Übung zur Vorlesung

Automatisierte Logik und Programmierung

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2008/09

Blatt 1 — Abgabetermin: 29.10.08 nach der Übung

Das erste Übungsblatt soll dazu dienen, ein Gefühl für die Begriffe *Kalkül*, *Prädikatenlogik*, *definitorische Erweiterung*, sowie *Intuitionistische Logik* zu erarbeiten. Dazu soll weniger das Knacken von harten Nüssen dienen sondern vielmehr das herumspielen mit einfachen Fragestellungen.

Aufgabe 1.1 (Prädikatenlogik: Semantik)

Es seien:

$\mathcal{V} = \{\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}\}$
$\mathcal{F} = \{\mathtt{+},\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2},\ldots\}$
$\mathcal{P} = \emptyset$
$\mathcal{T} = \{\mathbb{N}\}$

unter folgender (nicht–Standard) Interpretation ι:

$\iota(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_\omega^\Omega$, die Menge der natürlichen Zahlen (mit Null) ergänzt um zwei Elemente Ω und ω
$\iota(\mathtt{x}) = \iota(\mathtt{y}) = \iota(\mathtt{z}) =$ Null
$\iota(\mathtt{0}), \iota(\mathtt{1}), \ldots =$ Null, Eins,...
$\iota(\mathtt{+}) = \oplus$

Dabei sei die zweistellige Funktion $\oplus$ wie folgt definiert, wobei $i, j \in \mathbb{N} \setminus \{\Omega, \omega\}$ gilt und mit "$+$" die gewöhnliche Addition auf natürlichen Zahlen gemeint ist:

$\oplus$	j	ω	Ω
i	$i+j$	Ω	ω
ω	ω	Ω	ω
Ω	Ω	Ω	ω

Welche der folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke sind semantisch `wahr` unter ι?

1.1–a $\forall\mathtt{x}{:}\mathbb{N}.\neg(\mathtt{x=x+1})$
1.1–b $\forall\mathtt{x,y}{:}\mathbb{N}.\mathtt{x+1=y+1} \Rightarrow \mathtt{x=y}$
1.1–c $\forall\mathtt{x}{:}\mathbb{N}.\mathtt{x+0=x}$
1.1–d $\forall\mathtt{x}{:}\mathbb{N}.\mathtt{0+x=x}$
1.1–e $\forall\mathtt{x}{:}\mathbb{N}.\neg(\mathtt{0=x+1})$
1.1–f $\forall\mathtt{x}{:}\mathbb{N}.\neg(\mathtt{x=0}) \Rightarrow \exists\mathtt{y}{:}\mathbb{N}.\mathtt{x=y+1}$
1.1–g $\forall\mathtt{x,y,z}{:}\mathbb{N}.\mathtt{x+(y+z)=(x+y)+z}$
1.1–h $\forall\mathtt{x,y}{:}\mathbb{N}.\mathtt{x+y=y+x}$
1.1–i $\forall\mathtt{x,y}{:}\mathbb{N}.\mathtt{0+x=x} \Rightarrow \mathtt{(0+x)+y=x+(y+0)}$

Aufgabe 1.2 (Definitorische Erweiterung)

Definieren Sie die folgenden Operatoren bzw. Ausdrücke mit Hilfe einer äquivalenten Formel in der Prädikatenlogik erster Stufe mit Sorten:

1.2–a $A \dot\wedge B$: "*höchstens eine der beiden Formeln A und B gilt*"

1.2–b $\exists_1 x : T.A(x)$: "*es gibt genau ein x in T für das die Formel $A(x)$ gilt*"

Aufgabe 1.3 (Intuitionismus)

Welche der folgenden Aussagen gilt intuitionistisch, welche nur klassisch? Geben Sie eine informale Begründung.

1.3–a $\neg\neg(A \vee \neg A)$

1.3–b $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \vee B$

1.3–c $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow A \vee B$

1.3–d $\neg A \vee B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Hinweis: Eine Aussage ist nur dann intuitionistisch gültig, wenn es einen Beweis für sie gibt, der nicht vom Gesetz des ausgeschlossenen Dritten ("*tertium non datur*") Gebrauch macht. Es lohnt sich, zu mehreren über diese — ziemlich philosophischen — Fragen zu diskutieren.

Aufgabe 1.4 (Logik–Kalküle)

Beweisen Sie folgende Formeln mit den Regeln der Refinement Logic.

1.4–a $\neg\neg(A \vee \neg A)$

1.4–b $(\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge B \Rightarrow (C \wedge D \wedge \neg(A \vee \neg B) \Rightarrow (D \vee C \wedge (A \vee \neg B) \wedge \neg\neg(D \vee \neg D)))$

1.4–c $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \wedge B \vee A \wedge \neg B$

Hinweis: Für diese Aufgabe und einige der zukünftigen Übungsaufgaben lohnt es, sich in das Nuprl System einzuarbeiten und die Beweise dann mit diesem System zu führen.