Theoretische Informatik II

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2006

Übung 4 (Version 2) — Abgabetermin: 22.5.2006, 11.00 Uhr

Was Sie als Vorbereitung auf diese Übung wissen sollten

- Was ist der λ-Kalkül und aus welchen Basisregeln besteht er? Wie werden λ-Terme ausgewertet? Was versteht man unter einer Substitution?
- Wie lassen sich Boolesche Operatoren, Paare und natürliche Zahlen im λ-Kalkül darstellen?
- Was ist ein Fixpunktkombinator und wofür wird er verwendet?
- Wie ausdrucksstark ist der λ-Kalkül?

Aufgabe 4.1

Betrachten Sie die Definition der λ-Terme zero und p auf Folie 9.

1. Reduzieren Sie die λ-Terme $\mathsf{zero}\ \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,x$, $\mathsf{zero}\ \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f\ x$ und $\mathsf{zero}\ \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^2\ x$ so weit wie möglich.
2. Zeigen Sie, dass $\mathsf{zero}\ \overline{n}$ für $n = 0$ zu T und für $n > 0$ zu F reduziert
3. Reduzieren Sie die λ-Terme $\mathsf{p}\ \overline{0}$ und $\mathsf{p}\ \overline{n+1}$ so weit wie möglich.

Aufgabe 4.2

Geben Sie zwei λ-Terme sub und less an, für die gilt

$$\mathsf{sub}\ \overline{m}\ \overline{n} = \overline{m-n} \text{ und } \mathsf{less}\ \overline{m}\ \overline{n} = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{wenn } m < n, \\ \mathsf{F} & \text{wenn } m \geq n. \end{cases}$$

Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Aufgabe 4.3

Beschreiben Sie die Funktion, die durch den λ-Term

$$\mathsf{letrec}\ f(x) = \lambda y\,.\,\mathsf{if}\ \mathsf{zero}\ y\ \mathsf{then}\ \overline{1}\ \mathsf{else}\ \mathsf{mul}\ x\ (f\ x\ (\mathsf{p}\ y))$$

repräsentiert wird.

Hausaufgabe 4.4

Betrachten Sie die Definition des λ-Terms mul.

1. Reduzieren Sie die λ-Terme $\mathsf{mul}\ \overline{3}\ \overline{0}$, $\mathsf{mul}\ \overline{3}\ \overline{1}$ und $\mathsf{mul}\ \overline{3}\ \overline{2}$ so weit wie möglich.
2. Zeigen Sie, dass $\mathsf{mul}\ \overline{m}\ \overline{n}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ zu $\overline{m \times n}$ reduziert.

Hausaufgabe 4.5

Um den ganzzahligen Anteil der Quadratwurzel einer natürlichen Zahl n zu bestimmen, genügt es zu zählen, wie viele Elemente der Folge der ungeraden Zahlen sich von n subtrahieren lassen, ohne dass das Ergebnis negativ wird (dieser Algorithmus basiert auf der sogenannten Pell-Gleichung). Zum Beispiel ist $47 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 = 11$, d.h. von 47 lassen sich 6 Elemente der Folge subtrahieren, $\lfloor\sqrt{47}\rfloor$ ist also 6 ($\sqrt{47} = 6.8556546$). Geben Sie einen λ-Ausdruck sqrt an, für den $\mathsf{sqrt}\ \overline{n} \xrightarrow{\beta} \overline{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ gilt und der diesen Algorithmus implementiert. Sie können dabei alle λ-Ausdrücke verwenden, die aus der Vorlesung oder den Übungen bekannt sind.

Hausaufgabe 4.6

Betrachten Sie folgende Aussage: „Für jeden λ-Term ist nach endlich vielen Schritten keine Reduktion mehr möglich.“ Trifft diese Aussage zu? Begründen Sie Ihre Antwort.