Theoretische Informatik II

Einheit 4.3

Eigenschaften von $\mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1$-Sprachen

1. Abschlußeigenschaften
2. Prüfen von Eigenschaften
3. Grenzen der Sprachklassen

Sprachklassen

- **Semi-entscheidbare Sprache**
  - Sprache, die von einer Turingmaschine akzeptiert wird
  - Auch aufzählbare Sprache genannt
- **Entscheidbare Sprache**
  - Sprache, die von einer Turingmaschine akzeptiert wird, die bei jeder Eingabe terminiert
  - Auch rekursive Sprache genannt
- **Kontextsensitive Sprache**
  - Sprache, die von einem linear beschränkten Automaten akzeptiert wird
- **Entscheidbare Sprachen sind aufzählbar**
  - Offensichtlich, da engere Bedingung
- **Kontextsensitive Sprachen sind entscheidbar**
  - Ein LBA hat bei Eingabe w maximal $(|\Gamma| + |Q|)^{|w|+1}$ Konfigurationen
  - Wenn der LBA nach $(|\Gamma| + |Q|)^{|w|+1}$ Schritten nicht akzeptiert, dann gehört w nicht zur Sprache und die Berechnung kann anhalten

Abschlusseigenschaften summarisch

- **Alle drei Sprachklassen sind abgeschlossen unter**
  - Vereinigung $L_1 \cup L_2$
  - Durchschnitt $L_1 \cap L_2$
  - Spiegelung L^R
  - Verkettung $L_1 \circ L_2$
  - Hüllenbildung L^*
  - Homomorphismen $h(L)$
  - Inverse Homomorphismen $h^{-1}(L)$
  - Urbild berechenbarer Funktionen $f^{-1}(L)$
- **Typ-1 und entscheidbare Sprachen zusätzlich**
  - Komplement $\overline{L}$
  - Differenz $L_1 - L_2$
  - Aufzählbare Sprachen: Bild berechenbarer Funktionen $f(L)$

Nachweis der Abschlusseigenschaften

Beweisführung mit Grammatiken

- **Vereinigung $L_1 \cup L_2$**
  - Sei $L_i = L(G_i)$, wobei $G_i = (V_i, T_i, P_i, S_i)$ disjunkt
  - Wähle $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$
  - Die Eigenschaften der G_i bleiben erhalten und es gilt $L(G) = L_1 \cup L_2$
- **Spiegelung L^R**
  - Bilde Spiegelgrammatik zu $G = (V, T, P, S)$ mit $L = L(G)$
    - Setze $\boldsymbol{G_R} = (V, T, P_R, S)$ mit $\boldsymbol{P_R} = \{l \to \alpha^R \mid l \to \alpha \in P\}$
  - Die Eigenschaften von G bleiben erhalten und es gilt $L(G_R) = L^R$
- **Analoge Beweise für $L_1 \circ L_2$, L^*, $h(L)$**
  - Verzweige aus Startsymbol oder modifiziere rechte Seite der Regeln
- **Grammatiken helfen wenig bei Entscheidbarkeit**
  - Beweisführung mit Turingmaschinen ist sinnvoller

Nachweis der Abschlusseigenschaften

- **Vereinigung $L_1 \cup L_2$**
  - Sei $L_i = L(M_i)$, wobei $M_i = (Q_i, \Sigma_i, \Gamma_i, \delta_i, q_{0,i}, B, F_i)$ disjunkt
  - Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 oder M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M){=}L_1{\cup}L_2$
- **Durchschnitt $L_1 \cap L_2$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 und M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M){=}L_1{\cap}L_2$
- **Spiegelung L_1^R**
  - Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort umgedreht auf ein Hilfsband und simuliert M_1 auf diesem Band
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 akzeptiert
  - Die Eigenschaften von M_1 bleiben erhalten und es gilt $L(M){=}L_1^R$

Nachweis der Abschlusseigenschaften II

- **Verkettung $L_1 \circ L_2$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung das Wort $w = w_1 \circ w_2$, kopiert die w_i auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 entsprechend
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 und M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1 \circ L_2$
- **Hülle L_1^***
  - Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung des Wortes $w = w_1 \circ .. \circ w_n$, kopiert die w_i der Reihe nach auf ein Hilfsband und simuliert M_1 entsprechend
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 alle w_i akzeptiert
  - Die Eigenschaften von M_1 bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1^*$
- **Homomorphismen $h(L_1)$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung das Wort $w = w_1 \circ .. \circ w_n$ mit $w_i = h(a_i)$, kopiert $v = a_1 .. a_n$ auf ein Hilfsband und simuliert M_1 entsprechend
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 das Wort v akzeptiert
  - Die Eigenschaften von M_1 bleiben erhalten und es gilt $L(M) = h(L_1)$

Nachweis der Abschlusseigenschaften III

- **Inverse Homomorphismen $h^{-1}(L_1)$**
  - Bei Eingabe eines Wortes $w = a_1..a_n$ bestimmt M das Wort $v = h(a_1)..h(a_n)$, kopiert es auf ein Hilfsband und simuliert M_1
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 das Wort v akzeptiert
  - Es gilt $L(M)=h^{-1}(L_1)$
  - Beweis gilt in dieser Form nur für (semi-)entscheidbare Sprachen
    Für LBA's ist Simulation eines Bandes k-facher Länge erforderlich
- **Komplement $\overline{L_1}$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w simuliert M die Berechnung von M_1 und akzeptiert genau dann, wenn M_1 nicht akzeptiert
  - Es gilt $L(M)=\overline{L_1}$
  - Die Eigenschaften von M_1 bleiben nur erhalten, wenn M_1 terminiert
    Bei aufzählbaren Sprachen terminiert die Berechnung für $w \in \overline{L_1}$ nicht
- **Differenz L_1-L_2**
  - Mathematische Begründung: $L_1\text{-}L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$
  - Abgeschlossenheit unter Differenz gilt für aufzählbare Sprachen nicht

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **L entscheidbar $\Leftrightarrow$ L und $\overline{L}$ aufzählbar**

  "$\Rightarrow$": Entscheidbare Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement

  "$\Leftarrow$": Sei $L{=}L(M_1)$ und $\overline{L}{=}L(M_2)$.

  – Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern

  – M akzeptiert genau dann, wenn M_1 akzeptiert und terminiert ohne zu akzeptieren, wenn M_2 akzeptiert

  – Da eine der beiden Maschinen das Wort w akzeptieren muß, terminiert M und es gilt $L(M){=}L$

- **Jede endliche Sprache L ist entscheidbar**

  – Jede endliche Sprache ist als Liste von Wörtern $[w_1; ..; w_n]$ darstellbar

  – Bei Eingabe eines Wortes w vergleicht M das Wort mit dieser Liste

- **L aufzählbar $\Leftrightarrow$ es gibt ein entscheidbares $L'\subseteq \Sigma^*{\times}\Sigma^*$ mit $L = \{w \mid \exists v. (w,v) \in L'\}$** (Projektionssatz)

  – Aufwendiger Beweis, benötigt schrittweise Simulation von Maschinen

Prüfen von Eigenschaften summarisch

- **“$x \in L$” kann automatisch geprüft werden für**
  - Kontextsensitive und entscheidbare Sprachen

    (Folgt unmittelbar aus der Definition von Entscheidbarkeit)
  - Aber **nicht für aufzählbare Sprachen**

    (Folgt aus Existenz einer aufzählbaren, aber unentscheidbaren Sprache)

- **Für keine Sprachklasse kann getestet werden ob**
  - eine Sprache L der Klasse leer ist
  - zwei Sprachen L_1 und L_2 der Klasse gleich sind
  - zwei Sprachen L_1 und L_2 der Klasse ineinander enthalten sind
  - der Durchschnitt zweier Sprachen der Klasse leer ist

  Beweise benötigen Beispiele für Sprachen, die nicht zur Klasse gehören

Grenzen der Sprachklassen

- **Entscheidbare, nicht kontextsensitive Sprache**
  - Menge aller äquivalenten regulären Ausdrücke (gelesen als Text), wenn diese eine Iteration $E^k = \underbrace{E{\circ}E...{\circ}E}_{k-mal}$ enthalten dürfen
  - Äquivalenztest benötigt exponentiell großen Speicherplatz
- **Aufzählbare, nicht entscheidbare Sprache**
  - Selbstanwendbarkeitsproblem: Menge aller Programme von Turingmaschinen, die bei Eingabe des eigenen Programms als Text terminieren
- **Nicht aufzählbare Sprache**
  - Totale Berechenbarkeit: Menge aller Programme von Turingmaschinen, die bei jeder Eingabe terminieren

Mehr dazu in Theoretischer Informatik II

Zusammenfassung: Typ-0 und Typ-1 Sprachen

- **Turingmaschine als allgemeinstes Maschinenmodell**
  - Deterministischer endlicher Automat mit unendlichem Speicherband
  - Gleiche Ausdruckskraft wie reale Computer (aber einfacher strukturiert)
  - Nichtdeterministische Variante mit exponentiellem Aufwand simulierbar
  - Äquivalent zu Typ-0 Grammatiken
  - Bei linearer Bandbeschränkung äquivalent zu Typ-1 Grammatiken
  - Entscheidbare Sprachen stehen zwischen $\mathcal{L}_0$ und $\mathcal{L}_1$
- **Wichtige Eigenschaften der Sprachklassen**
  - Abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, ^{R}, $\circ$, *, h, h^{-1}
  - $\mathcal{L}_1$ und entscheidbare Sprachen zusätzlich unter $\overline{}$, -
  - Viele Eigenschaften können nicht automatisch getestet werden
    - Fast alle nichtrivialen Eigenschaften sind für keine Klasse entscheidbar
    - Für $\mathcal{L}_0$ ist selbst das Wortproblem nicht mehr entscheidbar