

Übung zur Vorlesung
Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Dr. Eva Richter
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Wintersemester 2007

Blatt 6 (Version 1) — Abgabetermin: 3. Dezember 2007, 12:30 Uhr

Aufgabe 6.1

Beweisen Sie, daß die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält genauso viele } a\text{-s wie } b\text{-s}\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 6.2

Eine Zeichenkette x heißt *Präfix* einer Zeichenkette y , wenn eine Zeichenkette z existiert, sodaß $xz = y$; x heißt *echter Präfix* von y , wenn außerdem gilt $x \neq y$. Wir definieren im Folgenden zwei Operationen auf der Menge der Sprachen. Für jede Sprache L sei:

- a) $NOPREFIX(L) = \{w \in L \mid \text{kein echter Präfix von } w \text{ gehört zu } L\}$,
- b) $NOEXTEND(L) = \{w \in L \mid w \text{ ist kein echter Präfix eines Wortes in } L\}$.

Beweisen Sie, daß die Klasse der regulären Sprachen abgeschlossen ist unter diesen Operationen.

Aufgabe 6.3

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Die Vereinigung unendlich vieler regulärer Sprachen ist wieder eine reguläre Sprache.
2. Der Durchschnitt unendlich vieler regulärer Sprachen ist nicht unbedingt eine reguläre Sprache.
3. Die Differenz $L_1 - L_2 - L_3 - \dots$ abzählbar unendlich vieler regulärer Sprachen L_i ist wieder eine reguläre Sprache.

Hausaufgabe 6.4

Wenn $u = a_1a_2 \dots a_n$ und $v = b_1b_2 \dots b_n$ zwei Wörter gleicher Länge sind, dann soll $ALT(u, v)$ das Wort bezeichnen, in dem die Symbole von u und v abwechselnd auftreten, wobei mit u begonnen werden soll, d.h. $ALT(u, v) = a_1b_1a_2b_2 \dots a_nb_n$. Zeigen Sie: Wenn L und M reguläre Sprachen sind, dann ist die Sprache $ALT(L, M) = \{w \mid \exists u \in L, \exists v \in M, |u| = |v|, w = ALT(u, v)\}$ ebenfalls regulär.

Hausaufgabe 6.5

Der Quotient L_1/L_2 zweier Sprachen L_1 und L_2 sei definiert als

$$L_1/L_2 = \{w \mid wv \in L_1 \text{ für ein } v \in L_2\}.$$

Beweisen Sie: Wenn L_1 eine reguläre Sprache ist und L_2 eine beliebige Menge, dann ist L_1/L_2 eine reguläre Sprache.

Hausaufgabe 6.6

Sei $h' : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*$ die folgendermaßen definierte Abbildung: $h'(0) = \mathbf{a}$, $h'(1) = \mathbf{ab}$ und $h'(2) = \mathbf{ba}$.

1. Definieren Sie mit Hilfe von h' einen Homomorphismus $h : \{0, 1, 2\}^* \rightarrow \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*$. Warum ist h durch h' bereits eindeutig bestimmt? Berechnen Sie $h(21120)$.
2. Geben Sie $h(L_i)$ für die Sprachen $L_1 = L(01^*2)$ und $L_2 = L(0 + 12)$ an.
3. Geben Sie $h^{-1}(L_i)$ für die Sprachen $L_1 = \{\mathbf{ababa}\}$ und $L_2 = L(\mathbf{a(ba)^*})$ an.