Übung zur Vorlesung

# Automatisierte Logik und Programmierung I

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2008/09

Blatt 3 — Abgabetermin: 26.11.08 nach der Übung

---

*Das dritte Übungsblatt soll dazu dienen, mit dem λ–Kalkül vertraut zu werden. Dazu soll ein Einstieg über das Anwenden von Definitionen für Standard–Erweiterungen versucht werden.*

## Aufgabe 3.1 (λ–Kalkül I: Projektionen)

Zeigen Sie, daß die Operatoren $pair.\mathbf{1} \equiv pair\ (\lambda x.\lambda y.x)$ und $pair.\mathbf{2} \equiv pair\ (\lambda x.\lambda y.y)$ tatsächlich die Projektionen eines Paares $pair = \langle s,t\rangle \equiv \lambda p.\, p\, s\, t$ berechnen.

## Aufgabe 3.2 (λ–Kalkül II: Bool'sche Algebra)

Definieren Sie mit Hilfe der Bool'schen Operatoren **T**, **F** und **if** $b$ **then** $s$ **else** $t$ die folgenden Operatoren:

3.2–a "**and**", die logische Konjunktion

3.2–b "**or**", die logische Disjunktion

3.2–c "**neg**", die logische Negation

3.2–d "**imp**", die logische Implikation

Überlegen Sie sich, wie man die Korrektheit dieser Definitionen nachweisen könnte und führen Sie für diesen Nachweis für einen der Operatoren mit Hilfe der Beweisregeln für den λ-Kalkül.

## Aufgabe 3.3 (λ–Kalkül III: Church Numerals)

Die Darstellung der natürlichen Zahlen wurde mit Hilfe der *Church Numerals* ( $\overline{n} \equiv \lambda f.\lambda x.\, f^n\, x$ ) beschrieben. Zeigen Sie

3.3–a $\textbf{zero} \equiv \lambda n.\, n\,(\lambda n.\textbf{F})\ \textbf{T}$ beschreibt einen Test auf Null, d.h.: $\textbf{zero}\ \overline{n} = \begin{cases} \textbf{T} & \text{wenn } n = 0, \\ \textbf{F} & \text{wenn } n > 0 \end{cases}$

3.3–b $\textbf{mul} \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\, m\,(n\,f)\,x$ repräsentiert die Multiplikation, d.h.: $\textbf{mul}\ \overline{m}\ \overline{n} = \overline{m \cdot n}$

3.3–c $\textbf{p} \equiv \lambda n.\ (n\,(\lambda fx.\,\langle \textbf{s},\, \textbf{let}\ \langle f,x\rangle = fx\ \textbf{in}\ f\ x\rangle)\ \langle \lambda z.\overline{0},\, \overline{0}\rangle).\mathbf{2}$
repräsentiert die Vorgängerfunktion, d.h.: $\textbf{p}\ \overline{n} = \overline{n-1}$. (sehr aufwendig)

## Aufgabe 3.4 (λ–Kalkül IV: Ganzzahlfunktionen)

3.4–a Geben Sie einen λ-Term **subtract** an mit der Eigenschaft $\textbf{subtract}\ \overline{m}\ \overline{n} = \overline{m-n}$

3.4–b Beschreiben Sie einen λ-Term **less_or_equal** mit $\textbf{less\_or\_equal}\ \overline{m}\ \overline{n} = \begin{cases} \textbf{T} & \text{falls } m \le n \\ \textbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$

3.4–c Geben Sie einen λ-Term **max** an mit der Eigenschaft $\textbf{max}\ \overline{m}\ \overline{n} = \begin{cases} \overline{n} & \text{falls } m \le n \\ \overline{m} & \text{sonst} \end{cases}$

Zeigen Sie beispielhaft, daß Ihre Terme korrekt sind.