Übung zur Vorlesung

# Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

**Blatt 10 — Abgabetermin: 2. Juli 2007, 10.00 Uhr**

---

## Quiz 10

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Die Begriffe "Menge", "Sprache" und "Problem" werden in der Theoretischen Informatik synonym benutzt.

[ ] Die Menge $\mathcal{NP}$ enthält alle Sprachen, die nicht in polynomieller Zeit entschieden werden könnnen.

[ ] Eine Sprache $L$ ist $\mathcal{NP}$-vollständig genau dann, wenn
1) $L \in \mathcal{NP}$ und
2) $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{NP}$ (d.h. $L$ ist $\mathcal{NP}$-hart).

[ ] Ein Sprache $L$ liegt in $\mathcal{NP}$ genau dann, wenn auf Eingabe $w$ ein "Lösungsvorschlag" $x$ in polynomieller Zeit "geraten" werden kann und in polynomieller Zeit verfiziert werden kann, ob $x$ eine "Lösung" für $w$ ist.

[ ] Für jede entscheidbare Sprache $L'$ gilt $L' \leq_p L$ für eine $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache $L \in \mathcal{NPC}$.

(*1 Punkt* bei 2/3 korrekten Antworten, *2 Punkte* bei 4/5 korrekten Antworten.)

## Aufgabe 10.1 (Polynomialzeitreduktion und $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)

a) Zeigen Sie, dass die Polynomialzeitreduktion $\leq_p$ reflexiv und transitiv ist.

b) Zeigen Sie: $L$ ist $\mathcal{NP}$-hart genau dann, wenn $L' \leq_p L$ für ein $L' \in \mathcal{NPC}$.

## Aufgabe 10.2 (`Tautologie` und $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)

Ein Monom ist eine Konjunktion von Literalen. Eine Formel in disjunktiver Normalform (DNF) ist eine Disjunktion von Monomen. Sei `DNF` die Menge der Formeln in DNF. Sei `Tautologie` $\subseteq$ `DNF` die Menge der tautologischen Formeln in DNF, d.h. `Tautologie` $= \{F \mid F$ ist aussagenlogische Formel in DNF und $F$ hat den Wert "wahr" für jede Belegung der in $F$ enthaltenen (Aussagen-)Variablen$\}$.

a) Zeigen Sie, dass die folgende aussagenlogische Formel eine Tautologie ist, d.h. $F \in$ `Tautologie`: $F \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge D \wedge C) \vee (\overline{D} \wedge \overline{A}) \vee (\overline{B} \wedge A) \vee \overline{C}$ .

b) Zeigen Sie, dass `Tautologie` co-$\mathcal{NP}$-vollständig ist, d.h. $\overline{\texttt{Tautologie}} \in \mathcal{NPC}$ mit $\overline{\texttt{Tautologie}} = \texttt{DNF} \setminus \texttt{Tautologie}$.

## Hausaufgabe 10.3 (Polynomialzeitreduktion) *[3 Punkte]*

a) Sei $\Sigma$ ein Alphabet und $\mathcal{P}$ die Menge der in polynomieller Zeit entscheidbaren Sprachen über $\Sigma$. Zeigen Sie, dass $L_1 \leq_p L_2$ für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ gilt.

b) Eine Sprache $L$ sei $\mathcal{P}$-vollständig genau dann, wenn $L \in \mathcal{P}$ und $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{P}$. Welche Sprachen in $\mathcal{P}$ sind $\mathcal{P}$-vollständig und welche sind es nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Hausaufgabe 10.4 ($\mathcal{NP}$-Vollständigkeit) *[3 Punkte]*

Sei $\Sigma$ ein Alphabet und $\mathcal{NPC}$ die Menge der $\mathcal{NP}$-vollständigen Sprachen.

Zeigen Sie:

a) Es gibt ein $L \subseteq \Sigma^*$ mit $L \in \mathcal{P}$ und $L \in \mathcal{NPC}$, dann ist $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

b) Es gibt ein $L \subseteq \Sigma^*$ mit $L \notin \mathcal{P}$ und $L \in \mathcal{NPC}$, dann ist $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

## Hausaufgabe 10.5 (`2-SAT`) *[3 Punkte]*

Sei `2-SAT` der Spezialfall von `SAT`, bei dem jede Klausel aus genau zwei Literalen besteht.

a) Zeigen Sie, dass die folgende aussagenlogische Formel erfüllbar ist, d.h. $F \in$ `2-SAT`: $F \equiv (A \vee C) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (C \vee \overline{A}) \wedge (D \vee E) \wedge (\overline{D} \vee \overline{E})$ .

b) Zeigen Sie: `2-SAT` $\in \mathcal{P}$.

---

**Sprechstunden:**

Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- **Tutoren** (vor Raum 1.18): Dienstag 10.45 bis 11.45 Uhr (Marcel Goehring), Dienstag 13.00 bis 14.00 Uhr (Jan Schwarz), Mittwoch 12.20 bis 13.20 Uhr (Holger Trölenberg), Donnerstag 10.30 bis 11.30 Uhr (Jens Steinborn), Donnerstag 13.30 bis 14.30 Uhr (Ellen König), Donnerstag 15.30 bis 16.30 Uhr (Marius Schneider).
- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 15.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Mittwoch 9.30 bis 10.30 Uhr.

---

Übung zur Vorlesung

# Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2007

**Quiz 10 — Abgabetermin: 25./26. Juni 2007 in Ihrer Übungsgruppe**

---

## Quiz 10

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Die Begriffe "Menge", "Sprache" und "Problem" werden in der Theoretischen Informatik synonym benutzt.

[ ] Die Menge $\mathcal{NP}$ enthält alle Sprachen, die nicht in polynomieller Zeit entschieden werden könnnen.

[ ] Eine Sprache $L$ ist $\mathcal{NP}$-vollständig genau dann, wenn
   1) $L \in \mathcal{NP}$ und
   2) $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{NP}$ (d.h. $L$ ist $\mathcal{NP}$-hart).

[ ] Ein Sprache $L$ liegt in $\mathcal{NP}$ genau dann, wenn auf Eingabe $w$ ein "Lösungsvorschlag" $x$ in polynomieller Zeit "geraten" werden kann und in polynomieller Zeit verfiziert werden kann, ob $x$ eine "Lösung" für $w$ ist.

[ ] Für jede entscheidbare Sprache $L'$ gilt $L' \leq_p L$ für eine $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache $L \in \mathcal{NPC}$.

(*1 Punkt* bei 2/3 korrekten Antworten, *2 Punkte* bei 4/5 korrekten Antworten.)

---

**Name:**

**Matrikelnummer:**

**Übungsgruppe:**

---