Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

Blatt 5 — Abgabetermin: 29. Mai 2007, 10.00 Uhr

Quiz 5

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[   ] Die natürliche Zahl 22 wird in der arithmetischen Theorie $\mathcal{Q}$ dargestellt durch $s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(\overline{0}))))))))))))))))))))))$.

[   ] Die Churchsche These besagt, dass die Menge der Turing-berechenbaren Funktionen eine Teilmenge der intuitiv berechenbaren Funktionen ist.

[   ] μ-rekursive Ausdrücke können durch natürliche Zahlen codiert werden.

[   ] Die Menge $\{i \mid M_i$ hält auf Eingabe ϵ nach 1437 Schritten$\}$ ist entscheidbar.

[   ] Es gibt ein j, so dass M_j auf Eingabe i die Funktion φ_i berechnet.

(*1 Punkt* bei 2/3 korrekten Antworten, *2 Punkte* bei 4/5 korrekten Antworten.)

Aufgabe 5.1 (Gödelnumerierung)

a) Geben Sie eine Funktion $k : \Delta^* \to I\!N$ mit $\Delta = Q \cup \Gamma \cup \{R, L\}$ an, die die Beschreibung von Turingmaschinen $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \{q_1\})$ durch natürliche Zahlen codiert. Die Codierung soll dabei unabhängig von der Größe der Zustandsmenge Q und des Bandalphabets Γ sein, d.h. die Funktion k^{-1} kann ohne Angabe von $|Q|$ und $|\Gamma|$ berechnet werden.

Verwenden Sie zur Codierung Primzahlen (p_i sei die i-te Primzahl). Die berechnete natürliche Zahl soll möglichst klein sein. Geben Sie an, wie die Funktion k^{-1} berechnet werden kann.

b) Geben Sie die Gödelnummer $k(M)$ für die Turingmaschine $M' = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, \{q_1\})$ mit $\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$ und $\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, R)$ an.

Aufgabe 5.2 (Aufzählbarkeit von Mengen)

Zeigen Sie die folgenden Sätze.

a) Eine Menge L ist genau dann *semi-entscheidbar*, wenn es eine Turingmaschine gibt, die alle Elemente $w \in L$ in *beliebiger* Reihenfolge auf das Band schreibt.

b) Eine Menge L ist genau dann *entscheidbar*, wenn es eine Turingmaschine gibt, die alle Elemente $w \in L$ in einer *kanonischen (lexikographischen)* Reihenfolge auf das Band schreibt.

Hausaufgabe 5.3 (Gödelnumerierung und "Universalität") *[3 Punkte]*

a) Geben Sie eine Funktion $k : A^* \to I\!N$ an, die Wörter über dem Alphabet $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ für beliebiges n durch natürliche Zahlen codiert. Die Codierung soll dabei unabhängig von der Größe des Alphabets sein, d.h. die Funktion k^{-1} kann ohne Angabe von $|A|$ berechnet werden (siehe auch Aufgabe 5.1).

b) Sei $A = \{o, h, l, n, a, b\}$. Geben Sie das Wort $k^{-1}(458419500)$ an.

c) Geben Sie einen "universellen" λ-Term u_λ an, so dass $u_\lambda\,(v_\lambda)\,(w)$ die Anwendung des λ-Terms v_λ auf w simuliert.

Hausaufgabe 5.4 (Berechenbarkeit mit Turingmaschinen) *[3 Punkte]*

Seien $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, $g_1 : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ und $g_2 : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ Turing-berechenbare Funktionen und f außerdem total. Zeigen Sie, dass dann auch $h : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ definiert durch $h(w_1, w_2, w_3) :=$ " `if` $f(w_1) = 1$ `then` $g_1(w_2)$ `else` $g_2(w_3)$" Turing-berechenbar ist. Tipp: Geben Sie dazu eine knappe und präzise Beschreibung an, wie eine (Mehr-Band-) Turingmaschine, die $h' : \{0, 1, \#\}^* \to \{0,1\}^*$ berechnet, auf dem Eingabewort $w_1\#w_2\#w_3$ funktioniert.

Hausaufgabe 5.5 (Abzählbarkeit und Aufzählbarkeit von Mengen) *[3 Punkte]*

Eine Menge $M \subseteq I\!N$ ist *aufzählbar* genau dann, wenn es eine berechenbare Funktion f mit $\mathrm{range}(f) = M$ gibt ($\mathrm{range}(f) := \{y \in I\!N \mid \text{ es gibt ein } x \text{ mit } f(x) = y\}$). Eine Menge $M \subseteq I\!N$ ist *abzählbar* genau dann, wenn es eine surjektive Funktion $f : I\!N \to M$ gibt.

a) Zeigen Sie, dass alle aufzählbaren Mengen auch abzählbar sind.

b) Zeigen Sie, dass M entscheidbar ist genau dann, wenn M und $\overline{M}$ aufzählbar sind. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Seien M_1, M_2 und M_3 Turingmaschinen, die M entscheiden bzw. M und $\overline{M}$ aufzählen. Geben Sie eine knappe und präzise Beschreibung an, wie sich aus M_1 die Maschinen M_2 und M_3 konstruieren lassen und umgekehrt.

Sprechstunden:

Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- **Tutoren** (vor Raum 1.18): Dienstag 10.45 bis 11.45 Uhr (Marcel Goehring), Dienstag 13.00 bis 14.00 Uhr (Jan Schwarz), Mittwoch 12.20 bis 13.20 Uhr (Holger Trölenberg), Donnerstag 10.30 bis 11.30 Uhr (Jens Steinborn), Donnerstag 13.30 bis 14.30 Uhr (Ellen König), Donnerstag 15.30 bis 16.30 Uhr (Marius Schneider).
- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 15.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Mittwoch 9.30 bis 10.30 Uhr.

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

Quiz 5 — Abgabetermin: 21./22. Mai 2007 in der Übungsgruppe

Quiz 5

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Die natürliche Zahl 22 wird in der arithmetischen Theorie $\mathcal{Q}$ dargestellt durch $s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(\overline{0}))))))))))))))))))))))$.

[ ] Die Churchsche These besagt, dass die Menge der Turing-berechenbaren Funktionen eine Teilmenge der intuitiv berechenbaren Funktionen ist.

[ ] μ-rekursive Ausdrücke können durch natürliche Zahlen codiert werden.

[ ] Die Menge $\{i \mid M_i$ hält auf Eingabe ϵ nach 1437 Schritten$\}$ ist entscheidbar.

[ ] Es gibt ein j, so dass M_j auf Eingabe i die Funktion φ_i berechnet.

(*1 Punkt* bei 2/3 korrekten Antworten, *2 Punkte* bei 4/5 korrekten Antworten.)

Name: **Matrikelnummer:**

Übungsgruppe:
