# Theoretische Informatik II

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2006

**Übung 5 (Version 3)**

---

## Was Sie als Vorbereitung auf diese Übung wissen sollten

- Was versteht man unter einer logischen Theorie und was bedeutet es, dass eine Formel in einer Theorie gültig ist?
- Wie lassen sich Funktionen in logischen Theorien repräsentieren?
- Woraus besteht die Theorie $\mathcal{Q}$? Wie kann $\mathcal{Q}$ interpretiert werden? Welche Funktionen lassen sich in $\mathcal{Q}$ darstellen?
- Wie lassen sich Entscheidbarkeit, Semi-Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit von Mengen durch den Begriff der Berechenbarkeit von Funktionen ausdrücken?
- Was bedeuten die Kernaxiome der Berechenbarkeitstheorie?

## Aufgabe 5.1

Zeigen Sie, dass die Funktionen $min$, $max$, $sqrt$, $kgV$, und $ggT$ (siehe Einheit 4.3, Folie 12) in der Theorie $\mathcal{Q}$ dargestellt werden können. Geben Sie dazu Prädikate an, die diese Funktionen repräsentieren.

## Aufgabe 5.2

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln in der Theorie $\mathcal{Q}$ nicht gültig sind.

1. $\forall x.x \neq \mathsf{s}(x)$.
2. $\forall x, y.x + y = y + x$.
3. $\forall x, y, z.x + (y + z) = (x + y) + z$.
4. $\forall x.\overline{0} + x = x$.
5. $\forall x, y.x * y = y * x$.
6. $\forall x.\overline{0} * x = \overline{0}$.

Konstruieren Sie dazu eine Interpretation von $\mathcal{Q}$, welche die Axiome $Q_1, \ldots, Q_7$ (Einheit 4.4, Folie 15) erfüllt, in der diese Formeln aber nicht gelten (dies kann natürlich nicht die Standard-Interpretation von $\mathcal{Q}$ sein).

### Aufgabe 5.3

Beweisen Sie die folgenden Sätze über Turingmaschinen mit Hilfe der Berechenbarkeitsaxiome. Diskutieren Sie die Bedeutung dieser Sätze.

1. Man kann eine Turingmaschine konstruieren, die auf jeder Eingabe anhält und die für jede Eingabe $x$ die Beschreibung einer Turingmaschine erzeugt, die für jede Eingabe die Zeichenkette $x$ erzeugt.

2. Sei $T$ eine Turingmaschine und sei $t$ die von ihr berechnete Funktion. Dann kann man die Beschreibung $\langle R \rangle$ einer Turingmaschine $R$ konstruieren, die eine Funktion $r$ berechnet, für die gilt: $r(x) = t(\langle \langle R \rangle, x \rangle)$ für alle $x$.