

Theoretische Informatik II



Einheit 4.3

Eigenschaften von $\mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1$ -Sprachen



1. Abschlußeigenschaften
2. Prüfen von Eigenschaften
3. Grenzen der Sprachklassen

SPRACHKLASSEN

- **Semi-entscheidbare Sprache**

- Sprache, die von einer Turingmaschine akzeptiert wird
- Auch **aufzählbare Sprache** genannt

- **Entscheidbare Sprache**

- Sprache, die von einer Turingmaschine akzeptiert wird, die bei jeder Eingabe terminiert
- Auch **rekursive Sprache** genannt

- **Kontextsensitive Sprache**

- Sprache, die von einem linear beschränkten Automaten akzeptiert wird

- **Entscheidbare Sprachen sind aufzählbar**

- Offensichtlich, da engere Bedingung

- **Kontextsensitive Sprachen sind entscheidbar**

- Ein LBA hat bei Eingabe w maximal $(|\Gamma| + |Q|)^{|w|+1}$ Konfigurationen
- Wenn der *LBA* nach $(|\Gamma| + |Q|)^{|w|+1}$ Schritten nicht akzeptiert, dann gehört w nicht zur Sprache und die Berechnung kann anhalten

ABSCHLUSSEIGENSCHAFTEN SUMMARISCH

- **Alle drei Sprachklassen sind abgeschlossen unter**
 - Vereinigung $L_1 \cup L_2$
 - Durchschnitt $L_1 \cap L_2$
 - Spiegelung L^R
 - Verkettung $L_1 \circ L_2$
 - Hüllenbildung L^*
 - Homomorphismen $h(L)$
 - Inverse Homomorphismen $h^{-1}(L)$
 - Urbild berechenbarer Funktionen $f^{-1}(L)$
- **Typ-1 und entscheidbare Sprachen zusätzlich**
 - Komplement \bar{L}
 - Differenz $L_1 - L_2$
 - Aufzählbare Sprachen: Bild berechenbarer Funktionen $f(L)$

Beweisführung mit Grammatiken

● Vereinigung $L_1 \cup L_2$

- Sei $L_i = L(G_i)$, wobei $G_i = (V_i, T_i, P_i, S_i)$ disjunkt
- Wähle $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}, S)$
- Die Eigenschaften der G_i bleiben erhalten und es gilt $L(G) = L_1 \cup L_2$

● Spiegelung L^R

- Bilde Spiegelgrammatik zu $G = (V, T, P, S)$ mit $L = L(G)$
 - Setze $G_R = (V, T, P_R, S)$ mit $P_R = \{l \rightarrow \alpha^R \mid l \rightarrow \alpha \in P\}$
- Die Eigenschaften von G bleiben erhalten und es gilt $L(G_R) = L^R$

● Analoge Beweise für $L_1 \circ L_2, L^*, h(L)$

- Verzweige aus Startsymbol oder modifiziere rechte Seite der Regeln

● Grammatiken helfen wenig bei Entscheidbarkeit

- Beweisführung mit Turingmaschinen ist sinnvoller

NACHWEIS DER ABSCHLUSSEIGENSCHAFTEN

● Vereinigung $L_1 \cup L_2$

- Sei $L_i = L(M_i)$, wobei $M_i = (Q_i, \Sigma_i, \Gamma_i, \delta_i, q_{0,i}, B, F_i)$ disjunkt
- Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern
- M akzeptiert genau dann, wenn M_1 oder M_2 akzeptieren
- Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1 \cup L_2$

● Durchschnitt $L_1 \cap L_2$

- Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern
- M akzeptiert genau dann, wenn M_1 und M_2 akzeptieren
- Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1 \cap L_2$

● Spiegelung L_1^R

- Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort umgedreht auf ein Hilfsband und simuliert M_1 auf diesem Band
- M akzeptiert genau dann, wenn M_1 akzeptiert
- Die Eigenschaften von M_1 bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1^R$

NACHWEIS DER ABSCHLUSSEIGENSCHAFTEN II

● Verkettung $L_1 \circ L_2$

- Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung des Wort $w = w_1 \circ w_2$, kopiert die w_i auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 entsprechend
- M akzeptiert genau dann, wenn M_1 und M_2 akzeptieren
- Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1 \circ L_2$

● Hülle L_1^*

- Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung des Wortes $w = w_1 \circ \dots \circ w_n$, kopiert die w_i der Reihe nach auf ein Hilfsband und simuliert M_1 entsprechend
- M akzeptiert genau dann, wenn M_1 alle w_i akzeptiert
- Die Eigenschaften von M_1 bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1^*$

● Homomorphismen $h(L_1)$

- Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung des Wort $w = w_1 \circ \dots \circ w_n$ mit $w_i = h(a_i)$, kopiert $v = a_1 \dots a_n$ auf ein Hilfsband und simuliert M_1 entsprechend
- M akzeptiert genau dann, wenn M_1 das Wort v akzeptiert
- Die Eigenschaften von M_1 bleiben erhalten und es gilt $L(M) = h(L_1)$

NACHWEIS DER ABSCHLUSSEIGENSCHAFTEN III

● Inverse Homomorphismen $h^{-1}(L_1)$

- Bei Eingabe eines Wortes $w = a_1..a_n$ bestimmt M das Wort $v = h(a_1)..h(a_n)$, kopiert es auf ein Hilfsband und simuliert M_1
- M akzeptiert genau dann, wenn M_1 das Wort v akzeptiert
- Es gilt $L(M) = h^{-1}(L_1)$
- Beweis gilt in dieser Form nur für (semi-)entscheidbare Sprachen
Für LBA's ist Simulation eines Bandes k -facher Länge erforderlich

● Komplement $\overline{L_1}$

- Bei Eingabe eines Wortes w simuliert M die Berechnung von M_1 und akzeptiert genau dann, wenn M_1 nicht akzeptiert
- Es gilt $L(M) = \overline{L_1}$
- Die Eigenschaften von M_1 bleiben nur erhalten, wenn M_1 terminiert
Bei aufzählbaren Sprachen terminiert die Berechnung für $w \in \overline{L_1}$ nicht

● Differenz $L_1 - L_2$

- Mathematische Begründung: $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$
- Abgeschlossenheit unter Differenz gilt für aufzählbare Sprachen nicht

AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHEIDBARKEIT

● L entscheidbar $\Leftrightarrow L$ und \bar{L} aufzählbar

“ \Rightarrow ”: Entscheidbare Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement

“ \Leftarrow ”: Sei $L=L(M_1)$ und $\bar{L}=L(M_2)$.

- Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern
- M akzeptiert genau dann, wenn M_1 akzeptiert und terminiert ohne zu akzeptieren, wenn M_2 akzeptiert
- Da eine der beiden Maschinen das Wort w akzeptieren muß, terminiert M und es gilt $L(M)=L$

● Jede endliche Sprache L ist entscheidbar

- Jede endliche Sprache ist als Liste von Wörtern $[w_1; \dots; w_n]$ darstellbar
- Bei Eingabe eines Wortes w vergleicht M das Wort mit dieser Liste

● L aufzählbar \Leftrightarrow es gibt ein entscheidbares

$L' \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ mit $L = \{w \mid \exists v. (w, v) \in L'\}$ (Projektionsatz)

- Aufwendiger Beweis, benötigt schrittweise Simulation von Maschinen

PRÜFEN VON EIGENSCHAFTEN SUMMARISCH

- **“ $x \in L$ ” kann automatisch geprüft werden für**
 - Kontextsensitive und entscheidbare Sprachen
(Folgt unmittelbar aus der Definition von Entscheidbarkeit)
 - Aber **nicht für aufzählbare Sprachen**
(Folgt aus Existenz einer aufzählbaren, aber unentscheidbaren Sprache)
- **Für keine Sprachklasse kann getestet werden ob**
 - eine Sprache L der Klasse **leer** ist
 - zwei Sprachen L_1 und L_2 der Klasse **gleich** sind
 - zwei Sprachen L_1 und L_2 der Klasse **ineinander enthalten** sind
 - der **Durchschnitt** zweier Sprachen der Klasse **leer** ist

Beweise benötigen Beispiele für Sprachen, die nicht zur Klasse gehören

GRENZEN DER SPRACHKLASSEN

● **Entscheidbare, nicht kontextsensitive Sprache**

- Menge aller äquivalenten regulären Ausdrücke (gelesen als Text), wenn diese eine Iteration $E^k = \underbrace{E \circ E \dots \circ E}_{k\text{-mal}}$ enthalten dürfen
- Äquivalenztest benötigt exponentiell großen Speicherplatz

● **Aufzählbare, nicht entscheidbare Sprache**

- **Selbstanwendbarkeitsproblem**: Menge aller Programme von Turingmaschinen, die bei Eingabe des eigenen Programms als Text terminieren

● **Nicht aufzählbare Sprache**

- **Totale Berechenbarkeit**: Menge aller Programme von Turingmaschinen, die bei jeder Eingabe terminieren

Mehr dazu in Theoretischer Informatik II

ZUSAMMENFASSUNG: TYP-0 UND TYP-1 SPRACHEN

- **Turingmaschine als allgemeinstes Maschinenmodell**
 - Deterministischer endlicher Automat mit unendlichem Speicherband
 - Gleiche Ausdruckskraft wie reale Computer (aber einfacher strukturiert)
 - Nichtdeterministische Variante mit exponentiellem Aufwand simulierbar
 - Äquivalent zu Typ-0 Grammatiken
 - Bei linearer Bandbeschränkung äquivalent zu Typ-1 Grammatiken
 - **Entscheidbare Sprachen** stehen zwischen \mathcal{L}_0 und \mathcal{L}_1
- **Wichtige Eigenschaften der Sprachklassen**
 - Abgeschlossen unter $\cup, \cap, R, \circ, *, h, h^{-1}$
 - \mathcal{L}_1 und entscheidbare Sprachen zusätzlich unter $\bar{}, -$
 - Viele Eigenschaften können nicht automatisch getestet werden
 - Fast alle nichttrivialen Eigenschaften sind für keine Klasse entscheidbar
 - Für \mathcal{L}_0 ist selbst das Wortproblem nicht mehr entscheidbar