
Übung zur Vorlesung
Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Dr. Eva Richter
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Wintersemester 2007

Blatt 1 (Version 2) — Abgabetermin: 29. Oktober 2007, 12:30 Uhr

Zunächst einige Hinweise...

Hausaufgaben Für jede Hausaufgabe können Sie maximal 3 Punkte bekommen. Die Punkte werden nach folgenden Regeln vergeben:

- 3 Punkte* = die Aufgabe wurde im Wesentlichen korrekt gelöst
- 2 Punkte* = die Aufgabe wurde nur teilweise gelöst
- 1 Punkt* = die Lösung der Aufgabe enthielt größere Fehler oder Lücken
- 0 Punkte* = die Aufgabe wurde nicht gelöst oder enthielt sehr viele Fehler oder Lücken

Sprechzeiten Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- Sprechen Sie in den Übungen Ihren Tutor bzw. Ihre Tutorin an.
- Prof. Dr. Christoph Kreitz, Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. (0331) 977 3060,
Sprechstunde: Donnerstag 15:30–16:30 Uhr und immer, wenn die Tür des Raumes 1.18 offen steht
- Dr. Eva Richter, Raum 1.22, erichter@cs.uni-potsdam.de, Tel. (0331) 977 3065,
Sprechstunde: Dienstag 13:30–15:00 Uhr und nach Vereinbarung

Aufgabe 1.1

Wo ist der Fehler in folgendem „Beweis“?

„Wenn M eine nichtleere Menge ist, dann sind alle ihre Elemente gleich. Wir beweisen durch Induktion über $|M|$: Wenn $|M| = 1$, dann ist die Bedingung trivialerweise erfüllt. Angenommen $|M| = n$ und die Bedingung gilt für alle Mengen M' mit $|M'| < n$. Dann lässt sich M zerlegen in $M = M_1 \cup M_2$, so dass $|M_1| = |M_2| < n$ gilt und es ein Element a gibt mit $a \in M_1$ und $a \in M_2$. Weil nach der Induktionshypothese alle Elemente in M_1 gleich sind, alle Elemente in M_2 gleich sind und M_1 und M_2 das Element a enthalten, müssen auch alle Elemente in M gleich sein.“

Funktionen und Relationen Eine Funktion ist ein mathematisches Objekt, das eine Eingabe-Ausgabe-Beziehung herstellt. Dabei produziert eine Funktion für dieselbe Eingabe immer dieselbe Ausgabe. Wenn f eine Funktion ist, die bei Eingabe von a den Wert b liefert, dann schreiben wir $f(a) = b$. Die Menge der möglichen Eingaben heißt *Definitionsbereich*. Die Menge aus der die Ausgaben (Funktionswerte) stammen heißt *Wertebereich*. Die übliche Schreibweise für „ f ist eine Funktion mit Definitionsbereich D und Wertebereich W “ ist $f : D \rightarrow W$.

Eine *Eigenschaft* ist eine Funktion mit dem Wertebereich $\{\text{wahr}, \text{falsch}\}$. Zum Beispiel ist *ungerade* eine Eigenschaft, die *wahr* ist, wenn die Eingabe eine ungerade Zahl ist und *falsch* ist, wenn die Eingabe eine gerade Zahl ist: $\text{ungerade}(4) = \text{false}$. Ist die Eingabe für die Eigenschaft aus mehreren Werten zusammengesetzt, d.h. der Definitionsbereich besteht aus einer Menge von

Tutoren: marcelgoehring@arcor.de, marius.rks@gmx.net, troelenb@uni-potsdam.de,
Robert.Gurol@student.hpi.uni-potsdam.de, miracelwhipp@gmx.de (Jan Schwarz)

k -Tupeln eines bestimmten Typs dann nennt man eine solche Eigenschaft *k-stellige Relation*. So ist die Eigenschaft teilerfremd zueinander zu sein eine zweistellige Relation. Die Relation $\text{produkt}(a, b, c) = \text{wahr}$ wenn $a \cdot b = c$ ist eine dreistellige Relation, die die Eigenschaft beschreibt, daß a und b die Faktoren des Produktes c sind. Manchmal ist die Beschreibung von Eigenschaften durch Mengen bequemer als durch Funktionen. Die Eigenschaft $P : D \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ kann geschrieben werden als (D, S) , wobei $S = \{a \in D \mid P(a) = \text{wahr}\}$. Statt der Funktion *produkt* beschreibt man mit $\text{Produkt} = \{a, b, c \in \mathbb{N} \mid a \cdot b = c\}$ einfach die Menge der 3-Tupel, die die Eigenschaft erfüllen; bei denen der Funktionswert von *produkt* *wahr* ist.

Aufgabe 1.2

Das Spiel „Stein, Schere, Papier“ ist ein Zwei-Personen-Spiel, bei dem beide Spieler simultan durch bestimmte Handzeichen einen der drei Gegenstände bezeichnen. Mit der Menge $S = \{(Schere, Papier), (Papier, Stein), (Stein, Schere)\}$ sei die vollständige Gewinnrelation gegeben, also „Schere gewinnt gegen Papier“ usw. Geben Sie eine vollständige Wertetabelle für diese Relation an.

Aufgabe 1.3

Gegeben sei ein Schachbrett mit 64 Feldern. Die Bezeichnung der Felder erfolgt durch Paare aus Zahlen zwischen 1 und 8. So ist das Feld $(1, 1)$ die linke obere Ecke, das Feld $(8, 8)$ die rechte untere Ecke. Die binäre Relation R soll für zwei Felder F_1 und F_2 beschreiben, ob F_2 von F_1 aus in einem Zug mit dem Springer zu erreichen ist. Geben Sie die Relation R in Mengenschreibweise an.

Äquivalenzrelationen Eine binäre Relation R heißt *reflexiv*, wenn für alle a gilt aRa . Sie heißt *symmetrisch*, wenn mit xRy auch stets yRx gilt. R heißt *transitiv*, wenn für alle x, y, z gilt, daß aus xRy und yRz folgt, daß xRz . Erfüllt eine Relation alle drei Bedingungen, dann heißt sie *Äquivalenzrelation*.

Hausaufgabe 1.4

Geben Sie zu jeder der drei Eigenschaften an, ob die Relation aus Aufgabe 1.3 sie erfüllt oder nicht und beweisen Sie Ihre Behauptungen.

Hausaufgabe 1.5

Zwei natürliche Zahlen m, n heißen *kongruent modulo 3*, geschrieben als $m \equiv n \pmod{3}$, wenn sie bei Division durch 3 denselben Rest haben. Beweisen Sie, daß die Relation S definiert durch $S = \{(a, b) \in \mathbb{N} \mid a \equiv b \pmod{3}\}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Hausaufgabe 1.6

Seien $R, S \subseteq A \times A$ zwei Äquivalenzrelationen über einer Menge A . Beweisen Sie, daß dann auch $R \cap S$ eine Äquivalenzrelation ist.