

## Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Dr. Eva Richter

Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Wintersemester 2007

**Blatt 0 (Version 1) — Abgabetermin: –**

---

**Vorbemerkung** In vielen Übungsaufgaben werden Sie aufgefordert werden, eine These zu beweisen oder zu widerlegen. Da man Zusammenhänge oft erst dann richtig versteht, wenn man nicht nur weiß, *daß* eine Sache sich so verhält, sondern auch *warum*, soll Ihnen das Beweisen helfen, sich tiefer mit dem Stoff aus der Vorlesung zu beschäftigen. Außerdem ist das Beweisen die zentrale wissenschaftliche Methode in der Informatik und gehört deshalb ebenso zum Lehrprogramm wie die Fakten. Für einen korrekten Beweis müssen alle Argumente sauber formuliert werden und der logische Faden der Argumentation muß gut zu erkennen sein. Leider gibt es keine allgemeine Vorschrift, wie man einen Beweis findet. Die folgenden Hinweise sollen Ihnen helfen zu lernen, wie man einen Beweis findet.

1. Lesen Sie die Behauptung, die Sie beweisen wollen, sorgfältig durch. Haben Sie die Notation vollständig verstanden? Versuchen Sie die Behauptung mit Ihren eigenen Worten zu formulieren. Zerlegen Sie die Behauptung in kleinere Bestandteile und betrachten Sie jeden Teil separat. (Manchmal sind die Teile nicht ohne weiteres zu erkennen, z. B. muß bei „ $X$  gilt genau dann wenn  $Y$  gilt“ sowohl bewiesen werden, daß  $X$  aus  $Y$  folgt, als auch, daß  $Y$  aus  $X$  folgt.)
2. Sie sollten zunächst versuchen ein „gutes Gespür“ dafür zu entwickeln, warum die Aussage wahr sein sollte. Experimentieren Sie dazu mit Beispielen. Wenn behauptet wird, daß alle Objekte eines bestimmten Typs eine spezielle Eigenschaft haben, sehen Sie sich ein paar davon genauer an und überprüfen Sie das. Nachdem Sie das getan haben, versuchen Sie ein Gegenbeispiel zu konstruieren, d.h. ein Objekt zu finden, daß nicht diese Eigenschaft hat. Wenn die Aussage wahr ist, ist das nicht möglich. Zu verstehen aus welchem Grund Sie in Schwierigkeiten geraten, wenn Sie ein Gegenbeispiel zu konstruieren versuchen, wird Ihnen helfen zu verstehen, warum die Behauptung wahr ist.
3. Wenn Sie mit dem Beweisen feststecken, versuchen Sie zunächst einen Spezialfall Ihrer Aussage zu beweisen. Wenn Sie versuchen zu beweisen, daß eine Eigenschaft für alle  $k > 0$  gilt, versuchen Sie sie zuerst für  $k = 1$  zu beweisen und bei Erfolg für  $k = 2$  usw. bis Sie den allgemeinen Fall verstanden haben. Wenn der Spezialfall zu schwierig ist, versuchen Sie es zunächst mit einem anderen oder mit einem Spezialfall des Spezialfalles.
4. Wenn Sie glauben, daß Sie einen Beweis gefunden haben, müssen Sie alles sauber aufschreiben. Ein gut aufgeschriebener Beweis ist eine Folge von Feststellungen, bei denen jede durch einfaches Folgern aus den vorhergehenden abgeleitet werden kann. Das sorgfältige Aufschreiben des Beweises ist wichtig für den Leser, damit er ihn nachvollziehen kann und für Sie selbst, um sichzugehen, daß er fehlerfrei ist.

### Aufgabe 1

Beweisen Sie das DeMorgan-Gesetz: Für alle Mengen  $A$  und  $B$  gilt  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ .

### Aufgabe 2

Beweisen Sie, daß in jedem Graphen  $G$  mit Knotenmenge  $K$  und Kantenmenge  $E$  die Summe der Grade der Knoten eine gerade Zahl ist.

### Aufgabe 3

Beweisen Sie, daß  $\sqrt{2}$  eine irrationale Zahl ist.

### Aufgabe 4

Bei einem Hypothekenkredit zum Kauf eines Hauses wird typischerweise vereinbart, daß eine feste Rate über eine gewisse Anzahl von Jahren gezahlt wird. Nach Ablauf dieser Zeit ist die Schuld dann vollständig getilgt. Diese feste Rate setzt sich zusammen zum Teil aus Zinszahlung und zum anderen Teil aus Tilgung, wobei sich das Verhältnis während der Laufzeit zugunsten der Tilgung verändert. Wir wollen eine Formel für Restschuld  $S_t$  nach einer gewissen Anzahl  $t$  von Monaten bestimmen. Dazu werden zunächst folgende Bezeichnungen eingeführt.  $S$  sei die anfängliche Schuld,  $Z$  bezeichnet den Zinsfaktor, wobei  $Z = 0.06$  bedeutet, daß der jährliche Zinssatz 6% beträgt. Die monatliche Rate soll mit  $R$  bezeichnet werden. Der Bequemlichkeit halber definieren wir mit Hilfe von  $Z$  eine weitere Variable für den sogenannten Monatsmultiplikator:  $M = 1 + Z/12$ .

1. Beweisen Sie, daß für alle  $t \geq 0$  für die verbleibende Schuld nach  $t$  Monaten gilt:

$$S_t = SM^t - R \left( \frac{M^t - 1}{M - 1} \right).$$

2. Verwenden Sie die gerade bewiesene Formel um eine Formel für die Höhe der monatlichen Rate  $M$  in Abhängigkeit (als Funktion) von ursprünglicher Schuld  $S$ , Zinssatz  $Z$  und Laufzeit  $t$  zu bestimmen.