Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

Blatt 2 — Abgabetermin: 7. Mai 2007, 10.00 Uhr

Quiz 2

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

- [ ] Die Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl L als auch $\overline{L}$ semi-entscheidbar sind.
- [ ] Eine 175-Band Turingmaschine kann mehr Funktionen berechnen als eine Turingmaschine mit nur 174 Bändern.
- [ ] Falls f berechenbar ist, dann ist $\text{graph}(f) = \{(x, y) \mid f(x) = y\}$ entscheidbar.
- [ ] Die Vorgängerfunktion $p(n)$ kann durch die Funktion $p = Pr[c_0^0, pr_1^2]$ dargestellt werden.
- [ ] Turingmaschinen, die primitiv-rekursive Funktionen berechnen, müssen nicht auf allen Eingaben terminieren.

(*1 Punkt* bei 2/3 korrekten Antworten, *2 Punkte* bei 4/5 korrekten Antworten.)

Aufgabe 2.1 (Primitiv-rekursive Funktionen)

Die Funktionen $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien definiert durch $f = Pr[c_0^1, add \circ (pr_1^3, pr_3^3)]$ und $g = Pr[c_1^0, mul \circ (s \circ pr_1^2, pr_2^2)]$, wobei add und mul die Funktionen für die Addition bzw. die Multiplikation sind.

a) Schreiben Sie die Rekursionsgleichungen auf, indem Sie das Definitionsschema der primitiven Rekursion einsetzen.

b) Berechnen Sie schrittweise durch Auswerten der primitiv-rekursiven Ausdrücke die Werte $f(2, 3)$ und $g(3)$.

c) Welche Funktionen berechnen f und g.

Aufgabe 2.2 (Primitiv-rekursive Funktionen)

Stellen Sie die folgenden Funktionen im Kalkül der rekursiven Funktionen dar. Geben Sie dazu zunächst die Rekursionsgleichung entsprechend des Definitionsschemas an. Benutzen Sie dabei nur die Grundfunktionen/-operationen (siehe Folie 3, §5.2).

a) $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $p(x) := 0$, falls $x = 0$, und $p(x) := x - 1$, sonst.

b) $\dot{-} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\dot{-}\,(x, y) := 0$, falls $x \leq y$, und $\dot{-}\,(x, y) := x - y$, sonst.

c) $sg : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ mit $sg(x) := 0$, falls $x = 0$, und $sg(x) = 1$, sonst.

Hausaufgabe 2.3 (Primitiv-rekursive Funktionen) *[3 Punkte]*

Die Funktion f sei definiert durch $f = Pr[c_0^0, add \circ (pr_2^2, s \circ pr_1^2)]$.

a) Schreiben Sie die Rekursionsgleichung auf, indem Sie das Definitionsschema der primitiven Rekursion einsetzen.

b) Berechnen Sie durch Auswerten des primitiv-rekursiven Ausdrucks den Wert $f(4)$.

c) Welche Funktion berechnet f.

Hausaufgabe 2.4 (Primitiv-rekursive Funktionen) *[3 Punkte]*

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind. Stellen Sie dazu die Funktionen im Kalkül der rekursiven Funktionen dar (ohne Verwendung des μ-Operators). Geben Sie zunächst die Rekursionsgleichung entsprechend des Definitionsschemas an. Benutzen Sie nur die Grundfunktionen/-operationen (siehe Folie 3, §5.2) und die in Aufgabe 2.2 definierten Funktionen.

a) $div : I\!N^2 \to I\!N$ mit $div(x, y) := \lfloor x/y \rfloor$ und $y \geq 1$.

b) $mod : I\!N^2 \to I\!N$ mit $mod(x, y) := x \ mod \ y$ und $y \geq 1$.

Hausaufgabe 2.5 (Nichtdeterministische Turingmaschinen) *[3 Punkte]*

Sei $L = \{a^{i_1}ba^{i_2}b \ldots ba^{i_n}bc^m \mid \exists\{j_1, .., j_l\} \subseteq \{1, .., n\} : i_{j_1} + .. + i_{j_l} = m \text{ mit } n, i_1, .., i_n \geq 1\}$. Geben Sie eine *nichtdeterministische* 2-Band Turingmaschine mit $|Q| \leq 6$ an, die diese Sprache in der Rechenzeit $|w| + 1$ akzeptiert, wobei $|w|$ die Länge des Eingabewortes ist. Beschreiben Sie zunächst knapp und präzise wie Ihre Turingmaschine funktioniert. Der Kopf des zweiten Bandes darf dabei auch stehen bleiben. Die Übergangsfunktion hat die Form $\delta : Q \times (\Gamma \times \Gamma) \to Q \times (\Gamma \times \Gamma) \times (\{L, R\} \times \{L, R, N\})$. Schätzen Sie die Rechenzeit einer *deterministischen* Turingmaschine ab, die diese Sprache akzeptiert.

Sprechstunden:

Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- **Tutoren** (vor Raum 1.18): Dienstag 10.45 bis 11.45 Uhr (Marcel Goehring), Dienstag 13.00 bis 14.00 Uhr (Jan Schwarz), Mittwoch 12.20 bis 13.20 Uhr (Holger Trölenberg), Donnerstag 10.30 bis 11.30 Uhr (Jens Steinborn), Donnerstag 13.30 bis 14.30 Uhr (Ellen König), Donnerstag 15.30 bis 16.30 Uhr (Marius Schneider).

- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 15.30 Uhr.

- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Mittwoch 9.30 bis 10.30 Uhr.

Quiz 2

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Die Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl L als auch $\overline{L}$ semi-entscheidbar sind.

[ ] Eine 175-Band Turingmaschine kann mehr Funktionen berechnen als eine Turingmaschine mit nur 174 Bändern.

[ ] Falls f berechenbar ist, dann ist $\text{graph}(f) = \{(x, y) \mid f(x) = y\}$ entscheidbar.

[ ] Die Vorgängerfunktion $p(n)$ kann durch die Funktion $p = Pr[c_0^0, pr_1^2]$ dargestellt werden.

[ ] Turingmaschinen, die primitiv-rekursive Funktionen berechnen, müssen nicht auf allen Eingaben terminieren.

(*1 Punkt* bei 2/3 korrekten Antworten, *2 Punkte* bei 4/5 korrekten Antworten.)

Name:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe: