Theoretische Informatik II

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2006

Übung 2 (Version 4) — Abgabetermin: Montag, 8.5.2006, 11.00 Uhr

---

Was Sie als Vorbereitung auf diese Übung wissen sollten

- Wie ist der Zusammenhang zwischen der Berechenbarkeit von Funktionen und der Entscheidbarkeit bzw. Semientscheidbarkeit von Mengen?
- Aus welchen Grundfunktionen und welchen Operationen auf Funktionen können rekursive Funktionen gebildet werden? Wodurch unterscheiden sich rekursive und primitiv-rekursive Funktionen?
- Welche Programmiertechniken für primitiv-rekursive Funktionen gibt es? Welche Beispiele für primitiv-rekursive Funktionen gibt es?

Aufgabe 2.1

Zeigen Sie, dass die Funktionen (außer ggT und kgv) auf den Folien 9 und 12 des Abschnitts §4.3 primitiv-rekursiv sind (die Funktionen seien jeweils auf der Menge $\mathbb{N}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \dots\}$ definiert). Dabei können Sie die Funktionen verwenden, von denen in der Vorlesung bereits gezeigt wurde, dass sie primitiv-rekursiv sind.

Aufgabe 2.2

Zeigen Sie, dass jede rekursive Funktion Turing-berechenbar ist.

Hausaufgabe 2.3

Konstruieren Sie eine Turingmaschine, welche die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_{\geq 0} \text{ und } k = ggT(i, j)\}$ akzeptiert, wobei $ggT(i, j)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen i und j bezeichnet. Verwenden Sie zur Berechnung der Funktion ggT den klassischen Euklidischen Algorithmus, der auf wiederholter Subtraktion basiert.

1. Beschreiben Sie die Arbeitsweise der Turingmaschine informal, aber trotzdem präzise. Begründen Sie, warum die von Ihnen beschriebene Turingmaschine korrekt ist. Die Korrektheit des Euklidischen Algorithmus können Sie dabei voraussetzen.
2. Geben Sie obere Schranken für die Zeit- und Platzkomplexität Ihrer Turingmaschine an (die Größenordnung ist ausreichend).

Hausaufgabe 2.4

Zeigen Sie, dass die Funktion ggT primitiv-rekursiv ist. Dabei können Sie die Funktionen verwenden, von denen in der Vorlesung oder den Übungen bereits gezeigt wurde, dass sie primitiv-rekursiv sind.

Hausaufgabe 2.5

Beweisen Sie, dass die primitiv-rekursiven Funktionen unter Vertauschung von Variablen abgeschlossen sind. Zeigen Sie dazu, dass für jede primitiv-rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und jede Permutation $\pi \in S_n$ auch die Funktion $g_{f,\pi} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ mit $g_{f,\pi}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ primitiv-rekursiv ist (S_n ist die symmetrische Gruppe vom Grad n, d.h. die Gruppe aller Permutationen von n Symbolen).