

# Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

Blatt 6 — Abgabetermin: 4. Juni 2007, 10.00 Uhr

---

## Quiz 6

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

- [ ] Es gilt  $\{M \mid M \text{ entscheidbar}\} \subset \{M \mid M \text{ aufzählbar}\} \subset \{M \mid M \text{ abzählbar}\}$ .
- [ ] Falls  $M$  semi-entscheidbar ist, dann gibt es eine berechenbare Funktion  $f$  mit  $M = \text{domain}(f)$ .
- [ ] Die Menge  $M = \{i \mid \varphi_i(167) \text{ ist definiert}\}$  ist nicht (rekursiv) aufzählbar.
- [ ] Es gibt überabzählbar viele Mengen, die nicht (rekursiv) aufzählbar sind.
- [ ] Jede Teilmenge einer (rekursiv) aufzählbaren Menge ist (rekursiv) aufzählbar.  
(Tipp: Werfen Sie einen kurzen Blick auf Folie 8, §5.5.)

(1 Punkt bei 2/3 korrekten Antworten, 2 Punkte bei 4/5 korrekten Antworten.)

### Aufgabe 6.1 (Abschlusseigenschaften aufzählbarer und entscheidbarer Mengen)

Zeigen Sie durch Argumentation über (Konstruktion von) Turingmaschinen, dass die nachfolgenden Eigenschaften gelten. Es genügt eine knappe und präzise Beschreibung der Arbeitsweise der entsprechenden Turingmaschinen.

- a) Falls  $M_1$  und  $M_2$  aufzählbar sind, dann sind auch  $M_1 \cup M_2$  und  $M_1 \cap M_2$  aufzählbar.
- b) Falls  $M_1$  und  $M_2$  entscheidbar sind, dann ist auch das Komplement  $\overline{M_1}$  und die Differenz  $M_1 \setminus M_2$  entscheidbar.
- c) Warum funktioniert die Argumentation für Teil b nicht für abzählbare Mengen?

### Aufgabe 6.2 (Beweise mit Diagonalisierung)

Zeigen Sie mit Hilfe von Diagonalisierung, dass die folgenden Sätze gelten.

- a) Die Menge  $M_{f_{total}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } \text{domain}(f) = \mathbb{N}\}$  der totalen Funktionen von den natürlichen Zahlen in die natürlichen Zahlen ist nicht abzählbar.
- b) Wie ändert sich Ihr Beweis in Teil a, falls Sie die Menge  $M_f = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$  betrachten.
- c) Die Menge  $M_{TR} = \{i \mid \text{domain}(\varphi_i) = \mathbb{N}\}$  der totalen rekursiven Funktionen ist nicht abzählbar.

**Hausaufgabe 6.3** (Aufzählbare und entscheidbare Mengen)

[3 Punkte]

- a) Sei  $P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (1)  $P$  ist (rekursiv) aufzählbar, aber nicht rekursiv.
  - (2)  $\bar{P}$  ist nicht rekursiv.
  - (3)  $P$  und  $\bar{P}$  sind (rekursiv) aufzählbar.
  - (4)  $\bar{P}$  ist nicht rekursiv, aber (rekursiv) aufzählbar.
- b) Seien  $A$ ,  $\bar{B}$  und  $C$  rekursiv aufzählbare Mengen mit  $C = \bar{A} \cup B$ . Ist dann  $A \setminus B$  rekursiv und/oder (rekursiv) aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Hausaufgabe 6.4** (Einfacher Beweis mit Diagonalisierung)

[3 Punkte]

Zeigen Sie mit Hilfe von Diagonalisierung, dass die folgende Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  nicht rekursiv ist.

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_n(n) \text{ undefiniert} \\ \text{undefiniert} & \text{falls } \varphi_n(n) \text{ definiert} \end{cases}$$

**Hausaufgabe 6.5** (Beweise mit Diagonalisierung)

[3 Punkte]

Zeigen Sie mit Hilfe von Diagonalisierung, dass die folgenden Sätze gelten.

- a) Es gibt eine totale, nicht primitiv-rekursive Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , die rekursiv ist. (Tipp: Betrachten Sie die Funktion  $f(n) := p_n(n) + 1$ , wobei  $p_n$  die  $n$ -te primitiv-rekursive Funktion ist.)
- b) Es gibt unendlich viele totale, nicht primitiv-rekursive Funktionen  $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , die rekursiv sind. (Tipp: Konstruieren Sie aus  $f$  in Teil a eine Menge  $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ .)

---

**Sprechstunden:**

Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- **Tutoren** (vor Raum 1.18): Dienstag 10.45 bis 11.45 Uhr (Marcel Goehring), Dienstag 13.00 bis 14.00 Uhr (Jan Schwarz), Mittwoch 12.20 bis 13.20 Uhr (Holger Trölenberg), Donnerstag 10.30 bis 11.30 Uhr (Jens Steinborn), Donnerstag 13.30 bis 14.30 Uhr (Ellen König), Donnerstag 15.30 bis 16.30 Uhr (Marius Schneider).
  - **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 15.30 Uhr.
  - **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Mittwoch 9.30 bis 10.30 Uhr.
-

# Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

Quiz 6 — Abgabetermin: Bis 31. Mai 2007 in der Übungsgruppe oder einer der Sprechstunden

---

## Quiz 6

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

- [ ] Es gilt  $\{M \mid M \text{ entscheidbar}\} \subset \{M \mid M \text{ aufzählbar}\} \subset \{M \mid M \text{ abzählbar}\}$ .
- [ ] Falls  $M$  semi-entscheidbar ist, dann gibt es eine berechenbare Funktion  $f$  mit  $M = \text{domain}(f)$ .
- [ ] Die Menge  $M = \{i \mid \varphi_i(167) \text{ ist definiert}\}$  ist nicht (rekursiv) aufzählbar.
- [ ] Es gibt überabzählbar viele Mengen, die nicht (rekursiv) aufzählbar sind.
- [ ] Jede Teilmenge einer (rekursiv) aufzählbaren Menge ist (rekursiv) aufzählbar.  
(Tipp: Werfen Sie einen kurzen Blick auf Folie 8, §5.5.)

(1 Punkt bei 2/3 korrekten Antworten, 2 Punkte bei 4/5 korrekten Antworten.)

---

Name:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:

---