

Theoretische Informatik I



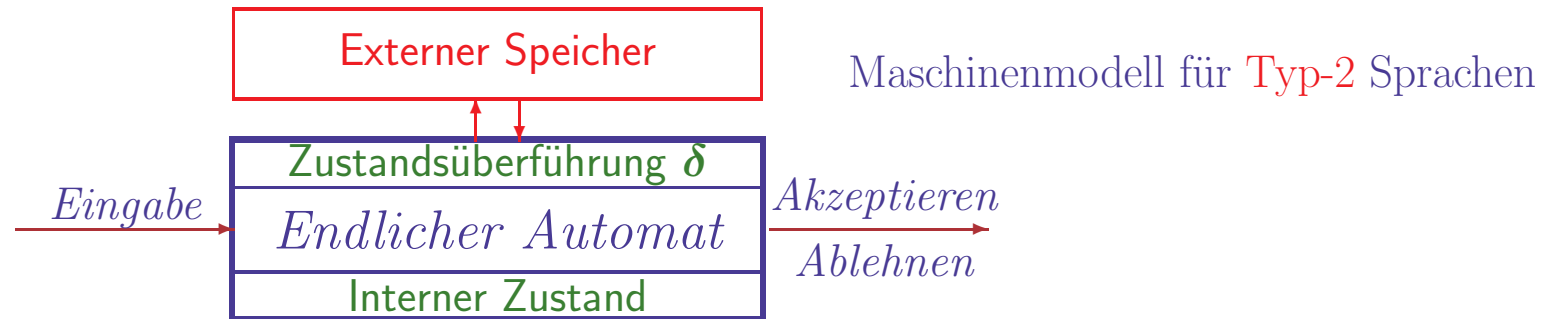
Einheit 3.2

Pushdown Automaten



1. Das Maschinenmodell
2. Arbeitsweise & erkannte Sprache
3. Beziehung zu Typ-2 Sprachen
4. Deterministische PDAs

EIN MASCHINENMODELL FÜR TYP-2 SPRACHEN



- **Typ-3 Sprachen** werden von **NEAs** akzeptiert
 - Typ-3 Grammatik erzeugt pro Schritt ein Terminalsymbol
 - NEA verarbeitet pro Schritt ein Eingabesymbol
 - Erzeugte Terminalsymbole stehen links von der aktuellen Variablen
 - Verarbeitete Eingabesymbole führen zu aktuellem Zustand
 - Rechts von der aktuellen Variablen steht noch nichts
 - Im Zustand ist nichts über unverarbeitete Eingabesymbole bekannt
- Welches **Maschinenmodell** paßt zu **Typ-2 Sprachen**?
 - Kontextfreie Grammatiken können $L_1 = \{0^m 1^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ erzeugen
 - Ohne Zwischenspeicher können endliche Automaten L_1 nicht erkennen

Typ-2 Maschinenmodell benötigt externen Speicher

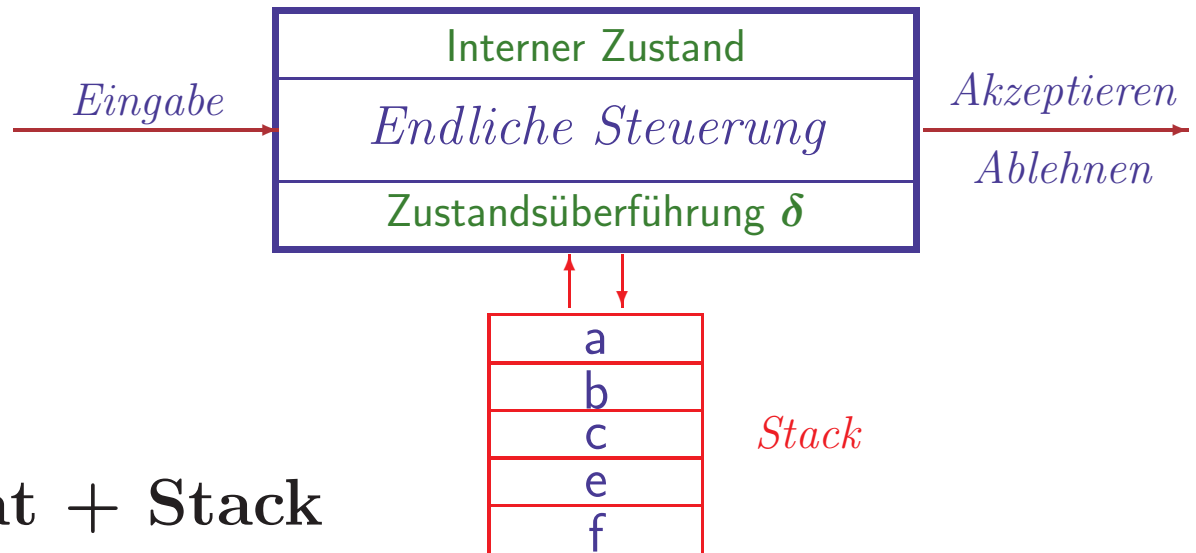
Analysiere das Verhalten von Linksableitungen

- **Links** von der aktuellen Variablen A stehen **nur erzeugte Terminalsymbole**
 - Entspricht den **schon verarbeiteten Eingabesymbolen** des Automaten
- **Rechts von A können bereits Terminalsymbole stehen**
Abarbeitung von A schiebt weiteren Text in die Mitte
 - Bei Verarbeitung eines Eingabewortes muß der **Automat Information speichern**, welche Symbole **am Ende des Wortes kommen müssen**
- **Ist A komplett abgearbeitet, so “springt” die Ableitung über Terminalsymbole zur nächsten Variablen**
 - Automat muß **zuletzt erzeugte Information zuerst abarbeiten**



Speicher des Automaten sollte ein Stack sein

PUSHDOWN-AUTOMATEN INTUITIV



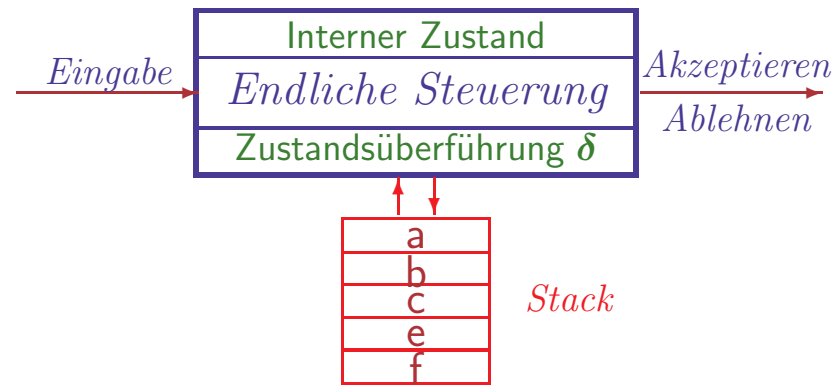
● Endlicher Automat + Stack

- Endliche Steuerung *liest* Eingabesymbole
- Gleichzeitig kann das *oberste Symbol im Stack* beobachtet werden

● Eingabe und Stack wird gleichzeitig bearbeitet

- Gelesenes Symbol wird aus Eingabe “entfernt”
- Zustand kann *verändert* werden
- Oberstes Stacksymbol wird durch (mehrere) neue Stacksymbole *ersetzt*
- Nichtdeterministische Entscheidungen und spontane ϵ -Übergänge möglich

PUSHDOWN-AUTOMATEN – MATHEMATISCH PRÄZISIERT



Ein **Pushdown-Automat** (**PDA**, **Kellerautomat**)

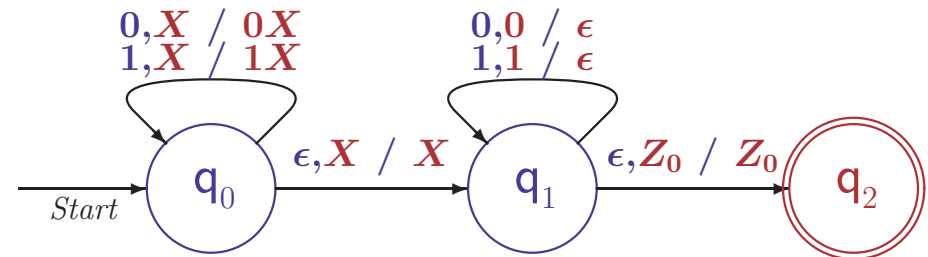
ist ein 7-Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ endliches **Eingabealphabet**
- Γ endliches **Stackalphabet**
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$ **Überföhrungsfunktion** (endlich)
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $Z_0 \in \Gamma$ **Initialsymbol des Stacks**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (End-) **Zuständen**

Pushdown-Automaten sind üblicherweise nichtdeterministisch!

BESCHREIBUNG VON PUSHDOWN-AUTOMATEN

● Übergangsdiagramme



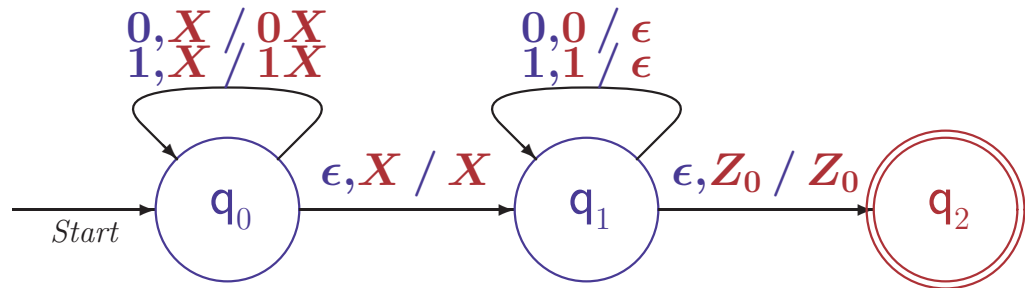
- Jeder Zustand in Q wird durch einen **Knoten** (Kreise) dargestellt
- Für $(p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$, $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ hat das Diagramm eine **Kante** $q \xrightarrow{a, X / \alpha} p$ (mehrere Beschriftungen derselben Kante möglich)
- q_0 wird durch einen mit *Start* beschrifteten Pfeil angezeigt
- Endzustände in F werden durch **doppelte Kreise** gekennzeichnet
- Σ und Γ implizit durch Diagramm bestimmt, Initialsymbol heißt Z_0

● Übergangstabellen

- Tabellarische Darstellung der Funktion δ
- Kennzeichnung von q_0 durch einen Pfeil
- Kennzeichnung von F durch **Sterne**
- Σ , Γ und Q implizit durch die Tabelle bestimmt
- **Wildcardvariablen** für $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $X \in \Gamma$ erlaubt

	Q	$\Sigma \cup \epsilon$	Γ	Resultat
→	q_0	0	X	$q_0, 0X$
→	q_0	1	X	$q_0, 1X$
→	q_0	ϵ	X	q_1, X
	q_1	0	0	q_1, ϵ
	q_1	1	1	q_1, ϵ
	q_1	ϵ	Z_0	q_2, Z_0
*	q_2			

PUSHDOWN-AUTOMAT FÜR $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$



- **Speichere w in q_0**

- Es wird je ein Symbol gelesen und auf den Stack gelegt

- $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, aX)\}$ für $a \in \{0,1\}$, $X \in \Gamma$

- **Spontaner Wechsel “in der Mitte”**

- $\delta(q_0, \epsilon, X) = \{(q_1, X)\}$ für $X \in \Gamma$ (nichtdeterministischer ϵ -Übergang)

- **Verarbeite w^R in q_1** (w steht in umgekehrter Reihenfolge im Stack)

- Jedes gelesene Symbol wird dem obersten Stacksymbol verglichen

- $\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \epsilon)\}$ für $a \in \{0,1\}$

- **“Leerer” Stack akzeptiert**

- Wenn Stack leer ist, wurde w^R in q_1 verarbeitet

- $\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$ (deterministischer ϵ -Übergang)

$$P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$

Generalisiere Konzept der Konfigurationsübergänge

● Erweitere Begriff der Konfiguration

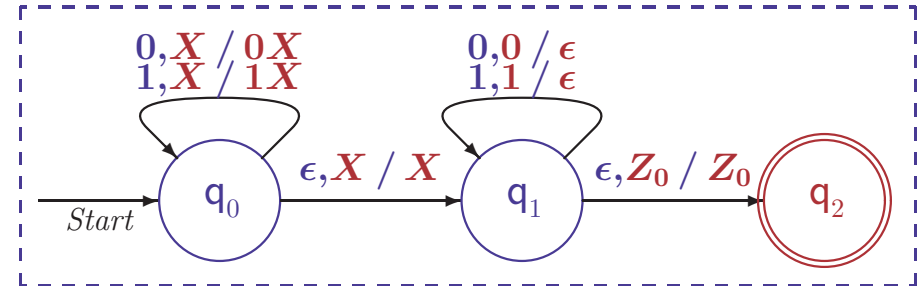
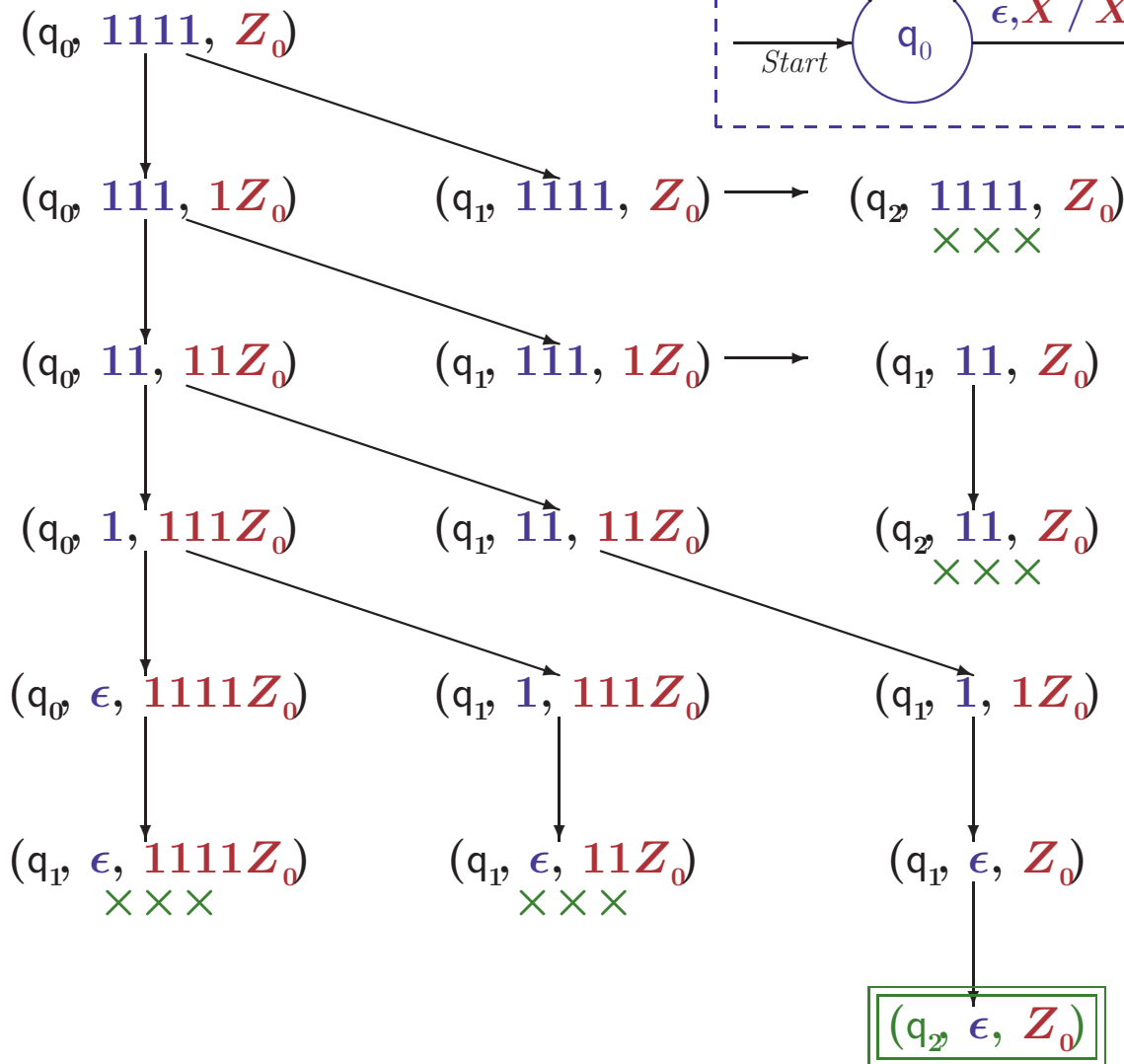
- Aktueller Zustand, Inhalt des Stacks und unverarbeitete Eingabe zählt
- Formal dargestellt als Tripel $\mathbf{K} = (q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

● Modifiziere Konfigurationsübergangsrelation $\vdash^*$

- Wechsel zwischen Konfigurationen durch Abarbeitung von Wörtern
- $(q, aw, X\beta) \vdash (p, w, \alpha\beta)$, falls $(p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$
- $(q, w, X\beta) \vdash (p, w, \alpha\beta)$, falls $(p, \alpha) \in \delta(q, \epsilon, X)$
(Im Zustand q ist a das erste Eingabesymbol und X oben im Stack.
 a wird abgearbeitet, X durch α ersetzt, der Rest bleibt stehen)
- $\mathbf{K}_1 \vdash^* \mathbf{K}_2$, falls $K_1 = K_2$ oder
es gibt eine Konfiguration K mit $K_1 \vdash K$ und $K \vdash^* K_2$

ABARBEITUNG DES PALINDROM PDA

Verarbeitung von 1111



AKZEPTIERTE SPRACHE EINES PUSHDOWN-AUTOMATEN

Zwei alternative Definitionen möglich

- Akzeptanz durch **akzeptierende Endzustände**

$$L_F(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F. \exists \beta \in \Gamma^*. (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \beta) \}$$

- Standarddefinition: Nach Abarbeitung der Eingabe entscheidet der Zustand, ob das Wort akzeptiert wird

- Akzeptanz durch **leeren Stack**

$$L_\epsilon(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q. (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon) \}$$

- Oft praktischer: Nach Abarbeitung der Eingabe sind auch alle zwischengelagerten Symbole verarbeitet

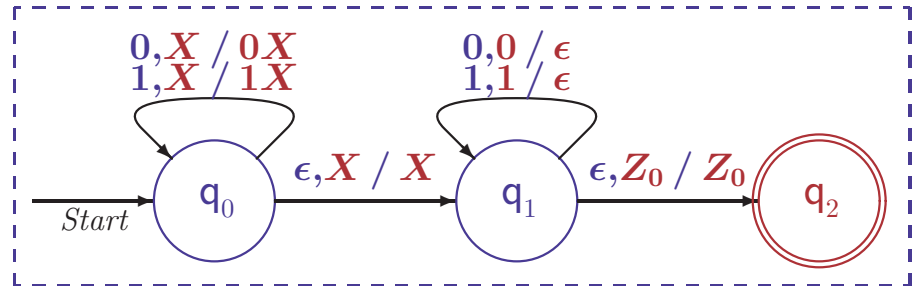
- Definitionen haben verschiedene Effekte

- Sprachen können für konkrete PDAs sehr verschieden ausfallen

- Beide Definitionen sind gleichmächtig

- PDA kann passend zur anderen Definition umgewandelt werden

DIE BEIDEN SPRACHEN DES PALINDROMAUTOMATEN



- $L_F(P) = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

$\supseteq$: Durch strukturelle Induktion zeige, daß für jedes Wort w gilt

$$(q_0, ww^R, Z_0) \vdash^* (q_0, w^R, w^R Z_0) \vdash (q_1, w^R, w^R Z_0) \vdash^* (q_1, \epsilon, Z_0) \vdash (q_2, \epsilon, Z_0)$$

$\subseteq$: Durch strukturelle Induktion über $x = x_1..x_n$ zeige

Wenn $(q_0, x, \alpha) \vdash^* (q_1, \epsilon, \alpha)$ für ein $\alpha \in \Gamma^*$, dann $x = ww^R$ für ein $w \in \{0,1\}^*$

Kernidee des Induktionsschrittes

(Details in HMU §6.2.1)

$$\begin{aligned} \text{Wenn } (q_0, x_1..x_n, \alpha') \vdash^* (q_0, x_2..x_n, x_1 \alpha') \vdash^* (q_1, x_i..x_n, \beta x_1 \alpha') \\ \vdash^* (q_1, x_n, x_1 \alpha') \quad \vdash^* (q_1, \epsilon, \alpha') \text{ für } \alpha', \beta \in \Gamma^*, \end{aligned}$$

$$\text{dann folgt } (q_0, x_1..x_{n-1}, \alpha') \vdash^* (q_0, x_2..x_{n-1}, x_1 \alpha') \vdash^* \dots \vdash^* (q_1, \epsilon, x_1 \alpha')$$

$$\text{und } x_1 = x_n \text{ und per Induktion } x_2..x_{n-1} = vv^R \text{ für ein } v \in \{0,1\}^*$$

- $L_\epsilon(P) = \emptyset$ weil Z_0 nie gelöscht wird

Modifikation von P : Ändere Kantenbeschriftung von q_1 nach q_2 in $\epsilon, Z_0 / \epsilon$

Für den resultierenden PDA P' gilt: $L_\epsilon(P') = L_F(P) = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

WICHTIGE ERKENNTNISSE ZU AUSSAGEN ÜBER KONFIGURATIONSÜBERGÄNGE IN BEWEISEN

● Ungelesene Eingaben können ignoriert werden

Gilt $(q, xw, \alpha) \vdash^* (p, yw, \beta)$ dann gilt auch
 $(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$ für alle $w \in \Sigma^*$

Dagegen kann es von Bedeutung sein, ob im Stack hinter α etwas steht

- Beweis durch Induktion über Anzahl der Konfigurationsschritte
- Kernargument: $(q, ayw, X\beta) \vdash (p, yw, \gamma\beta)$ verlangt $(p, \gamma) \in \delta(q, a, X)$
also $(q, ay, X\beta) \vdash (p, y, \gamma\beta)$

● Erweiterung von Eingabe oder Stack ändert nichts

Gilt $(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$ dann gilt auch
 $(q, xw, \alpha\gamma) \vdash^* (p, yw, \beta\gamma)$ für alle $w \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^*$

Weder w noch γ werden bei der Verarbeitung angesehen

- Beweis durch Induktion über Anzahl der Konfigurationsschritte
- Kernargument: $(q, aw, X\gamma) \vdash (p, w, \beta\gamma)$, falls $(p, \beta) \in \delta(q, a, X)$
was hinter a bzw. X kommt, bleibt unangetastet

ERKENNEN MIT LEEREM STACK IST OFT EINFACHER

Konstruiere PDA für korrekte Klammerausdrücke

- **Rahmenbedingungen an Eingabewörter**

- Anzahl geöffneter und geschlossener Klammern muß gleich sein
- In keinen Anfangssegment dürfen mehr (als) vorkommen

- **Zähle Überschuß geöffneter Klammern im Stack**

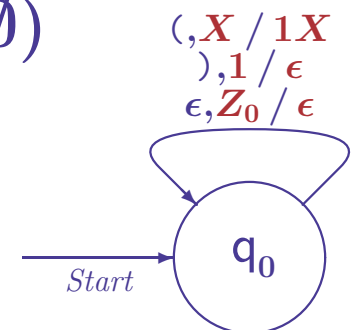
- Jedes (erhöht die Anzahl, jedes) erniedrigt sie
-) ist nicht erlaubt, wenn der Stackboden erreicht ist
- Am Ende des Wortes wird der Stackboden entfernt

- **Setze $P_1 = (\{q\}, \{(\, , \,)\}, \{Z_0, 1\}, \delta, q, Z_0, \emptyset)$**

mit $\delta(q, (\, , \, \textcolor{red}{X}) = \{(q, \textcolor{red}{1X})\}$

$$\delta(q, \textcolor{red}{), \, \textcolor{red}{1}} = \{(q, \textcolor{red}{\epsilon})\}$$

$$\delta(q, \textcolor{red}{\epsilon, \, \textcolor{red}{Z_0}}) = \{(q, \textcolor{red}{\epsilon})\}$$



TRANSFORMATION VON L_ϵ - IN L_F -AUTOMATEN

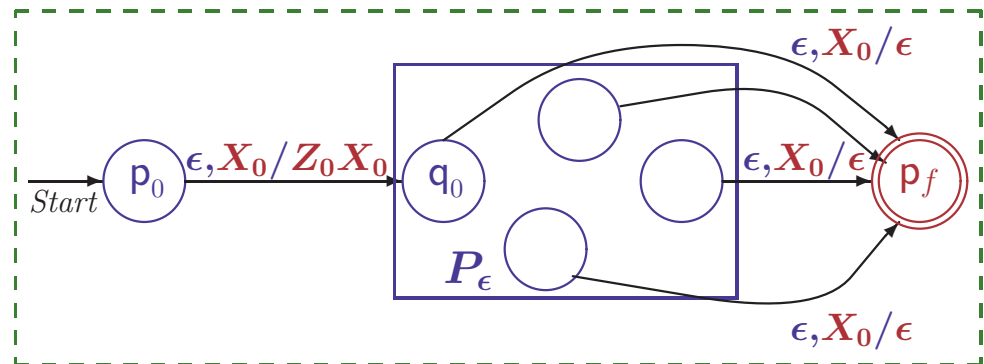
Zu jedem PDA $P_\epsilon = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ kann ein PDA P_F konstruiert werden mit $L_\epsilon(P_\epsilon) = L_F(P_F)$

- Bei leerem Stack wechsele in einen Endzustand

- Neues Initialsymbol X_0 markiert unteres Ende des Stacks von P_F
- Neuer Anfangszustand p_0 für P_F schreibt Initialsymbol von P_ϵ auf Stack
- Neuer Endzustand p_f , in den bei “leerem” Stack gewechselt wird

- $P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$

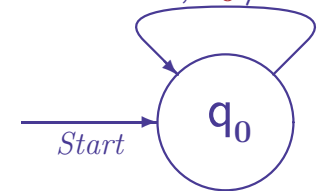
- $\delta_F(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
- $\delta_F(q, a, X) = \delta(q, a, X)$
für alle $q \in Q, X \in \Gamma$
- $\delta_F(q, \epsilon, X_0) = \{(p_f, \epsilon)\}$
für alle $q \in Q$



Korrektheitsbeweis durch Detailanalyse

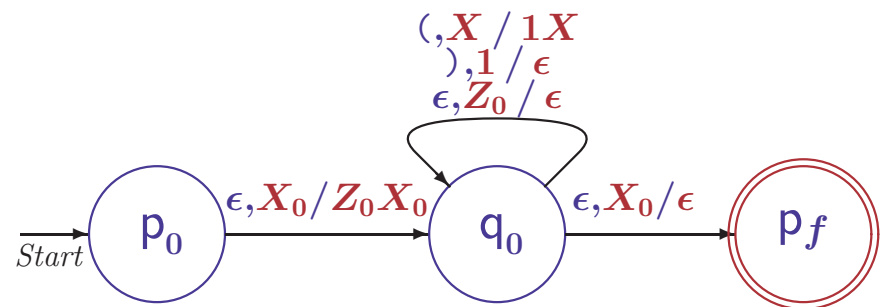
UMWANDLUNG EINES L_ϵ -PDA IN EINEN L_F -PDA

- Gegeben $P_\epsilon = (\{q\}, \{(\cdot, \cdot)\}, \{Z_0, 1\}, \delta, q, Z_0, \emptyset)$
 mit $\delta(q, (\cdot, \mathbf{X}) = \{(q, \mathbf{1X})\}$
 $\delta(q, \cdot, \mathbf{1}) = \{(q, \epsilon)\}$
 $\delta(q, \epsilon, \mathbf{Z_0}) = \{(q, \epsilon)\}$



- Äquivalenter PDA P_F mit Endzuständen ist
 $(\{p_0, q, p_f\}, \{(\cdot, \cdot)\}, \{X_0, Z_0, 1\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$

- mit $\delta_F(p_0, \epsilon, \mathbf{X_0}) = \{(q, \mathbf{Z_0X_0})\}$
 $\delta_F(q, (\cdot, \mathbf{X}) = \{(q, \mathbf{1X})\}$
 $\delta_F(q, \cdot, \mathbf{1}) = \{(q, \epsilon)\}$
 $\delta(q, \epsilon, \mathbf{Z_0}) = \{(q, \epsilon)\}$
 $\delta_F(q, \epsilon, \mathbf{X_0}) = \{(p_f, \epsilon)\}$



TRANSFORMATION VON L_F - IN L_ϵ -AUTOMATEN

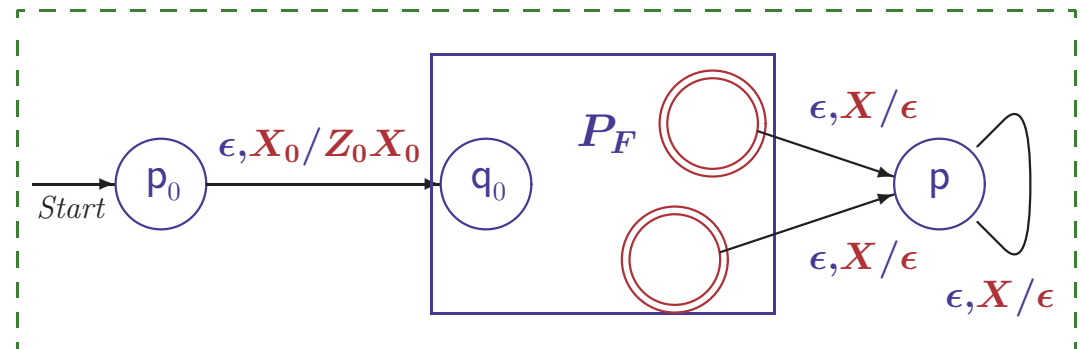
Zu jedem PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ kann ein PDA P_ϵ konstruiert werden mit $L_F(P_F) = L_\epsilon(P_\epsilon)$

● Im Endzustand leere den Stack

- Neuer Stacklösch-Zustand p , in den von Endzuständen gewechselt wird
- Neues Initialsymbol X_0 für P_ϵ verhindert irrtümliches Leeren des Stacks
- Neuer Anfangszustand p_0 für P_ϵ schreibt Initialsymbol von P_F auf Stack

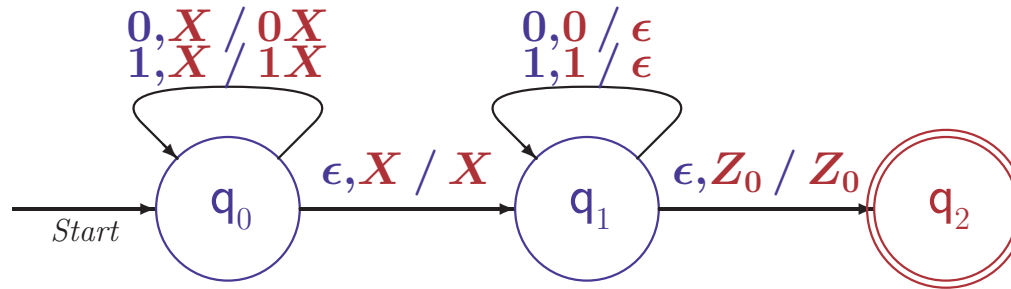
● $P_\epsilon = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_\epsilon, p_0, X_0, \emptyset)$

- $\delta_\epsilon(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
- $\delta_\epsilon(q, a, X) = \delta(q, a, X)$
für alle $q \in Q, X \in \Gamma$
- $\delta_\epsilon(q, \epsilon, X) = \{(p, \epsilon)\}$
für alle $q \in F$
- $\delta_\epsilon(p, \epsilon, X) = \{(p, \epsilon)\}$
für alle $X \in \Gamma \cup \{X_0\}$

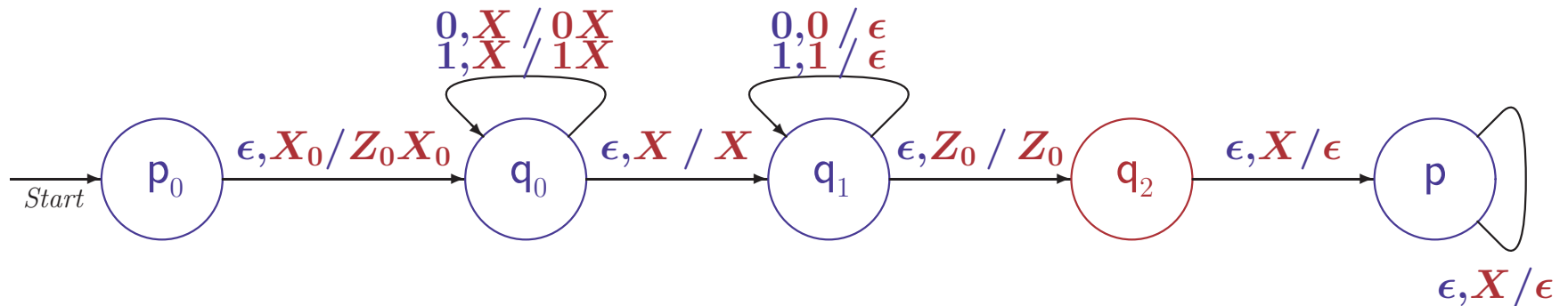


Korrektheitsbeweis durch Detailanalyse

UMWANDLUNG EINES L_F -PDA IN EINEN L_ϵ -PDA



- $P_F = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$
mit δ wie oben erkennt $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ mit Endzustand
- Äquivalenter PDA P_ϵ mit leerem Stack ist
 $(\{p_0, q_0, q_1, q_2, p\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0, X_0\}, \delta_\epsilon, p_0, X_0, \{p\})$



SIND PDAS WIRKLICH MASCHINEN FÜR TYP-2 SPRACHEN?

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{PDA} = \{ L \mid \exists P: \text{PDAs. } L = L_\epsilon(P) \}$$

● Konfigurationsübergänge $\hat{=}$ Linksableitungen

- $(q_0, xy, Z_0) \vdash^* (q, y, A\alpha)$ bedeutet, daß P nach Verarbeitung von x im Zustand q ist und noch y und den Stack $A\alpha$ zu verarbeiten hat
 $A\alpha$ muß gespeichert und beim Lesen von y komplett abgearbeitet werden
- Linksableitung $S \xrightarrow{*} xA\alpha \xrightarrow{*} xy$ erzeugt aus dem Startsymbol zuerst das Wort $xA\alpha$ und muß dann y aus $A\alpha$ ableiten

● Grammatik $\longrightarrow$ Pushdown-Automat

- PDA muß Linksableitung auf Stack simulieren
- Erzeugte linke Terminalteilwörter müssen mit Teil der Eingabe verglichen werden, um nächste Variable freizulegen

● Pushdown-Automat $\longrightarrow$ Grammatik

- Grammatik muß Abarbeitung von Symbolen des Stacks simulieren
- Regeln beschreiben wie PDA bei Abarbeitung des Stacksymbols X mit δ Zwischenwörter im Stack auf- und schließlich wieder abbaut

VON GRAMMATIKEN ZU PUSHDOWN-AUTOMATEN

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V, T, P_G, S)$
kann ein PDA P konstruiert werden mit $L(G) = L_\epsilon(P)$

● Stack simuliert Linksableitungen von G

- Beginne mit Startsymbol von G
- $A \in V$ wird im Stack durch rechte Seite β einer Regel $A \rightarrow \beta$ ersetzt
- $a \in T$ wird vom Stack entfernt, wenn es als Eingabe erscheint,
um im Stack die nächsten Variable einer Linksableitung freizulegen

● Generierter PDA $P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \emptyset)$

- $\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \rightarrow \beta \in P_G\}$ für alle $A \in V$
- $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$ für alle $a \in T$

● Korrektheitsbeweis $L(G) = L_\epsilon(P)$ (Details folgen)

- Zeige: ($\subseteq$) Wenn $S = x_1 A_1 \alpha_1 \dots \xrightarrow{L} x_m A_m \alpha_m \xrightarrow{L} w \in T^*$ dann gibt
es für alle i ein y_i mit $w = x_i y_i$ und $(q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i \alpha_i)$
- ($\supseteq$) Wenn $(q, w, X) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$ dann $X \xrightarrow{*} w$

KORREKTHEITSBEWEIS IM DETAIL: $L(G) \subseteq L_\epsilon(P)$

Wenn $S = x_1 A_1 \alpha_1 .. \longrightarrow_L x_m A_m \alpha_m \longrightarrow_L w \in T^*$ ($x_i \in T^*, A_i \in V$) dann gibt es für alle i ein y_i mit $w = x_i y_i$ und $(q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i \alpha_i)$

- Beweis durch Induktion über $i \leq m$
- Basisfall $i = 1$: $S = x_1 A_1 \alpha_1 \xrightarrow{*} w$
 - Es folgt $S = A_1$ und $x_1 = \alpha_1 = \epsilon$, also muß $y_1 = w$ gewählt werden
 - $(q, w, S) \vdash^* (q, w, S)$ gilt mit 0 Konfigurationsübergängen
- Induktionsschritt: $S .. \longrightarrow_L x_i A_i \alpha_i \longrightarrow_L x_{i+1} A_{i+1} \alpha_{i+1} \xrightarrow{*} w$
 - $x_i A_i \alpha_i \longrightarrow_L x_{i+1} A_{i+1} \alpha_{i+1}$ verlangt $A_i \rightarrow \beta \in P_G$ für ein β , wobei $\beta \alpha_i = x A_{i+1} \alpha_{i+1}$ für ein $x \in T^*$ und $x_{i+1} = x_i x \sqsubseteq w$.
 - Per Konstruktion gilt dann $(q, \beta) \in \delta(q, \epsilon, A_i)$ und mit der Induktionsannahme folgt $(q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i \alpha_i) \vdash (q, y_i, x A_{i+1} \alpha_{i+1})$
 - Wegen $x_{i+1} = x_i x \sqsubseteq w = x_i y_i$ kann y_i zerlegt werden in $x y_{i+1}$ und der PDA arbeitet x ab: $(q, y_i, x A_{i+1} \alpha_{i+1}) \vdash^* (q, y_{i+1}, A_{i+1} \alpha_{i+1})$
- Schlußfolgerung: $S = x_1 A_1 \alpha_1 .. \longrightarrow_L x_{m+1} A_{m+1} \alpha_{m+1} = w$
 - Wegen $w \in T^*$ folgt $x_{m+1} = w$ und $A_{m+1} = \alpha_{m+1} = y_{m+1} = \epsilon$
 - Also $(q, w, S) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$, d.h. $w \in L_\epsilon(P)$

KORREKTHEITSBEWEIS IM DETAIL: $L(G) \supseteq L_\epsilon(P)$

Für alle $X \in V$ gilt: wenn $(q, w, X) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$ dann $X \xrightarrow{*} w$

- Beweis durch Induktion über Länge der PDA Berechnung
- Basisfall: $(q, w, X) \vdash (q, \epsilon, \epsilon)$
 - Es folgt $X \rightarrow \epsilon \in P_G$ und $w = \epsilon$, also $X \xrightarrow{*} w$
- Induktionsschritt: $(q, w, X) \vdash^{n+1} (q, \epsilon, \epsilon)$
 - Da X oben im Stack steht, muß der erste Schritt die Form $(q, w, X) \vdash (q, w, Y_1..Y_k)$ für ein $X \rightarrow Y_1..Y_k \in P_G$ haben ($Y_i \in V \cup T$)
 - Dann gibt eine Zerlegung $w = w_1..w_k$ mit $(q, w_1w_2..w_k, Y_1Y_2..Y_k) \vdash^* (q, w_2..w_k, Y_2..Y_k) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$
 - Es folgt $(q, w_iw_{i+1}..w_k, Y_i) \vdash^* (q, w_{i+1}..w_k, \epsilon)$ also $(q, w_i, Y_i) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$
 - Per Induktionsannahme folgt $Y_i \xrightarrow{*} w_i$ für alle i
also $X \rightarrow Y_1..Y_k \xrightarrow{*} w_1..w_k = w$
- Es folgt $L_\epsilon(P) = \{w \mid (q, w, S) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)\} \subseteq \{w \mid S \xrightarrow{*} w\} = L(G)$

UMWANDLUNG EINER GRAMMATIK IN EINEN PDA

- $G_7 = (\{E, I\}, \{a, b, c, 0, 1, +, *, (,)\}, P_G, E)$

mit $P_G = \{ E \rightarrow I \mid E+E \mid E*E \mid (E)$

$I \rightarrow a \mid b \mid c \mid Ia \mid Ib \mid Ic \mid I0 \mid I1 \}$

- Erzeuge $P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, E, \emptyset)$

mit $V = \{E, I\}$ und $T = \{a, b, c, 0, 1, +, *, (,)\}$

– $\delta(q, \epsilon, E) = \{(q, I), (q, E+E), (q, E*E), (q, (E))\}$

– $\delta(q, \epsilon, I) = \{(q, a), (q, b), (q, c), (q, Ia), (q, Ib), (q, Ic), (q, I0), (q, I1)\}$

– $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$ – $\delta(q, +, +) = \{(q, \epsilon)\}$

– $\delta(q, b, b) = \{(q, \epsilon)\}$ – $\delta(q, *, *) = \{(q, \epsilon)\}$

– $\delta(q, c, c) = \{(q, \epsilon)\}$ – $\delta(q, (, () = \{(q, \epsilon)\}$

– $\delta(q, 0, 0) = \{(q, \epsilon)\}$ – $\delta(q,),) = \{(q, \epsilon)\}$

– $\delta(q, 1, 1) = \{(q, \epsilon)\}$

VON PUSHDOWN-AUTOMATEN ZU GRAMMATIKEN

Zu jedem PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ kann eine kfG G konstruiert werden mit $L_\epsilon(P) = L(G)$

- **Simuliere Abarbeitung eines Symbols vom Stack**
 - Verarbeite Variablen der Form “ (q, X, p) ” mit impliziter Bedeutung
“*Entfernen von X kann von Zustand q zu Zustand p führen*”
 - Entfernen von X kann zuerst ein $Y_1..Y_m$ auf- und dann abbauen
 - Beginne mit Erzeugung von Z_0 und zeige, daß Z_0 entfernt werden kann
- **Generiere $G = (\{S\} \cup Q \times \Gamma \times Q, \Sigma, P_G, S)$ mit**
 - $S \rightarrow (q_0, Z_0, q) \in P_G$ für alle $q \in Q$
 - $(q, X, q_m) \rightarrow a (p, Y_1, q_1) \dots (q_{m-1}, Y_m, q_m) \in P_G$,
für beliebige Kombinationen $q_1, \dots, q_m \in Q$, falls $(p, Y_1..Y_m) \in \delta(q, a, X)$
 $(q, X, p) \rightarrow a \in P_G$, falls $(p, \epsilon) \in \delta(q, a, X)$
- **Korrektheitsbeweis $L_\epsilon(P) = L(G)$**
 - Zeige: $(q, X, p) \xrightarrow{*} w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn $(q, w, X) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon)$
 $\sqsubseteq$: Induktion über Länge der PDA Berechnung
 $\sqsupseteq$: Induktion über Länge der Ableitung (viele Details)

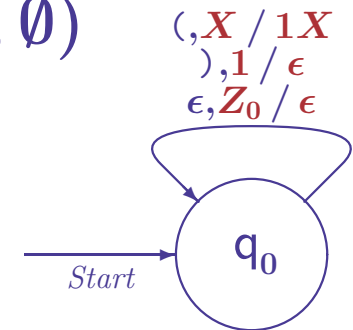
UMWANDLUNG EINES PDA IN EINE GRAMMATIK

- Gegeben $P_1 = (\{q\}, \{(\cdot)\}, \{Z_0, 1\}, \delta, q, Z_0, \emptyset)$

mit $\delta(q, (\cdot, X) = \{(q, 1X)\}$

$$\delta(q, \cdot, 1) = \{(q, \epsilon)\}$$

$$\delta(q, \epsilon, Z_0) = \{(q, \epsilon)\}$$



- Generiere $G = (\{(\cdot)\}, \{S, (q, Z_0, 1, q)\}, P_G, S)$

mit $P_G = S \rightarrow (q, Z_0, q)$

$$(q, Z_0, q) \rightarrow ((q, 1, q)(q, Z_0, q)$$

$$(q, Z_0, q) \rightarrow \epsilon$$

$$(q, 1, q) \rightarrow ((q, 1, q)(q, 1, q)$$

$$(q, 1, q) \rightarrow)$$

Wähle Kurzschreibweise A/B für Hilfssymbole (q, Z_0, q) bzw. $(q, 1, q)$:

$$G = (\{(\cdot)\}, \{S, A, B\}, P, S)$$

mit $P = \{S \rightarrow A, A \rightarrow (BA, A \rightarrow \epsilon, B \rightarrow (BB, B \rightarrow)\}$

BRAUCHEN WIR NICHTDETERMINISTISCHE AUTOMATEN?

- **Grammatiken sind nichtdeterministisch**

- Nichtdeterministische Automaten sind das “natürliche” Gegenstück
 - Grammatikregeln führen zu mengenwertiger Überföhrungsfunktion
- “Wirkliche” Automaten müssen deterministisch sein

- **Typ-3 Sprachen haben deterministische Modelle**

- NEAs können in äquivalente DEAs umgewandelt werden
- Teilmengenkonstruktion kann Automaten exponentiell vergrößern

- **Reichen deterministische PDAs für Typ-2 Sprachen?**

- Überföhrungsfunktion $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$ muß eindeutig sein
- Gibt es für PDAs immer äquivalente deterministische PDAs?

Ein **Deterministischer Pushdown-Automat (DPDA)** ist ein 7-Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ endliches **Eingabealphabet**
- Γ endliches **Stackalphabet**
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$ **Überföhrungsfunktion**
 - $\delta(q, \epsilon, X)$ nur definiert, wenn $\delta(q, a, X)$ für alle $a \in \Sigma$ undefiniert
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $Z_0 \in \Gamma$ **Initialsymbol des Stacks**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden (End-)Zuständen**

Erkannte Sprache

- $L_F(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F. \exists \beta \in \Gamma^*. (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \beta) \}$
- $L_\epsilon(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q. (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon) \}$

DPDAs SIND NICHT MÄCHTIG GENUG

- **DPDA-Sprachen sind eine echte Teilklasse von $\mathcal{L}_2$**

1. $L(DPDA) \subseteq \mathcal{L}_2$: Jeder DPDA ist ein spezieller PDA

2. DPDAs können $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ nicht erkennen

DPDA P kann nicht entscheiden, wo die Mitte eines Wortes liegt

- Wenn $0^n 1 10^n$ (großes n) gelesen ist, ist Stack durchs Zählen geleert
- Wenn noch einmal $0^n 1 10^n$ gelesen wird, muß P akzeptieren
- Wenn stattdessen $0^m 1 10^m$ ($m \neq n$) kommt, darf P nicht akzeptieren
- Aber die Information über n ist nicht mehr gespeichert (Details aufwendig)

- **DPDAs erkennen nur eindeutige Typ-2 Sprachen**

1. Für jeden DPDA P hat $L_\epsilon(P)$ eine eindeutige Grammatik

Für DPDAs ergibt die Umwandlung eine eindeutige Typ-2 Grammatik

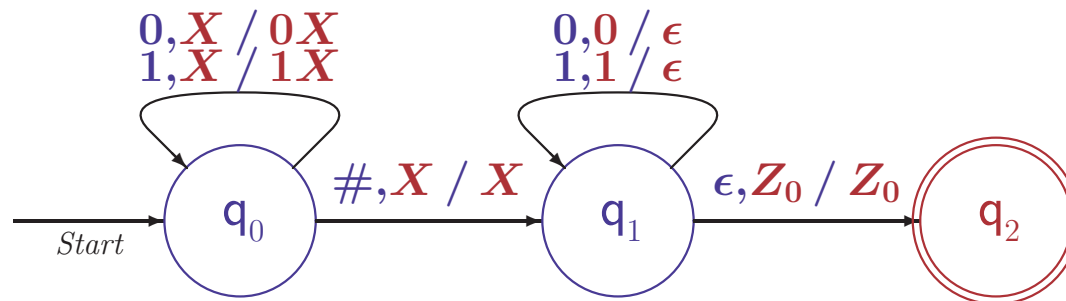
- Folge der Konfigurationsübergänge bestimmt Linksableitung eindeutig

2. Für jeden DPDA P hat $L_F(P)$ eine eindeutige Grammatik

Umwandlung in L_ϵ – DPDA kann deterministisch gemacht werden

DPDAs SIND MÄCHTIGER ALS ENDLICHE AUTOMATEN

- $\mathcal{L}_3 = L(DEA) \subseteq L_F(DPDA)$
 - Jeder DEA ist ein spezieller DPDA, der mit Endzustand akzeptiert
- $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\} \in L_F(DPDA) - L(DEA)$
 - L ist nicht regulär
 - Beweis durch Pumping Lemma, analog zu $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$
 - $L = L_F(P)$ für folgenden DPDA P



- P ist deterministisch, da ϵ -Übergang in q_1 genau bei Stacksymbol Z_0
- $\{0\}^* \notin L_\epsilon(DPDA)$
 - Wenn der Stack einmal leer ist, kann ein DPDA nicht mehr weiterarbeiten

- **Maschinenmodell für kontextfreie Sprachen**
 - Nichtdeterministischer endlicher Automat mit Stack und ϵ -Übergängen
 - Erkennung von Wörtern durch Endzustand oder leeren Stack
 - Erkennungsmodelle sind ineinander transformierbar
- **Verhaltensanalyse durch Konfigurationsübergänge**
 - Konfigurationen beschreiben ‘Gesamtzustand’ von Pushdown-Automaten
 - Konfigurationsübergänge verallgemeinern Überföhrungsfunktionen
- **Äquivalent zu kontextfreien Grammatiken**
 - Umwandlung von Konfigurationsübergängen in Regeln und umgekehrt
- **Deterministische PDAs sind weniger mächtig**
 - DPDAs erkennen nur eindeutige Typ-2 Sprachen
 - L_ϵ -DPDAs können nicht einmal alle regulären Sprachen erkennen