Theoretische Informatik II

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2006

Übung 6 (Version 2) — Abgabetermin: 6.6.2006, 11.00 Uhr

Was Sie als Vorbereitung auf diese Übung wissen sollten

- Wann ist eine Funktion berechenbar und wie lassen sich Entscheidbarkeit, Semientscheidbarkeit und Aufzählbarkeit von Mengen durch den Begriff der Berechenbarkeit ausdrücken?
- Welche äquivalenten Charakterisierungen der rekursiven Aufzählbarkeit einer Menge gibt es? Wann ist eine Menge entscheidbar?
- Unter welchen Operationen sind aufzählbare Mengen abgeschlossen? Unter welchen Operationen sind entscheidbare Mengen abgeschlossen?
- Welche Techniken zum Nachweis der Unlösbarkeit eines Problems gibt es?

Aufgabe 6.1

Geben Sie eine Turingmaschine an, die eine Folge $\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle, \dots$ von Beschreibungen von Turingmaschinen aufzählt, so dass jede Turingmaschine in der Aufzählung vorkommt und keine zwei aufeinanderfolgenden Turingmaschinen M_i und M_{i+1} die gleiche Funktion berechnen oder beweisen Sie, dass es eine solche Turingmaschine nicht geben kann.

Aufgabe 6.2

Eine Turingmaschine M mit Beschreibung $\langle M\rangle$ heiße minimal, wenn es keine Turingmaschine mit einer kürzeren Beschreibung gibt, welche die gleiche Sprache akzeptiert wie M. Beweisen Sie, dass die Sprache $\{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \text{ ist die Beschreibung einer minimalen Turingmaschine}\}$ nicht rekursiv aufzählbar ist. Verwenden Sie den in Übung 5.3.2 angegebenen Satz.

Aufgabe 6.3

Für eine berechenbare Funktion f sei $\bar{f}$ definiert als

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \text{ definiert ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $\bar{f}$ ist für jedes f offensichtlich total. Man könnte $\bar{f}$ als eine Vervollständigung von f interpretieren. Beweisen Sie, dass nicht für jede berechenbare Funktion f eine berechenbare Vervollständigung $\bar{f}$ existieren kann.

Hausaufgabe 6.4

Beweisen Sie, dass für jede streng monotone berechenbare totale Funktion f die Menge $\text{range}(f)$ entscheidbar ist.

Hausaufgabe 6.5

Beweisen Sie, dass nicht entscheidbar ist, ob eine Turingmaschine ein Wort akzeptiert. Zeigen Sie dazu, dass die Sprache $\{\langle\langle M\rangle, w\rangle \mid \langle M\rangle, w \in \{0,1\}^*, \langle M\rangle$ codiert eine Turingmaschine M und M akzeptiert $w\}$ nicht entscheidbar ist. Beziehen Sie sich in Ihrem Beweis nicht direkt auf die Beweismethode der Diagonalisierung, sondern verwenden Sie den in Übung 5.3.2 angegebenen Satz.

Hausaufgabe 6.6

Sei $\leq_\Sigma \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ eine entscheidbare totale Ordnung auf Wörtern über dem Alphaber Σ, für die sich alle Wörter von Σ^* in der Form $\#w_1\#w_2\#\ldots$ mit $w_i \leq_\Sigma w_{i+1}$ durch eine Turingmaschine S aufzählen lassen. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $M \subseteq \Sigma^*$ genau dann entscheidbar ist, wenn es eine Turingmaschine T gibt, welche die Elemente von M aufsteigend nach $\leq_\Sigma$ geordnet aufzählt, d.h. wenn T eine Zeichenkette der Art $\#w_1\#w_2\#\ldots$ mit $w_i \leq_\Sigma w_{i+1}$ auf ihr Band schreibt.