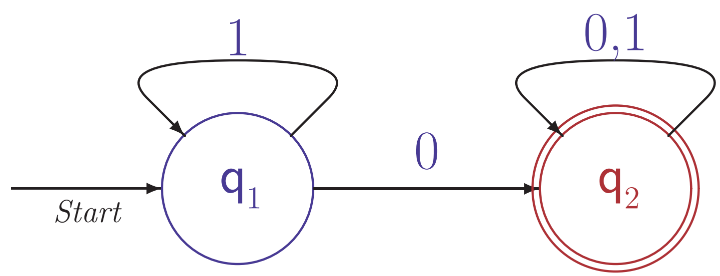
- **Basisfall**

  $R_{11}^0 = \epsilon + 1$

  $R_{12}^0 = 0$

  $R_{21}^0 = \emptyset$

  $R_{22}^0 = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

  $R_{11}^1 = R_{11}^0 + R_{11}^0(R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1)$

  $R_{12}^1 = R_{12}^0 + R_{11}^0(R_{11}^0)^* R_{12}^0 = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0$

  $R_{21}^1 = R_{21}^0 + R_{21}^0(R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1)$

  $R_{22}^1 = R_{22}^0 + R_{21}^0(R_{11}^0)^* R_{12}^0 = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

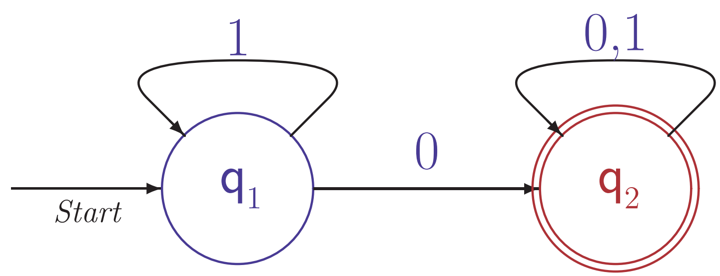
- **Basisfall**

$R_{11}^0 = \epsilon + 1$

$R_{12}^0 = 0$

$R_{21}^0 = \emptyset$

$R_{22}^0 = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$$R_{11}^1 = R_{11}^0 + R_{11}^0(R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$$

$$R_{12}^1 = R_{12}^0 + R_{11}^0(R_{11}^0)^* R_{12}^0 = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0$$

$$R_{21}^1 = R_{21}^0 + R_{21}^0(R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1)$$

$$R_{22}^1 = R_{22}^0 + R_{21}^0(R_{11}^0)^* R_{12}^0 = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0$$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

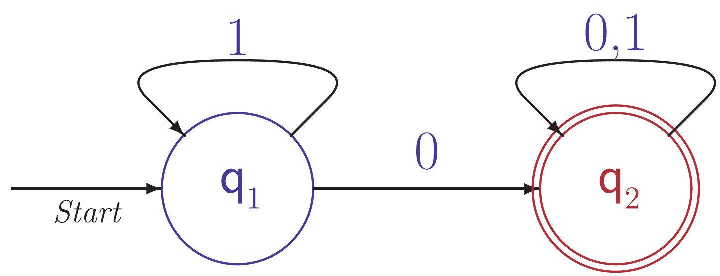
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$$

$$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$$

$$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1)$$

$$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0$$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

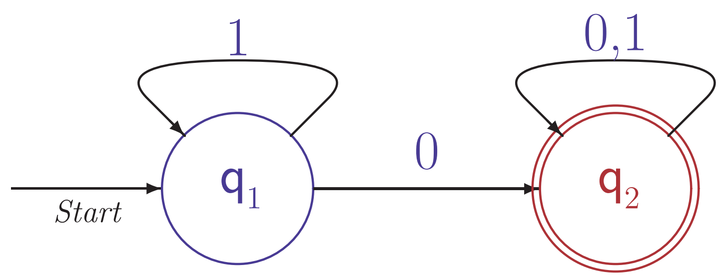
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$

$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

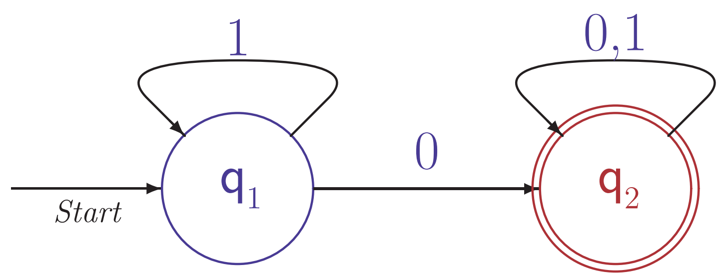
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$

$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

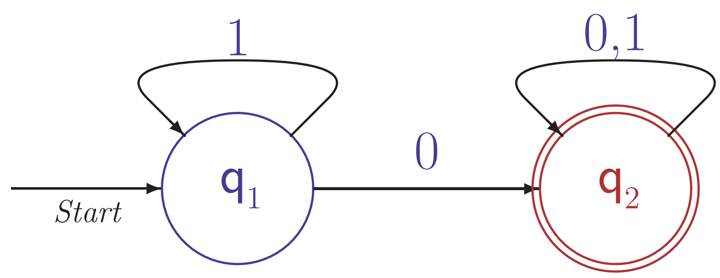
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$

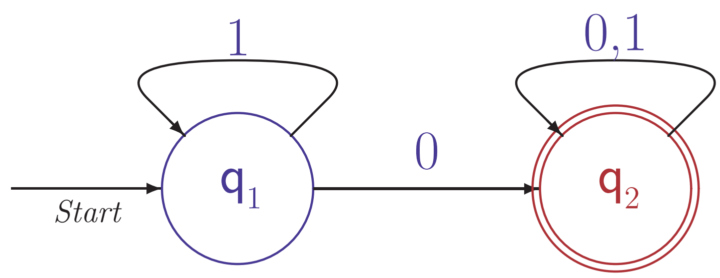
$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$

- **Stufe 2**

$R^2_{11} = R^1_{11} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{21} = 1^* + 1^* 0(\epsilon+0+1)^* \emptyset$

Umwandlung von Automaten am Beispiel



- **Basisfall**

$$R^0_{11} = \epsilon + 1$$
$$R^0_{12} = 0$$
$$R^0_{21} = \emptyset$$
$$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$$

- **Stufe 1**

$$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$$
$$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$$
$$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$$
$$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$$

- **Stufe 2**

$$R^2_{11} = R^1_{11} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{21} = 1^* + 1^* 0(\epsilon+0+1)^* \emptyset$$
$$R^2_{12} = R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} = 1^* 0 + 1^* 0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

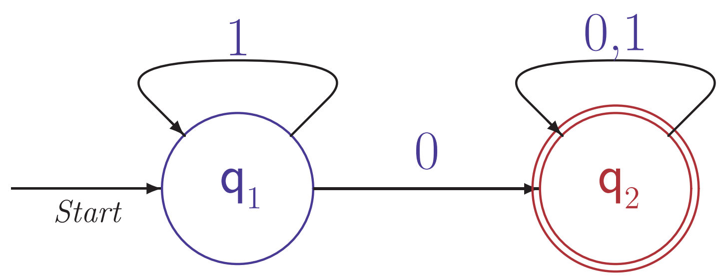
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$$

$$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$$

$$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$$

$$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$$

- **Stufe 2**

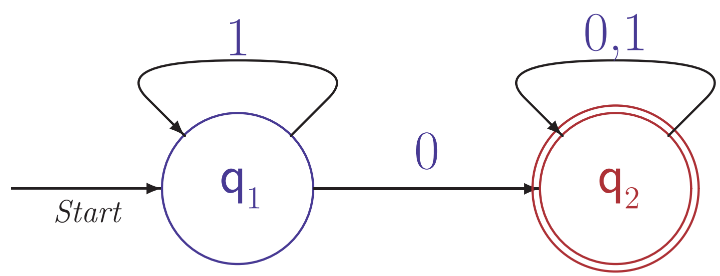
$$R^2_{11} = R^1_{11} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{21} = 1^* + 1^* 0(\epsilon+0+1)^* \emptyset$$

$$R^2_{12} = R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} = 1^* 0 + 1^* 0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$$

$$R^2_{21} = R^1_{21} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{21} = \emptyset + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^* \emptyset$$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

- **Basisfall**



$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$

- **Stufe 1**

$$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$$

$$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$$

$$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$$

$$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$$

- **Stufe 2**

$$R^2_{11} = R^1_{11} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{21} = 1^* + 1^* 0(\epsilon+0+1)^* \emptyset$$

$$R^2_{12} = R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} = 1^* 0 + 1^* 0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$$

$$R^2_{21} = R^1_{21} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{21} = \emptyset + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^* \emptyset$$

$$R^2_{22} = R^1_{22} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{22} = (\epsilon+0+1) + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

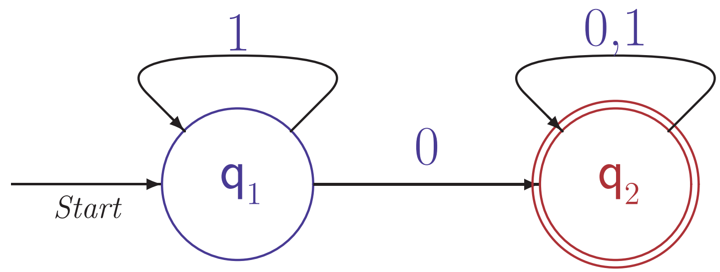
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^*0$

$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$

- **Stufe 2**

$R^2_{11} = R^1_{11} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{21} = 1^* + 1^*0(\epsilon+0+1)^*\emptyset \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^2_{12} = R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} = 1^*0 + 1^*0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$

$R^2_{21} = R^1_{21} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{21} = \emptyset + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*\emptyset$

$R^2_{22} = R^1_{22} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{22} = (\epsilon+0+1) + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

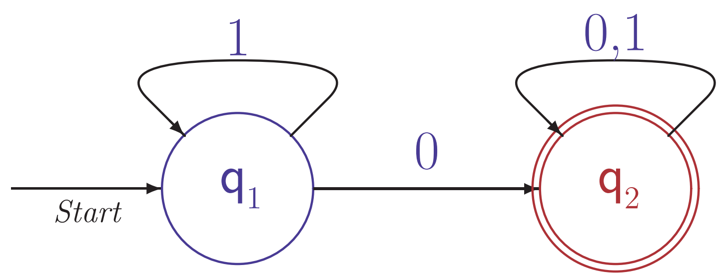
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$

$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$

- **Stufe 2**

$R^2_{11} = R^1_{11} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{21} = 1^* + 1^* 0(\epsilon+0+1)^* \emptyset \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^2_{12} = R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} = 1^* 0 + 1^* 0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1) \quad \mapsto \quad 1^* 0(0+1)^*$

$R^2_{21} = R^1_{21} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{21} = \emptyset + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^* \emptyset$

$R^2_{22} = R^1_{22} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{22} = (\epsilon+0+1) + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

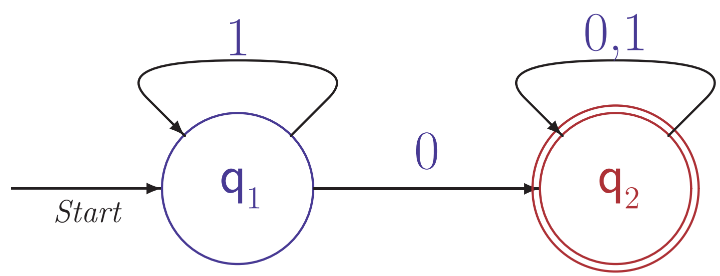
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$

$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$

- **Stufe 2**

$R^2_{11} = R^1_{11} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{21} = 1^* + 1^* 0(\epsilon+0+1)^* \emptyset \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^2_{12} = R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} = 1^* 0 + 1^* 0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1) \quad \mapsto \quad 1^* 0(0+1)^*$

$R^2_{21} = R^1_{21} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{21} = \emptyset + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^* \emptyset \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^2_{22} = R^1_{22} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{22} = (\epsilon+0+1) + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

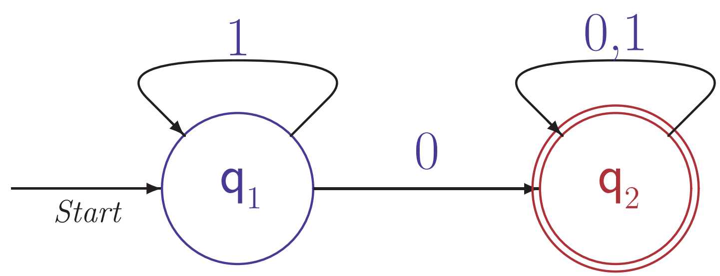
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$

$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$

- **Stufe 2**

$R^2_{11} = R^1_{11} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{21} = 1^* + 1^* 0(\epsilon+0+1)^* \emptyset \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^2_{12} = R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} = 1^* 0 + 1^* 0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1) \quad \mapsto \quad 1^* 0(0+1)^*$

$R^2_{21} = R^1_{21} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{21} = \emptyset + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^* \emptyset \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^2_{22} = R^1_{22} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{22} = (\epsilon+0+1) + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1) \quad \mapsto \quad (0+1)^*$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

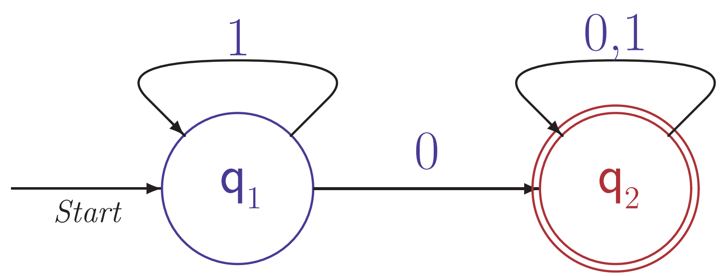
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$

$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$

- **Stufe 2** — **Gebraucht wird nur R^2_{12}**

$R^2_{11} = R^1_{11} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{21} = 1^* + 1^* 0(\epsilon+0+1)^* \emptyset \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^2_{12} = R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} = 1^* 0 + 1^* 0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1) \quad \mapsto \quad 1^* 0(0+1)^*$

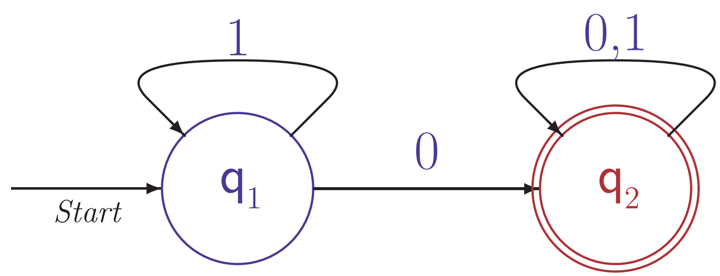
$R^2_{21} = R^1_{21} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{21} = \emptyset + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^* \emptyset \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^2_{22} = R^1_{22} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{22} = (\epsilon+0+1) + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1) \quad \mapsto \quad (0+1)^*$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

- **Basisfall**

$R_{11}^0 = \epsilon + 1$
$R_{12}^0 = 0$
$R_{21}^0 = \emptyset$
$R_{22}^0 = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$$R_{11}^1 = R_{11}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad 1^*$$
$$R_{12}^1 = R_{12}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = 0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad 1^* 0$$
$$R_{21}^1 = R_{21}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) \quad \mapsto \quad \emptyset$$
$$R_{22}^1 = R_{22}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \quad \epsilon + 0 + 1$$

- **Stufe 2** **Gebraucht wird nur R_{12}^2**

$$R_{11}^2 = R_{11}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{21}^1 = 1^* + 1^* 0 (\epsilon+0+1)^* \emptyset \quad \mapsto \quad 1^*$$
$$R_{12}^2 = R_{12}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 = 1^* 0 + 1^* 0 (\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1) \quad \mapsto \quad 1^* 0 (0+1)^*$$
$$R_{21}^2 = R_{21}^1 + R_{22}^1 (R_{22}^1)^* R_{21}^1 = \emptyset + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^* \emptyset \quad \mapsto \quad \emptyset$$
$$R_{22}^2 = R_{22}^1 + R_{22}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 = (\epsilon+0+1) + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1) \quad \mapsto \quad (0+1)^*$$

Regulärer Ausdruck des Automaten: $1^* 0 (0+1)^*$

Eine effizientere Umwandlungsmethode

- **Direkte Umwandlung ist kompliziert und aufwendig**
  – Es müssen mehr als n^3 Ausdrücke R_{ij}^k erzeugt werden
  – Ausdrücke R_{ij}^k können viermal so groß wie die R_{ij}^{k-1} werden

Eine effizientere Umwandlungsmethode

- **Direkte Umwandlung ist kompliziert und aufwendig**
  - Es müssen mehr als n^3 Ausdrücke R_{ij}^k erzeugt werden
  - Ausdrücke R_{ij}^k können viermal so groß wie die R_{ij}^{k-1} werden
  - Ohne Vereinfachung der R_{ij}^k sind bis zu $n^3 * 4^n$ Symbole zu erzeugen
  - Optimierung des Verfahrens: vermeide Vielfachkopien der R_{ij}^{k-1}

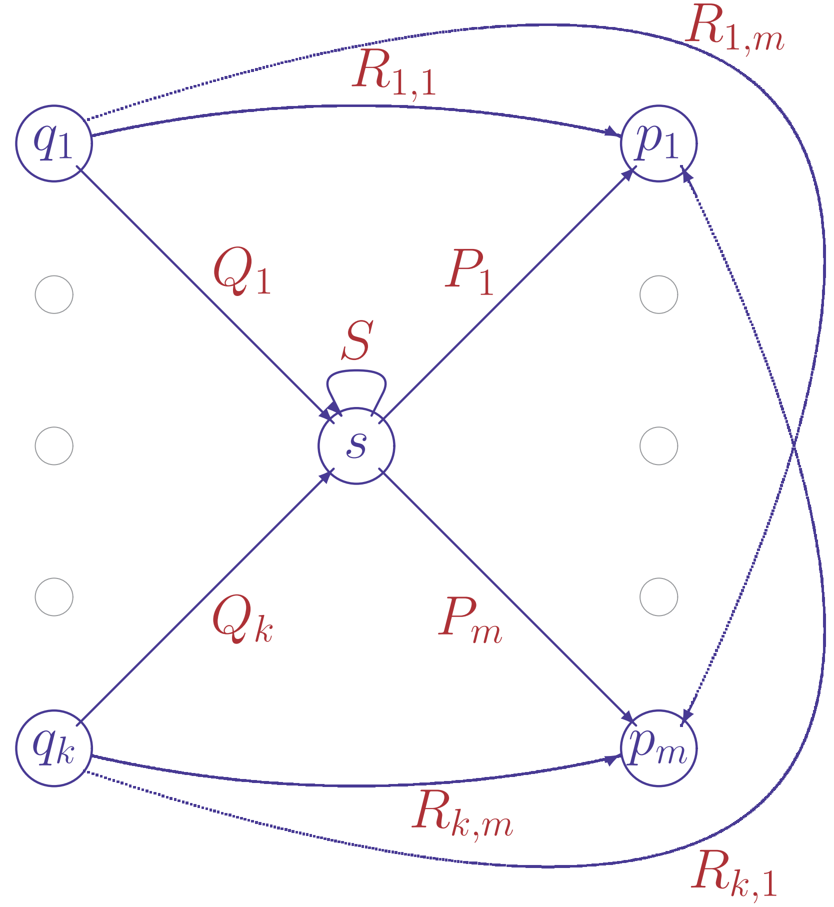
Eine effizientere Umwandlungsmethode

- **Direkte Umwandlung ist kompliziert und aufwendig**
  - Es müssen mehr als n^3 Ausdrücke R_{ij}^k erzeugt werden
  - Ausdrücke R_{ij}^k können viermal so groß wie die R_{ij}^{k-1} werden
  - Ohne Vereinfachung der R_{ij}^k sind bis zu $n^3 * 4^n$ Symbole zu erzeugen
  - Optimierung des Verfahrens: vermeide Vielfachkopien der R_{ij}^{k-1}
- **Effizienterer Zugang: Elimination von Zuständen**
  - Statt Pfade zu verlängern, lege Zustände des Automaten zusammen
  - Ersetze Übergänge $q_i \xrightarrow{a \in \Sigma} q_j$ durch Übergänge mit regulären Ausdrücken
  - Schrittweise Umwandlung erzeugt regulären Ausdruck des Automaten

Eine effizientere Umwandlungsmethode

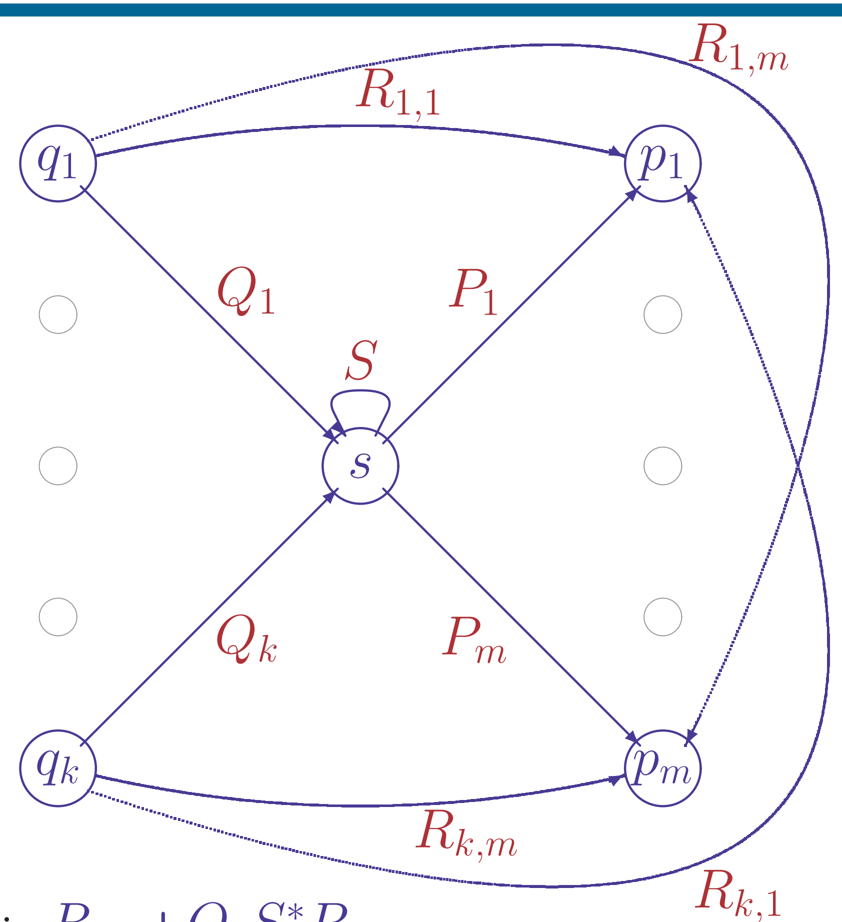
- **Direkte Umwandlung ist kompliziert und aufwendig**
  - Es müssen mehr als n^3 Ausdrücke R_{ij}^k erzeugt werden
  - Ausdrücke R_{ij}^k können viermal so groß wie die R_{ij}^{k-1} werden
  - Ohne Vereinfachung der R_{ij}^k sind bis zu $n^3 * 4^n$ Symbole zu erzeugen
  - Optimierung des Verfahrens: vermeide Vielfachkopien der R_{ij}^{k-1}
- **Effizienterer Zugang: Elimination von Zuständen**
  - Statt Pfade zu verlängern, lege Zustände des Automaten zusammen
  - Ersetze Übergänge $q_i \xrightarrow{a\in\Sigma} q_j$ durch Übergänge mit regulären Ausdrücken
  - Schrittweise Umwandlung erzeugt regulären Ausdruck des Automaten
- **Technisches Hilfsmittel: RA-Automaten**
  - Überführungsfunktion δ arbeitet auf regulären Ausdrücken
  - A akzeptiert w, wenn es einen Pfad $w = v_1..v_m$ von q_0 zu einem $q \in F$ gibt und alle v_i in der Sprache des entsprechenden regulären Ausdrucks liegen
  - Konsistente Formalisierung mühsam und ohne Erkenntnisgewinn

Zustandselimination in RA-Automaten



Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern $q_1, .., q_k$
und Nachfolgern $p_1, .., p_m$

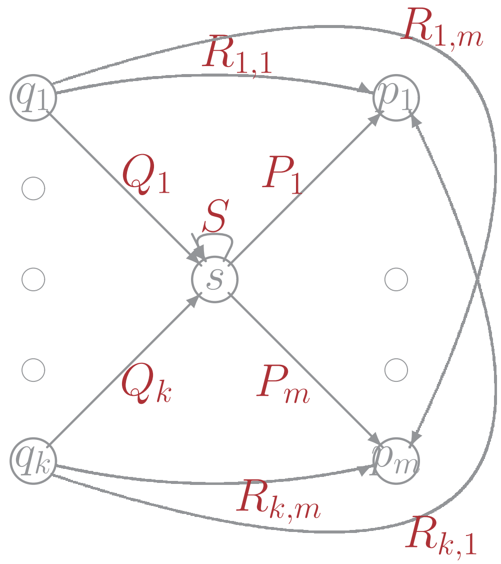
Zustandselimination in RA-Automaten

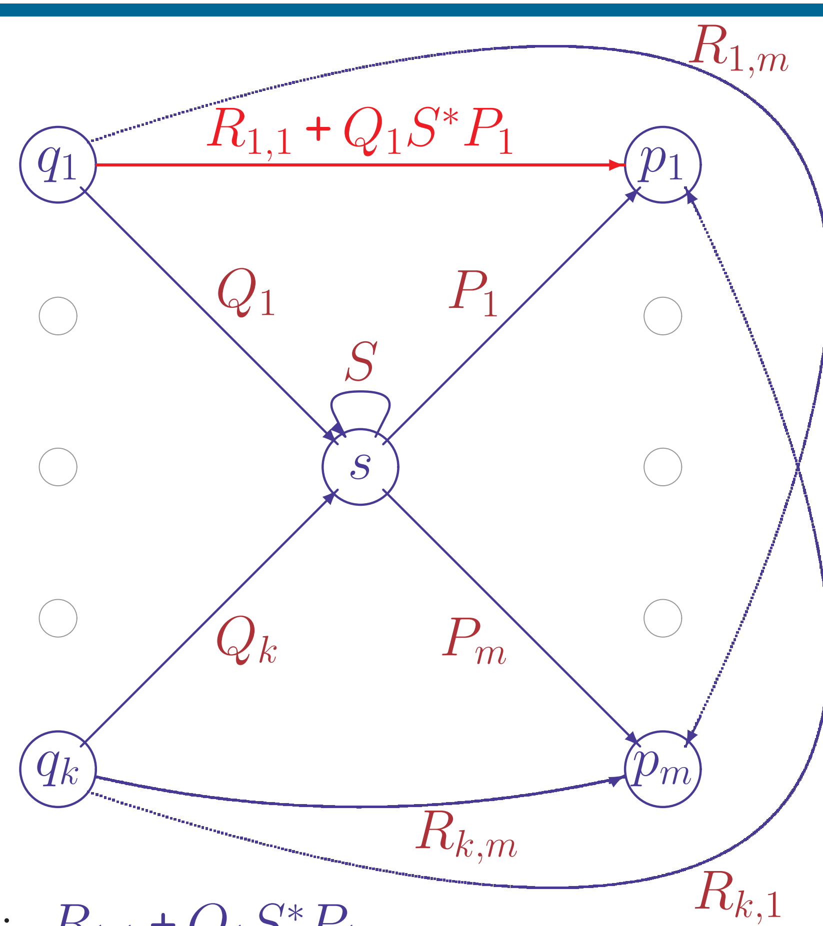


Eliminiere Zustand $\boldsymbol{s}$
mit Vorgängern $\boldsymbol{q_1, .., q_k}$
und Nachfolgern $\boldsymbol{p_1, .., p_m}$

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s: $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$

ZUSTANDSELIMINATION IN RA-AUTOMATEN





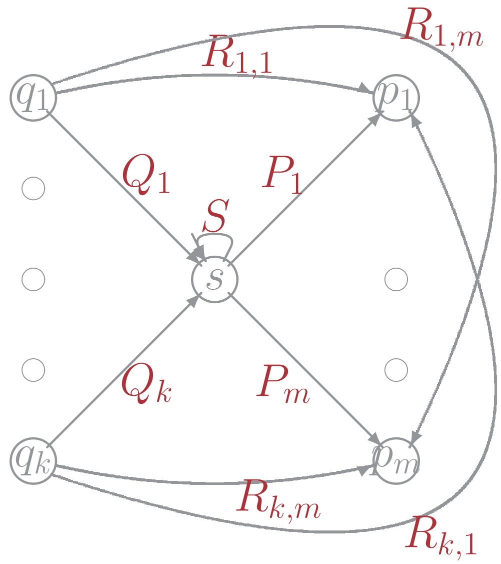
Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern $q_1, .., q_k$
und Nachfolgern $p_1, .., p_m$

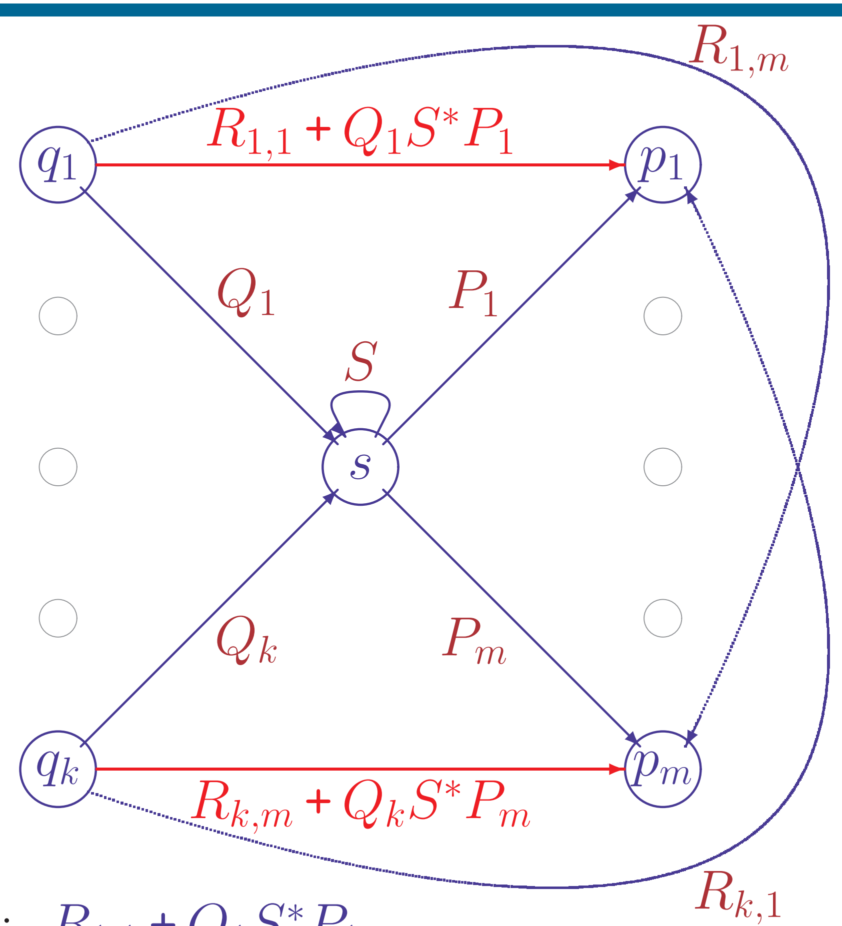
– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s: $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$

⋮

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s: $R_{1,m} + Q_1 S^* P_m$

Zustandselimination in RA-Automaten





Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern $q_1, .., q_k$
und Nachfolgern $p_1, .., p_m$

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s: $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$

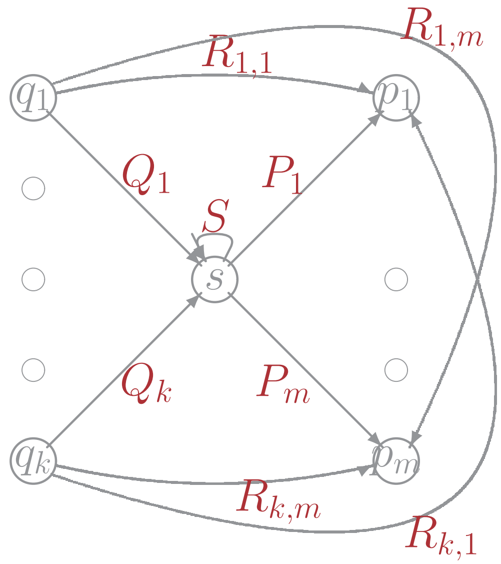
$\vdots$

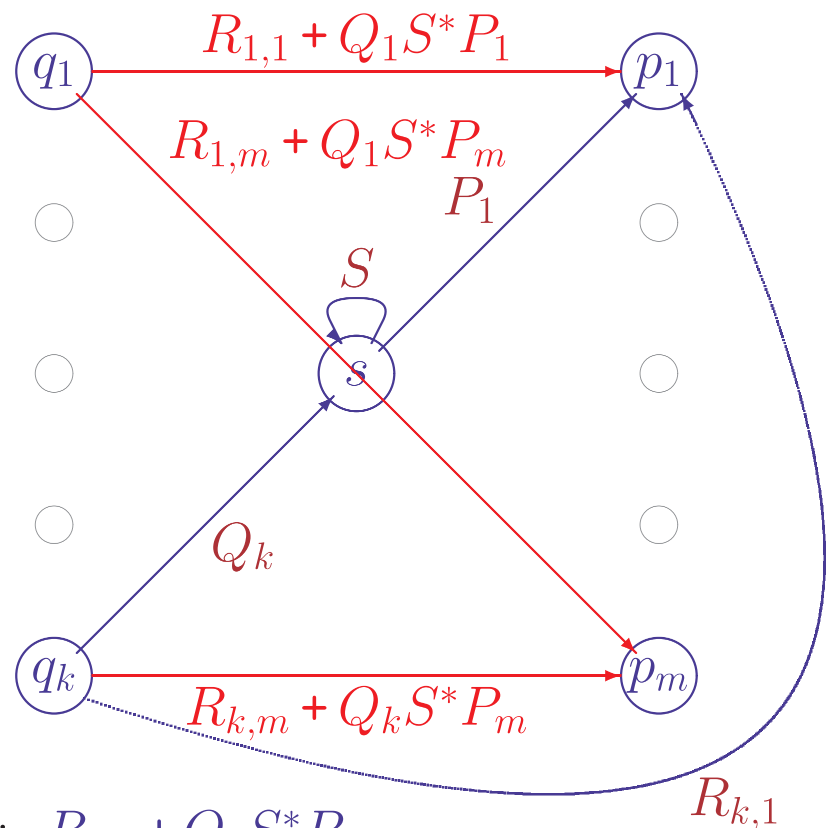
– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s: $R_{1,m} + Q_1 S^* P_m$

$\vdots$

– Eliminiere Pfad von q_k nach p_1 über s: $R_{k,1} + Q_k S^* P_1$

Zustandselimination in RA-Automaten





Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern $q_1, .., q_k$
und Nachfolgern $p_1, .., p_m$

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s: $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$

$\vdots$

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s: $R_{1,m} + Q_1 S^* P_m$

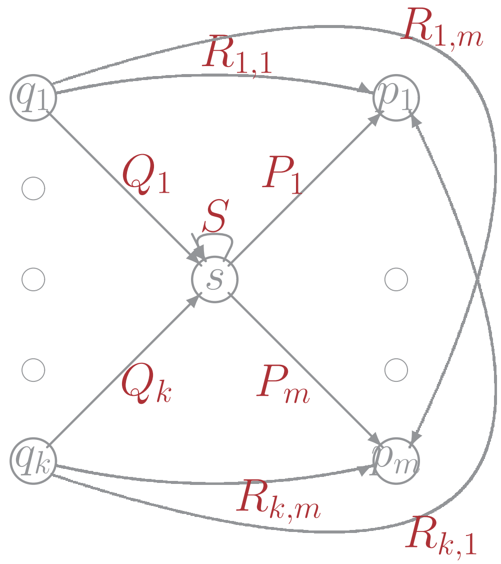
$\vdots$

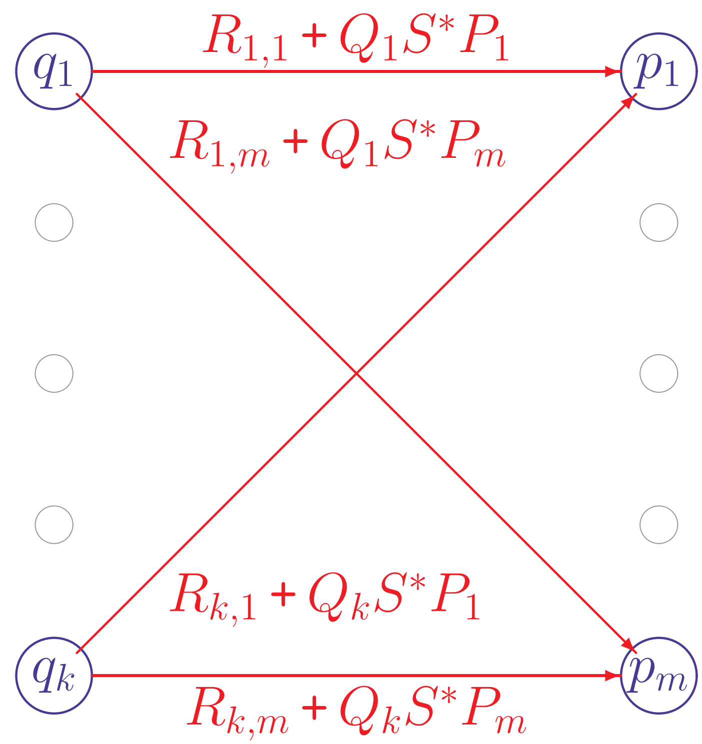
– Eliminiere Pfad von q_k nach p_1 über s: $R_{k,1} + Q_k S^* P_1$

$\vdots$

– Eliminiere Pfad von q_k nach p_m über s: $R_{k,m} + Q_k S^* P_m$

Zustandselimination in RA-Automaten





Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern $q_1, .., q_k$
und Nachfolgern $p_1, .., p_m$

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s: $R_{1,1} + Q_1S^*P_1$

$\vdots$

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s: $R_{1,m} + Q_1S^*P_m$

$\vdots$

– Eliminiere Pfad von q_k nach p_1 über s: $R_{k,1} + Q_kS^*P_1$

$\vdots$

– Eliminiere Pfad von q_k nach p_m über s: $R_{k,m} + Q_kS^*P_m$

Umwandlung durch Zustandselimination

1. Transformiere Automaten in RA-Automaten

– Ersetze Beschriftungen mit Symbolen $a \in \Sigma$ durch reguläre Ausdrücke

Umwandlung durch Zustandselimination

1. **Transformiere Automaten in RA-Automaten**
   – Ersetze Beschriftungen mit Symbolen $a \in \Sigma$ durch reguläre Ausdrücke

2. **Für $q \in F$ eliminiere alle Zustände außer q_0 und q**
   – Iterative Anwendung des Eliminationsverfahrens

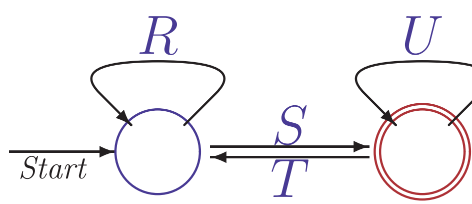
Umwandlung durch Zustandselimination

1. **Transformiere Automaten in RA-Automaten**
   – Ersetze Beschriftungen mit Symbolen $a \in \Sigma$ durch reguläre Ausdrücke

2. **Für $q \in F$ eliminiere alle Zustände außer q_0 und q**
   – Iterative Anwendung des Eliminationsverfahrens

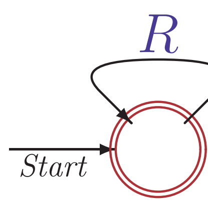
3. **Bilde regulären Ausdruck aus finalem Automaten**

   – $q_0 \neq q$:



$$(R^* + SU^*T)^*SU^*$$

   – $q_0 = q$:



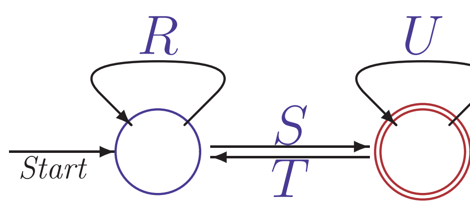
$$R^*$$

Umwandlung durch Zustandselimination

1. **Transformiere Automaten in RA-Automaten**
   – Ersetze Beschriftungen mit Symbolen $a \in \Sigma$ durch reguläre Ausdrücke

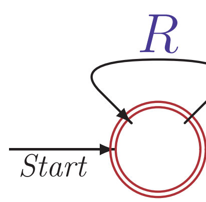
2. **Für $q \in F$ eliminiere alle Zustände außer q_0 und q**
   – Iterative Anwendung des Eliminationsverfahrens

3. **Bilde regulären Ausdruck aus finalem Automaten**
   – $q_0 \neq q$:



$(R^* + SU^*T)^*SU^*$

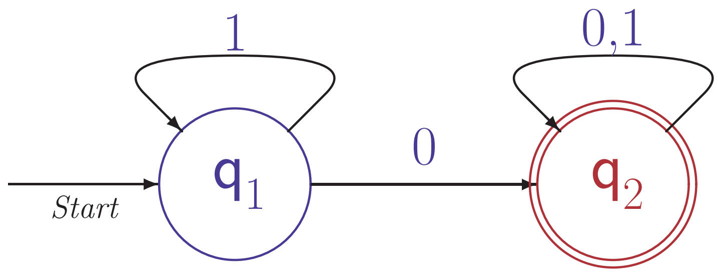
   – $q_0 = q$:



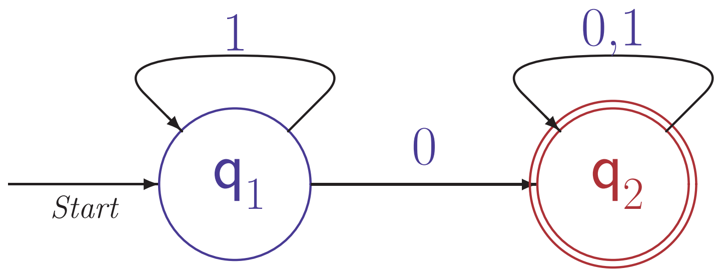
R^*

4. **Vereinige Ausdrücke aller Endzustände**
   – Bilde Summe aller entstandenen regulären Ausdrücke

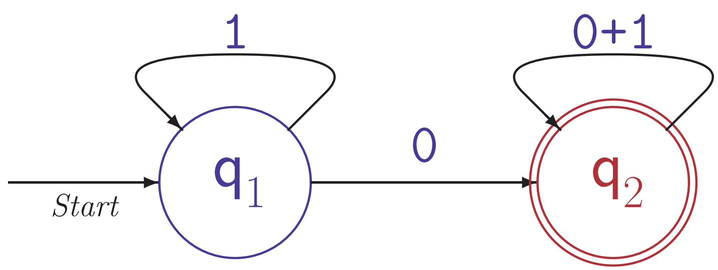
Umwandlung durch Zustandselimination am Beispiel



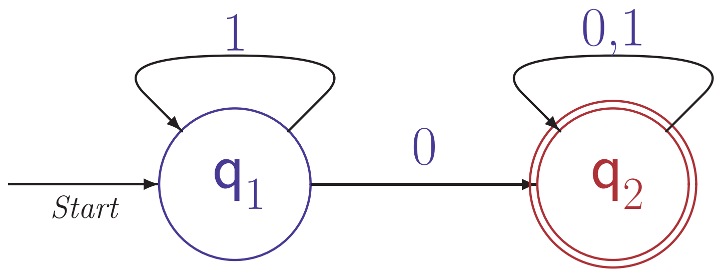
Umwandlung durch Zustandselimination am Beispiel



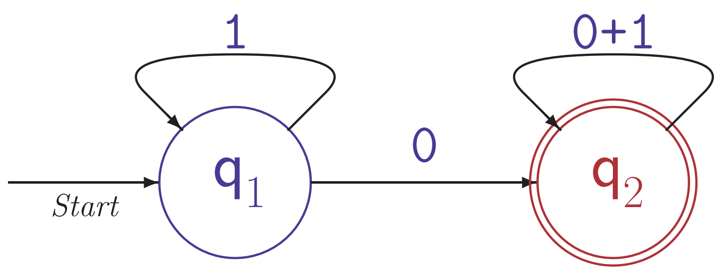
- **Transformiere in RA-Automaten**



Umwandlung durch Zustandselimination am Beispiel

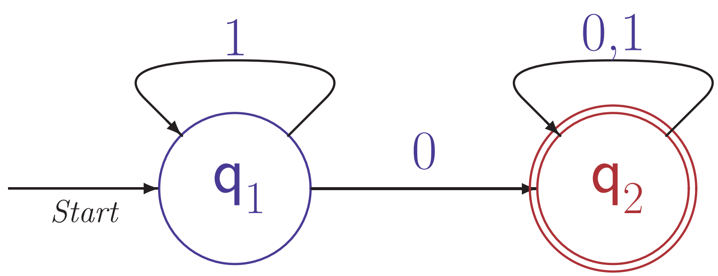


- **Transformiere in RA-Automaten**

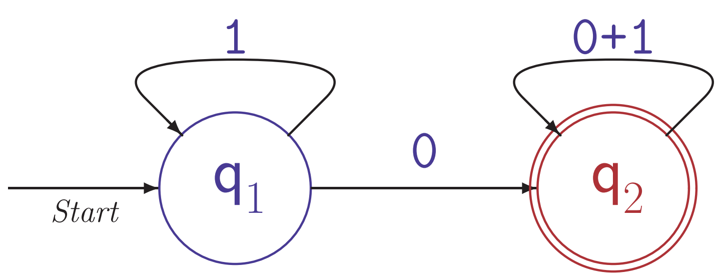


- **Keine Zustände zu eliminieren**

Umwandlung durch Zustandselimination am Beispiel

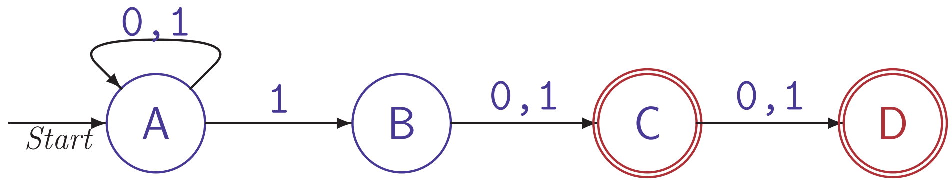


- **Transformiere in RA-Automaten**

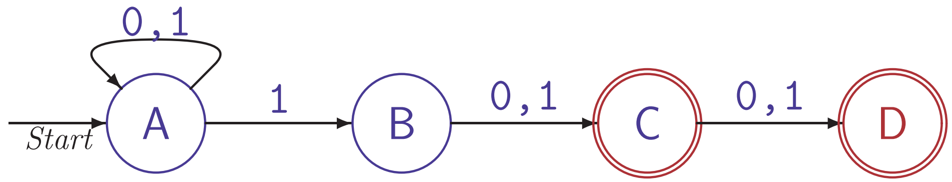


- **Keine Zustände zu eliminieren**
- **Bilde regulären Ausdruck aus finalem Automaten**
  – Extrahierter Ausdruck: $(1 + 0(0+1)^*\emptyset)^*0(0+1)^*$
  – Nach Vereinfachung: $\boxed{1^*0(0+1)^*}$

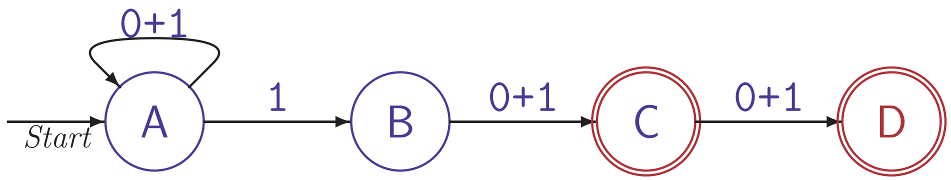
Umwandlung durch Zustandselimination II



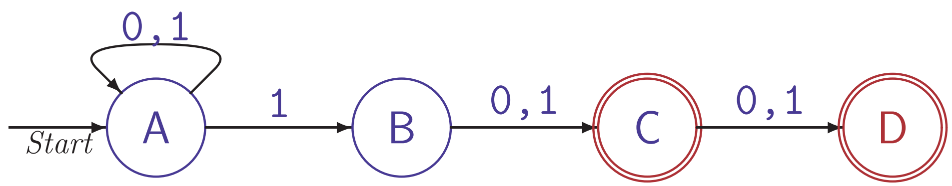
Umwandlung durch Zustandselimination II



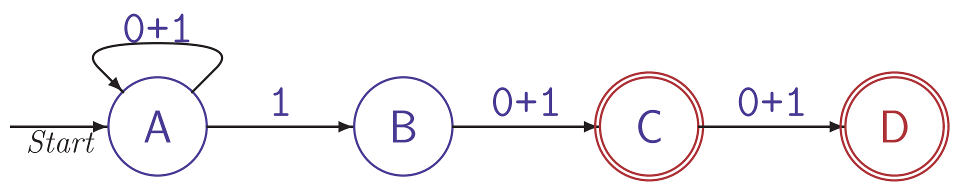
- **Transformiere in RA-Automaten**



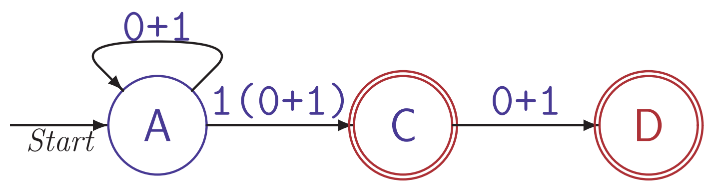
Umwandlung durch Zustandselimination II



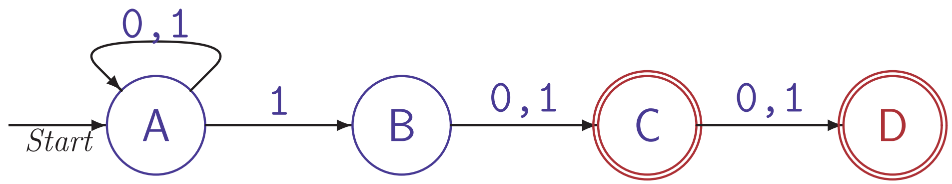
- **Transformiere in RA-Automaten**



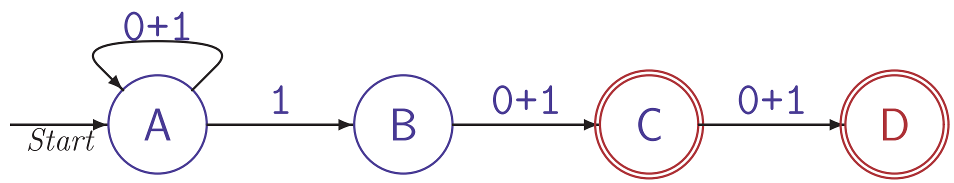
- **Elimination von Zustand *B***



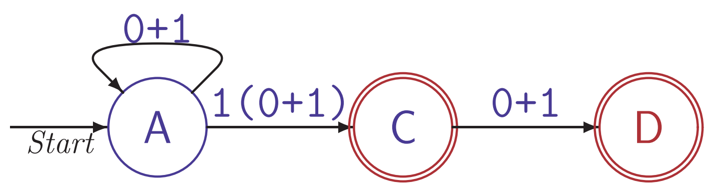
Umwandlung durch Zustandselimination II



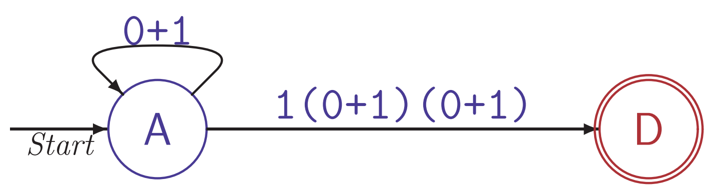
- **Transformiere in RA-Automaten**



- **Elimination von Zustand *B***

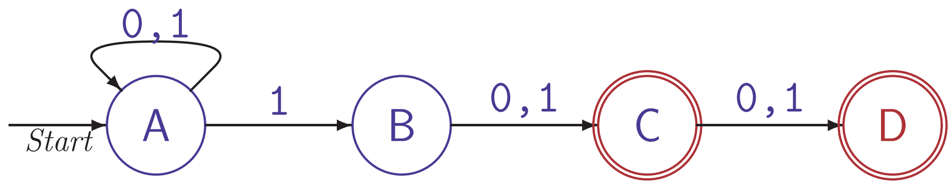


- **Elimination von Zustand *C* für Endzustand *D***

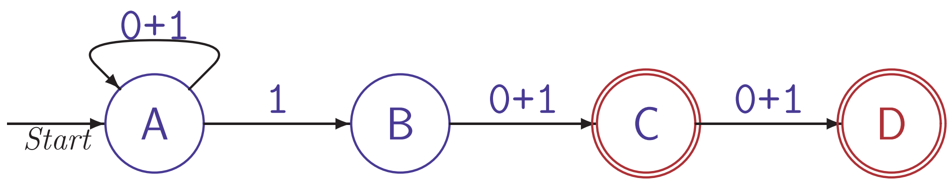


$(0+1)^*1(0+1)(0+1)$

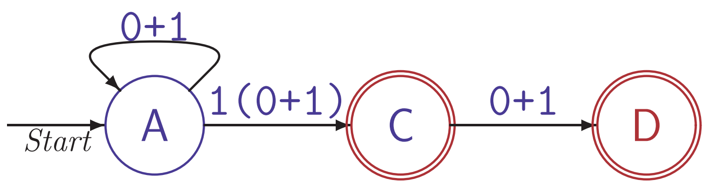
Umwandlung durch Zustandselimination II



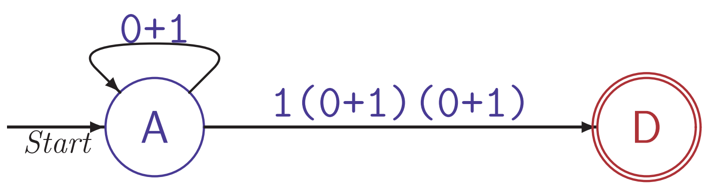
- **Transformiere in RA-Automaten**



- **Elimination von Zustand *B***

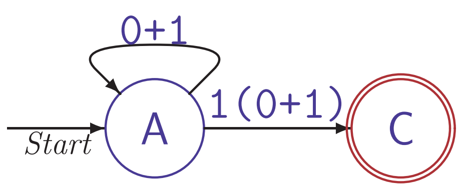


- **Elimination von Zustand *C* für Endzustand *D***



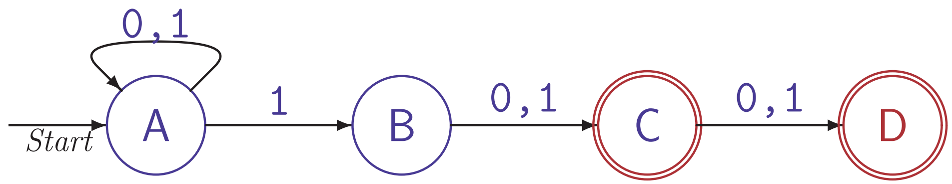
$(0+1)^*1(0+1)(0+1)$

- **Elimination von Zustand *D* für Endzustand *C***

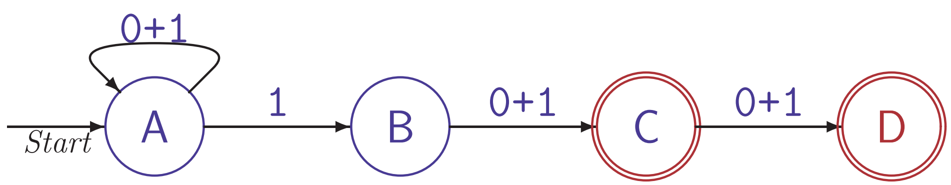


$(0+1)^*1(0+1)$

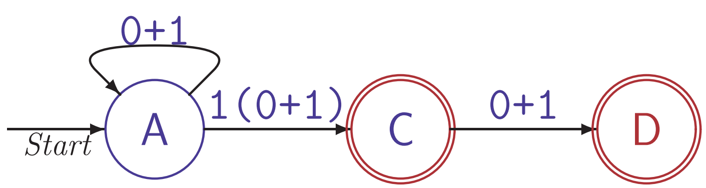
Umwandlung durch Zustandselimination II



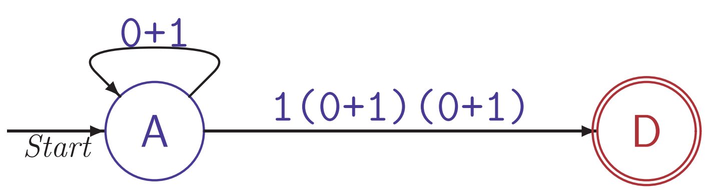
- **Transformiere in RA-Automaten**



- **Elimination von Zustand *B***

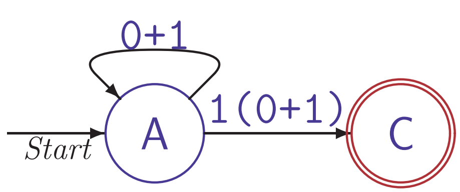


- **Elimination von Zustand *C* für Endzustand *D***



(0+1)*1(0+1)(0+1)

- **Elimination von Zustand *D* für Endzustand *C***



(0+1)*1(0+1)

- **Gesamter Ausdruck:** $\boxed{\texttt{(0+1)}^*\texttt{1(0+1) + (0+1)}^*\texttt{1(0+1)(0+1)}}$

Reguläre Ausdrücke – Zusammenfassung

- **Algebraische Notation für Sprachen**
  - ϵ, $\emptyset$, Symbole des Alphabets, Vereinigung, Verkettung, Sternoperator
  - Äquivalent zu endlichen Automaten
  - Gut zum Nachweis algebraischer Gesetze von Sprachen
  - Anwendung in Programmiersprachen und Suchmaschinen

Reguläre Ausdrücke – Zusammenfassung

- **Algebraische Notation für Sprachen**
  - ϵ, $\emptyset$, Symbole des Alphabets, Vereinigung, Verkettung, Sternoperator
  - Äquivalent zu endlichen Automaten
  - Gut zum Nachweis algebraischer Gesetze von Sprachen
  - Anwendung in Programmiersprachen und Suchmaschinen
- **Transformation in endliche Automaten**
  - Iterative Konstruktion von ϵ-NEAs
  - Nachträgliche Optimierung durch Elimination von ϵ-Übergängen

Reguläre Ausdrücke – Zusammenfassung

- **Algebraische Notation für Sprachen**
  - ϵ, $\emptyset$, Symbole des Alphabets, Vereinigung, Verkettung, Sternoperator
  - Äquivalent zu endlichen Automaten
  - Gut zum Nachweis algebraischer Gesetze von Sprachen
  - Anwendung in Programmiersprachen und Suchmaschinen
- **Transformation in endliche Automaten**
  - Iterative Konstruktion von ϵ-NEAs
  - Nachträgliche Optimierung durch Elimination von ϵ-Übergängen
- **Transformation von Automaten in Ausdrücke**
  - Konstruktion von Ausdrücken für Verarbeitungspfade im Automaten
  - Konstruktion durch Elimination von Zuständen in RA Automaten
  - Nachträgliche Optimierungen durch Anwendung algebraischer Gesetze