

# Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

Blatt 7 — Abgabetermin: 11. Juni 2007, 10.00 Uhr

---

## Quiz 7

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

- [ ] Von keinem Programm kann automatisch entschieden werden, ob es auf einer bestimmten Eingabe terminiert.
- [ ] Die "Lazy Beaver" Funktion  $LB(n) = \min \{\text{Produktivität}(M) \mid M \in BBT(n)\}$  ist nicht berechenbar.
- [ ] Der Definitionsbereich einer beliebigen berechenbaren Funktion ist nicht entscheidbar.
- [ ] Die Unentscheidbarkeit des Halteproblems kann nur durch einen Beweis mit Diagonalisierung bewiesen werden.
- [ ] Der Satz von Rice besagt, dass die Menge  $M = \{i \mid \varphi_i \in S\}$  mit  $S \neq \emptyset$  und  $S \neq \mathcal{R}$  nicht entscheidbar ist.

(1 Punkt bei 2/3 korrekten Antworten, 2 Punkte bei 4/5 korrekten Antworten.)

## Aufgabe 7.1 (Reduktionen)

- a) Sei  $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 100 \text{ und } x \text{ ist ungerade}\}$  und  $Q = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \text{ und } x \text{ ist gerade}\}$ . Reduzieren Sie  $Q$  auf  $P$ , d.h. zeigen Sie, dass  $Q \leq P$  gilt.
- b) Zeigen Sie durch Reduktion, dass das Halteproblem  $H = \{\langle i, n \rangle \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$  nicht entscheidbar ist.
- c) Zeigen Sie, dass die Reduktions-Relation " $\leq$ " reflexiv und transitiv ist.

## Aufgabe 7.2 (Diagonalisierung, Satz von Rice)

Zeigen Sie mit Hilfe von Diagonalisierung bzw. des Satzes von Rice, dass die folgenden Aussagen gelten.

- a) Das Halteproblem  $H = \{\langle i, n \rangle \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$  ist nicht entscheidbar.
- b) Die Menge  $N = \{i \mid \varphi_i = id\}$  mit der Identitätsfunktion  $id$  ist nicht entscheidbar.
- c) Die Menge  $M = \{i \mid \varphi_i(3) \leq 100 \text{ oder } \varphi_i(3) \text{ ist undefiniert}\}$  ist nicht (rekursiv) aufzählbar.

**Hausaufgabe 7.3** (Menge der Turingmaschinen nicht aufzählbar?) [3 Punkte]

Wir zeigen: die Menge der Turingmaschinen  $TM = \{i \mid \varphi_i \in \mathcal{R}\}$  ist nicht (rekursiv) aufzählbar. Annahme:  $TM$  sei aufzählbar. Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiert als  $f(x) = \varphi_x(x) + 1$ . Da  $TM$  aufzählbar ist, gibt es eine Turingmaschine, die auf Eingabe  $x$  die entsprechende Turingmaschine mit der Gödelnummer  $x$  konstruiert und  $\varphi_x(x)$  berechnet. Da  $\varphi_x$  berechenbar ist und die Addition ebenfalls, ist auch  $f$  berechenbar. Dann gibt es ein  $j \in TM$  mit  $f = \varphi_j$ . Wir betrachten das Verhalten von  $f$  an der Stelle  $j$ . Dann ist  $\varphi_j(j) = f(j) = \varphi_j(j) + 1$ . Dies ist ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch und die Menge der Turingmaschinen  $TM$  ist nicht (rekursiv) aufzählbar.

Zeigen und begründen Sie, an welcher Stelle der "Beweis" einen Fehler enthält.

**Hausaufgabe 7.4** (Reduktion, Diagonalisierung, Satz von Rice) [3 Punkte]

Zeigen Sie mit Hilfe von Reduktion, Diagonalisierung bzw. des Satzes von Rice, dass die folgenden Aussagen gelten.

- Die Menge  $T = \{i \mid \varphi_{i-100}(i-100) \text{ ist undefiniert}\}$  ist nicht (rekursiv) aufzählbar.
- Die Menge  $U = \{i \mid \varphi_i \text{ ist surjektiv}\}$  ist nicht entscheidbar.
- Die Menge  $V = \{i \mid \varphi_i(i) = i\}$  ist nicht rekursiv, aber (rekursiv) aufzählbar.

**Hausaufgabe 7.5** (Fleißige Biene/"Diligent Bee") [Abgabe: 18.06.2007, 5 Punkte]

Bienen sammeln Nektar von Blumen. Fleißige Bienen fliegen weiter als weniger fleißige Bienen. Die Produktivität einer fleißigen Biene ist der größte Abstand zwischen zwei angeflogenen Blumen. Eine fleißige Biene ist eine Turingmaschine  $M_{Bee} = (\{q_1, \dots, q_n, q_e\}, \{\}, \{*, B\}, \delta, q_0, B, \{\})$  mit  $n$  Zuständen plus einem expliziten Endzustand  $q_e$ , deren Bandalphabet die Symbole  $B$  (das Leerzeichen) und  $*$  (eine Blume) enthält. Die Produktivität von  $M_{Bee}$ , angesetzt auf das leere Band, ist der größte Abstand zwischen zwei Blumen  $*$  der Ausgabe, inklusive dieser Blumen. Sie ist 0, falls  $M_{Bee}$  nicht anhält. Zum Beispiel ist die Produktivität von  $M_{Bee}$ , die  $*B**B*BB*$  auf das Band schreibt, gleich 9.

- Schreiben Sie eine "Fleißige Biene" mit zwei und vier Zuständen, deren Produktivität möglichst groß ist. Ihre Turingmaschine darf nicht gleichzeitig eine "Busy Beaver" Turingmaschine sein, d.h. die Ausgabe Ihrer Turingmaschine mit zwei bzw. vier Zuständen darf keine 4 bzw. 13 Blumen enthalten.
- Was ist die größte untere Schranke für die Produktivität einer fleißigen Biene? Betrachten Sie ein anderes fleißiges Tier (Tipp: der Tiername fängt auch mit "B" an).

Auf der Web-Seite zur Theoretischen Informatik II finden Sie ein entsprechendes Rahmenprogramm und ein Turingmaschinen-Simulator. Senden Sie dieses Programm mit Ihren "lauffähigen" Übergangsfunktionen bis zum Abgabetermin an die email Adresse [fleissige.biene@cs.uni-potsdam.de](mailto:fleissige.biene@cs.uni-potsdam.de). Geben Sie im Betreff der email *einen* Nachnamen *und* die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

---

**Sprechstunden:** Zu den gewohnten Zeiten (siehe z.B. Übungsblatt 6).

---

# Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

Quiz 7 — Abgabetermin: 4./5. Juni 2007 in der Übungsgruppe

---

## Quiz 7

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

- [ ] Von keinem Programm kann automatisch entschieden werden, ob es auf einer bestimmten Eingabe terminiert.
- [ ] Die "Lazy Beaver" Funktion  $LB(n) = \min \{\text{Produktivität}(M) \mid M \in BBT(n)\}$  ist nicht berechenbar.
- [ ] Der Definitionsbereich einer beliebigen berechenbaren Funktion ist nicht entscheidbar.
- [ ] Die Unentscheidbarkeit des Halteproblems kann nur durch einen Beweis mit Diagonalisierung bewiesen werden.
- [ ] Der Satz von Rice besagt, dass die Menge  $M = \{i \mid \varphi_i \in S\}$  mit  $S \neq \emptyset$  und  $S \neq \mathcal{R}$  nicht entscheidbar ist.

(1 Punkt bei 2/3 korrekten Antworten, 2 Punkte bei 4/5 korrekten Antworten.)

---

Name:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:

---