Übung zur Vorlesung

Automatisierte Logik und Programmierung

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2008/09

Blatt 1 — Abgabetermin: 29.10.08 nach der Übung

Das erste Übungsblatt soll dazu dienen, ein Gefühl für die Begriffe *Kalkül*, *Prädikatenlogik*, *definitorische Erweiterung*, sowie *Intuitionistische Logik* zu erarbeiten. Dazu soll weniger das Knacken von harten Nüssen dienen sondern vielmehr das herumspielen mit einfachen Fragestellungen.

Aufgabe 1.1 (Definitorische Erweiterung)

Definieren Sie die folgenden Operatoren bzw. Ausdrücke mit Hilfe einer äquivalenten Formel in der Prädikatenlogik erster Stufe mit Sorten:

1.1–a $A \dot\wedge B$: "*höchstens eine der beiden Formeln A und B gilt*"

1.1–b $\exists_1 x : T.A(x)$: "*es gibt genau ein x in T für das die Formel $A(x)$ gilt*"

Aufgabe 1.2 (Prädikatenlogik: Semantik)

Es seien:

$\mathcal{V} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$
$\mathcal{F} = \{\mathtt{+}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \ldots\}$
$\mathcal{P} = \emptyset$
$\mathcal{T} = \{\mathbb{N}\}$

unter folgender (nicht–Standard) Interpretation ι:

$\iota(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_\omega^\Omega$, die Menge der natürlichen Zahlen (mit Null) ergänzt um zwei Elemente Ω und ω
$\iota(\mathtt{x}) = \iota(\mathtt{y}) = \iota(\mathtt{z}) =$ Null
$\iota(\mathtt{0}), \iota(\mathtt{1}), \ldots =$ Null, Eins,...
$\iota(\mathtt{+}) = \oplus$

Dabei sei die zweistellige Funktion $\oplus$ wie folgt definiert, wobei $i, j \in \mathbb{N} \setminus \{\Omega, \omega\}$ gilt und mit "$+$" die gewöhnliche Addition auf natürlichen Zahlen gemeint ist:

$\oplus$	j	ω	Ω
i	$i+j$	Ω	ω
ω	ω	Ω	ω
Ω	Ω	Ω	ω

Welche der folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke sind semantisch `wahr` unter ι?

1.2–a $\forall \mathtt{x}{:}\mathbb{N}.\neg(\mathtt{x=x+1})$
1.2–b $\forall \mathtt{x,y}{:}\mathbb{N}.\mathtt{x+1=y+1} \Rightarrow \mathtt{x=y}$
1.2–c $\forall \mathtt{x}{:}\mathbb{N}.\mathtt{x+0=x}$
1.2–d $\forall \mathtt{x}{:}\mathbb{N}.\mathtt{0+x=x}$
1.2–e $\forall \mathtt{x}{:}\mathbb{N}.\neg(\mathtt{0=x+1})$
1.2–f $\forall \mathtt{x}{:}\mathbb{N}.\neg(\mathtt{x=0}) \Rightarrow \exists \mathtt{y}{:}\mathbb{N}.\mathtt{x=y+1}$
1.2–g $\forall \mathtt{x,y,z}{:}\mathbb{N}.\mathtt{x+(y+z)=(x+y)+z}$
1.2–h $\forall \mathtt{x,y}{:}\mathbb{N}.\mathtt{x+y=y+x}$
1.2–i $\forall \mathtt{x,y}{:}\mathbb{N}.\mathtt{0+x=x} \Rightarrow \mathtt{(0+x)+y=x+(y+0)}$

Aufgabe 1.3 (Intuitionismus)

Welche der folgenden Aussagen gilt intuitionistisch, welche nur klassisch? Geben Sie eine informale Begründung.

1.3–a $\neg\neg(A \vee \neg A)$

1.3–b $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \vee B$

1.3–c $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow A \vee B$

1.3–d $\neg A \vee B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Hinweis: Eine Aussage ist nur dann intuitionistisch gültig, wenn es einen Beweis für sie gibt, der nicht vom Gesetz des ausgeschlossenen Dritten ("*tertium non datur*") Gebrauch macht. Es lohnt sich, zu mehreren über diese — ziemlich philosophischen — Fragen zu diskutieren.

Aufgabe 1.4 (Logik–Kalküle)

Beweisen Sie folgende Formeln mit den Regeln der Refinement Logic.

1.4–a $\neg\neg(A \vee \neg A)$

1.4–b $(\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge B \;\Rightarrow\; (C \wedge D \wedge \neg(A \vee \neg B)) \;\Rightarrow\; (D \vee C \wedge (A \vee \neg B) \wedge \neg\neg(D \vee \neg D))$

1.4–c $(A \vee B) \;\wedge\; \neg(A \wedge B) \;\Rightarrow\; \neg A \wedge B \;\vee\; A \wedge \neg B$

Hinweis: Für diese Aufgabe und einige der zukünftigen Übungsaufgaben lohnt es, sich in das Nuprl System einzuarbeiten und die Beweise dann mit diesem System zu führen.

Lösung 1.1 *Ziel dieser Aufgabe ist es, sowohl die Nützlichkeit des Werkzeugs "Definitiorische Erweiterung" zu erkennen als auch den Umgang mit ihm zu üben. Leider sind die wirklich interessanten Definitionen wie Gleichheit oder natürliche Zahlen erst in höherer Stufe möglich. Für die vorliegenden Beispiele gibt es mehrere Möglichkeiten, von denen wir hier einige vorstellen:*

- $A \dot{\wedge} B \equiv \neg(A \wedge B)$ *oder* $\neg A \vee \neg B$
- $\exists_1 x : T.A(x) \equiv \exists_1 x : T.A(x) \wedge \forall y : T.(A(y) \Rightarrow y=x)$

Lösung 1.2 *Ziel dieser Aufgabe ist es, den Sinn und die Anwendungen von Semantik mit Hilfe von Interpretationen zu illustrieren. Überdies soll gleichzeitig vermittelt werden, wie schnell die syntaktische Erscheinungsform eine Bedeutung suggeriert, die mitunter von der intendierten Interpretation abweicht. Hier die Lösungen im einzelnen:*

1.2–a $\iota(\forall \mathtt{x}:\mathbb{N}.\neg(\mathtt{x=x+1}))$: **nicht** wahr. *Gegenbeispiel:* $\iota_{\mathsf{x}}^{\Omega}$ *oder auch* ι_{x}^{ω}.

1.2–b $\iota(\forall \mathtt{x,y}:\mathbb{N}.\mathtt{x+1=y+1} \Rightarrow \mathtt{x=y})$: wahr.

1.2–c $\iota(\forall \mathtt{x}:\mathbb{N}.\mathtt{x+0=x})$: wahr.

1.2–d $\iota(\forall \mathtt{x}:\mathbb{N}.\mathtt{0+x=x})$: **nicht** wahr. *Gegenbeispiel:* $\iota_{\mathsf{x}}^{\Omega}$ *oder auch* $\iota_{\mathsf{x}}^{\omega}$.

1.2–e $\iota(\forall \mathtt{x}:\mathbb{N}.\neg(\mathtt{0=x+1}))$: wahr.

1.2–f $\iota(\forall \mathtt{x}:\mathbb{N}.\neg(\mathtt{x=0}) \Rightarrow \exists \mathtt{y}:\mathbb{N}.\mathtt{x=y+1})$: wahr.

1.2–g $\iota(\forall \mathtt{x,y,z}:\mathbb{N}.\mathtt{x+(y+z)=(x+y)+z})$: **nicht** wahr. *Gegenbeispiel:* $(\iota_{\mathsf{y}}^{\Omega})_{\mathsf{z}}^{\omega}$

1.2–h $\iota(\forall \mathtt{x,y}:\mathbb{N}.\mathtt{x+y=y+x})$: **nicht** wahr. *Gegenbeispiel:* $(\iota_{\mathsf{x}}^{\omega})_{\mathsf{y}}^{\Omega}$.

1.2–i $\iota(\forall \mathtt{x,y}:\mathbb{N}.\mathtt{0+x=x} \Rightarrow \mathtt{(0+x)+y=x+(y+0)})$: wahr.

Lösung 1.3 *Ziel dieser Aufgabe ist es, einen Begriff von der intuitionistischen Gültigkeit zu vermitteln. Mit Hilfe des Nachdenkens über den Grund, aus dem die einzelnen Aussagen gelten oder auch nicht gelten, soll dies möglichst hitzig debattiert werden.*

Das erste Beispiel ist in der Tat intuitionistisch **gültig**. *Während man es zwar ablehnt etwas als* <u>*wahr*</u> *zu akzeptieren, dessen Gegenteil für wiedersprüchlich befunden wurde, ist es durchaus legitim, etwas für* <u>*falsch*</u> *zu halten dessen Gegenteil nicht falsch sein kann. Der Intuitionist erkennt demnach an, daß es kein Problem geben kann, das nicht entweder selbst wahr ist oder aber dessen Gegenteil wahr ist.*

Das zweite Beispiel gilt intuitionistisch **nicht**, *da allein aus der Voraussetzung, daß man aus der Wahrheit von A immer auf diejenige von B schließen kann, nicht notwendigerweise eine Antwort auf die Frage resultiert, ob dies der Fall ist, weil nun gerade A nicht gilt oder aber weil B sowieso gilt. Jeder Beweis für diese Formel muß sich auf Tertium non datur stützen: es kann eben nur eine der zu beweisenden Möglichkeit geben, wenn die Implikation als wahr angenommen wird.*

Bei $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow A \vee B$ handelt es sich hier um eine abgewandelte de–Morgan–Regel, von der bekannt sein sollte, daß sie in der vorliegenden Richtung nur klassisch gilt.

Das letzte Beispiel schließlich ist intuitionistisch **gültig**. *Im Gegensatz zum ersten Beispiel kann man aus jeder einzelnen der beiden alternativ möglichen Voraussetzungen die Gültigkeit der Implikation folgern: wenn A nicht gilt, ist sie erfüllt und ebenso wenn B gilt.*

Lösung 1.4 *Ziel dieser Aufgabe ist es die beiden Formen der Logik–Kalküle in bezug auf deren Stärken und Schwächen kennenzulernen. Daneben soll natürlich der Zusammenhang zwischen semantischer Gültigkeit und syntaktischer Ableitbarkeit erfahren werden können. Im folgenden geben wir nur ein paar Hinweise für den richtigen Lösungsweg.*

1.4–a $\neg\neg(A \vee \neg A)$: Der (intuitionistische) Sequenzenbeweis beginnt mit der Negationseinführung. Dann muß die verbleibende Negation zweimal eliminiert werden. Beim ersten Mal wird $\neg A$ eingeführt, beim zweiten mal A bewiesen.

```
⊢ ¬¬(A∨¬A)                                        BY notI
\
 ¬(A∨¬A) ⊢ ff                                     BY notE 1
 \
  ¬(A∨¬A) ⊢ A∨¬A                                  BY orI2
  \
   ¬(A∨¬A) ⊢ ¬A                                   BY notI
   \
    ¬(A∨¬A), A ⊢ ff                               BY notI
    \
     ¬(A∨¬A), A ⊢ A∨¬A                            BY orI1
     \
      ¬(A∨¬A), A ⊢ A                              BY hypothesis 2
```

1.4–b $(\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge B \;\Rightarrow\; (C \wedge D \wedge \neg(A \vee \neg B)) \;\Rightarrow\; (D \vee C \wedge (A \vee \neg B) \wedge \neg\neg(D \vee \neg D))$:
Von der rechten Seite sollte man sich nicht abschrecken lassen, da die linke bereits widersprüchlich ist. Damit kann man alles, also auch solche Mammutkonstruktionen folgern, auf die es im Beweis jedoch nicht ankommt.

```
⊢ (¬A∨¬B) ∧ A∧B ⇒ (C∧D ∧ ¬(A∨¬B)) ⇒ (D∨C ∧ (A∨¬B) ∧ ¬¬(D∨¬D))
                                                          BY impI
\
 (¬A∨¬B) ∧ A∧B ⊢ (C∧D ∧ ¬(A∨¬B)) ⇒ (D∨C ∧ (A∨¬B) ∧ ¬¬(D∨¬D))
                                            BY andE 1 THEN andE 2
 \
  (¬A∨¬B), A, B ⊢ (C∧D ∧ ¬(A∨¬B)) ⇒ (D∨C ∧ (A∨¬B) ∧ ¬¬(D∨¬D))
  |                                                       BY orE 1
  |\
  | ¬A, A, B ⊢ (C∧D ∧ ¬(A∨¬B)) ⇒ (D∨C ∧ (A∨¬B) ∧ ¬¬(D∨¬D)) BY notE 1
  |  \
  |   ¬A, A, B ⊢ A                                   BY hypothesis 2
   \
    ¬B, A, B ⊢ (C∧D ∧ ¬(A∨¬B)) ⇒ (D∨C ∧ (A∨¬B) ∧ ¬¬(D∨¬D)) BY notE 1
    \
     ¬B, A, B ⊢ B                                    BY hypothesis 3
```

Der Beweis beginnt mit den beiden Konjunktionseliminationen und anschließender Fallunterscheidung mittels Disjunktionselimination. In jedem der beiden Fälle schließt dann die jeweils mögliche Negationselimination den Beweis ab.

1.4–c `(A∨B) ∧ ¬(A∧B) ⇒ ¬A∧B ∨ A∧¬B`:

Der Sequenzenbeweis beginnt hier mit der Disjunktionselimination. Danach kann die jeweils geeignete Seite der Disjunktion rechts verwendet und ein intuitionistischer Beweis geführt werden.

```
 ⊢ (A∨B) ∧ ¬(A∧B) ⇒ ¬A∧B ∨ A∧¬B                          BY impI THEN andE 1
 \
  (A∨B), ¬(A∧B) ⊢ ¬A∧B ∨ A∧¬B                                         BY orE 1
  |\
  | A, ¬(A∧B) ⊢ ¬A∧B ∨ A∧¬B                                            BY orI2
  |  \
  |   A, ¬(A∧B) ⊢ A∧¬B                                                  BY andI
  |   |\
  |   | A, ¬(A∧B) ⊢ A                                           BY hypothesis 1
  |    \
  |     A, ¬(A∧B) ⊢ ¬B                                                  BY notI
  |      \
  |       A, ¬(A∧B), B ⊢ ff                                           BY notE 2
  |        \
  |         A, ¬(A∧B), B ⊢ A∧B  BY andI THENL[hypothesis 1;hypothesis 3]
  \
   B, ¬(A∧B) ⊢ ¬A∧B ∨ A∧¬B                                             BY orI1
    \
     B, ¬(A∧B) ⊢ ¬A∧B                                                   BY andI
     |\
     | B, ¬(A∧B) ⊢ ¬A                                                   BY notI
     |  \
     |   B, ¬(A∧B), A ⊢ ff                                            BY notE 2
     |    \
     |     B, ¬(A∧B), A ⊢ A∧B    BY andI THENL[hypothesis 3;hypothesis ]
      \
       B, ¬(A∧B) ⊢ B                                            BY bypothesis 1
```