Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

Blatt 3 — Abgabetermin: 14. Mai 2007, 10.00 Uhr

Quiz 3

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Für die Definition der großen Ackermann-Funktion, kann der μ-Operator durch die beschränkte Minimierung ersetzt werden.

[ ] Jede totale berechenbare Funktion ist primitiv-rekursiv.

[ ] Jede rekursive Funktion lässt sich durch den Ausdruck μf darstellen, wobei f eine primitiv-rekursive Funktion ist.

[ ] Jede 175-stellige rekursive Funktion kann durch eine rekursive Funktion mit nur 174 Stellen simuliert werden.

[ ] Rekursive Funktionen sind nicht primitiv-rekursiv genau dann, wenn sie schneller wachsen als jede primitiv-rekursive Funktion.

(*1 Punkt* bei 2/3 korrekten Antworten, *2 Punkte* bei 4/5 korrekten Antworten.)

Aufgabe 3.1 (μ-rekursive und primitiv-rekursive Funktionen)

a) Welche Funktion wird durch den Ausdruck $\mu[add]$ mit $add(x,y) = x + y$ definiert.

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind. Stellen Sie dazu die entsprechenden Gleichungen auf, gegebenfalls unter Verwendung des Gleichungsschemas der primitiven Rekursion. Sie dürfen dabei Funktionen verwenden, die in den Übungen bereits als primitiv-rekursiv bewiesen wurden.

   α) $absdiff\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $absdiff(x,y) = |x - y|$.

   β) $kgV : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $kgV(x,y) = k$, wobei k das kleinste gemeinsame Vielfache von x und y ist.

   γ) $min\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $min(x,y) = y$, falls $x \geq y$, $min(x,y) = x$, sonst.

c) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion der Menge $P = \{p \,|\, p \text{ is Primzahl}\}$ primitiv-rekursiv ist.

Aufgabe 3.2 (μ-rekursive und primitiv-rekursive Funktionen)

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine primitiv-rekursive und injektive Funktion.

a) Zeigen Sie, dass f^{-1} μ-rekursiv ist.

b) Ist f^{-1} notwendigerweise auch primitiv-rekursiv?

Hausaufgabe 3.3 (μ-rekursive und primitiv-rekursive Funktionen) *[3 Punkte]*

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind. Stellen Sie unter Benutzung bereits bekannter primitiv-rekursiver Funktionen entsprechende Gleichungen auf.

c) max: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $max(x, y) = x$, falls $x \geq y$, $max(x, y) = y$, sonst.

b) $ggT : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $ggT(x, y) = k$, wobei k der größte gemeinsame Teiler von x und y ist.

c) $sqrt : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $sqrt(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

Hausaufgabe 3.4 (μ-rekursive und primitiv-rekursive Funktionen) *[3 Punkte]*

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monotone, primitiv-rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass auch

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{falls es ein } x \text{ mit } f(x) = y \text{ gibt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ primitiv rekursiv ist.

Hausaufgabe 3.5 (Ackermann-Funktion) *[3 Punkte]*

Eine alternative Definition der Ackermann-Funktion $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist

$$A(0, y) = y + 1$$
$$A(x + 1, 0) = A(x, 1)$$
$$A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes x die Funktion $f_x(y) := A(x, y)$ primitiv-rekursiv ist. Verwenden Sie dazu eine vollständige Induktion über x.

b) Berechnen Sie $A(2, 6)$, $A(3, 4)$ und $A(4, 2)$.

c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $A(1, y) = y + 2$.

Sprechstunden:

Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- **Tutoren** (vor Raum 1.18): Dienstag 10.45 bis 11.45 Uhr (Marcel Goehring), Dienstag 13.00 bis 14.00 Uhr (Jan Schwarz), Mittwoch 12.20 bis 13.20 Uhr (Holger Trölenberg), Donnerstag 10.30 bis 11.30 Uhr (Jens Steinborn), Donnerstag 13.30 bis 14.30 Uhr (Ellen König), Donnerstag 15.30 bis 16.30 Uhr (Marius Schneider).
- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 15.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Mittwoch 9.30 bis 10.30 Uhr.

Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

Quiz 3 — Abgabetermin: Bis 8. Mai 2007 in der Übungsgruppe

Quiz 3

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

- [ ] Für die Definition der großen Ackermann-Funktion, kann der μ-Operator durch die beschränkte Minimierung ersetzt werden.
- [ ] Jede totale berechenbare Funktion ist primitiv-rekursiv.
- [ ] Jede rekursive Funktion lässt sich durch den Ausdruck μf darstellen, wobei f eine primitiv-rekursive Funktion ist.
- [ ] Jede 175-stellige rekursive Funktion kann durch eine rekursive Funktion mit nur 174 Stellen simuliert werden.
- [ ] Rekursive Funktionen sind nicht primitiv-rekursiv genau dann, wenn sie schneller wachsen als jede primitiv-rekursive Funktion.

(*1 Punkt* bei 2/3 korrekten Antworten, *2 Punkte* bei 4/5 korrekten Antworten.)

Name:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:
