

DBA, (ϵ -)NEA

Konfigurationen, Sprache, Induktionsbeweise

Hier ϵ -NEA $\equiv$ NEA

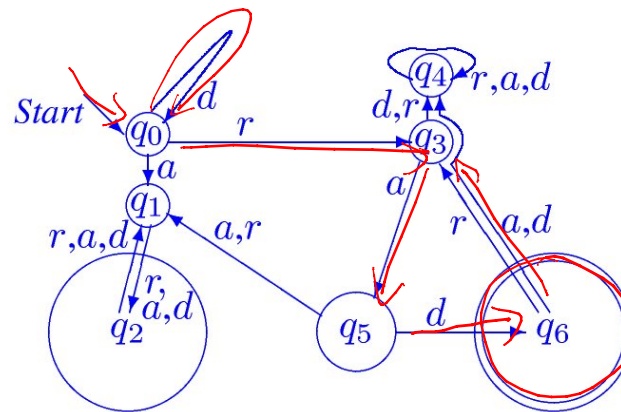
Tutorium, 12.11.2008

Notiztitel

11/5/2008

Hausaufgabe 2.6 (Konstruktion deterministischer endlicher Automaten)

Gegeben sei der endliche Automat $A_{rad} = \{ \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{r, a, d\}, \delta_{rad}, q_0, \{q_6\} \}$, wobei die Zustandsübergangsfunktion δ_{rad} durch folgendes Diagramm gegeben ist.



das rote ist
das einzig
relevante

Geben Sie die Sprache L_{rad} an, die der Automat akzeptiert, und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Behauptung.

Beobachtung: q_6 ist der einzige Endzustand

Idee

nach	q_6	Kann man nur von q_5 mit d
"	q_5	" " " q_3 mit a
"	q_3	Kann man nur von q_0, q_6 mit r
"	q_0	" " " q_0 mit d

Alle anderen Zustände führen nicht zu einem Endzustand!

Sprache:

Schleife bei q_0

Worte

Schleife $q_6 \rightarrow q_3 \rightarrow q_5 \rightarrow q_6$

d^n $n \in \mathbb{N}$
 $(rad)^m$ $m \in \mathbb{N}$

Weg von q_0 nach q_6 : $q_0 \rightarrow q_3 \rightarrow q_5 \rightarrow q_6$

"rad"

$$L(A) = \{ d^n (rad)^m \mid n, m \in \mathbb{N} \quad m \geq 1 \}$$

~~$d^* (rad)^+$~~

Beweisskizze:

1) Behauptungen aufstellen

a) $\hat{\delta}(q_0, w) = q_0 \Leftrightarrow w = d^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$

b) $\hat{\delta}(q_0, w) = q_3 \Leftrightarrow w = d^n (rad)^m r$ für $n, m \in \mathbb{N}$

c) $\hat{\delta}(q_0, w) = q_5 \Leftrightarrow w = d^n (rad)^m r a$

d) $\hat{\delta}(q_0, w) = q_6 \Leftrightarrow w = d^n (rad)^m rad$

Behauptung

Idee
 präzisiert

2) Beweise andeuten

a) Induktion über n wie Binhet 2.1 (Teil 8)

b-d) Simultane Induktion
Binhet $w = d^n r$ Übergang von q_0

um b zu zeigen braucht id a/d
 c b
 d c

Beweis für b) Induktion geht über w

Basis $w = \varepsilon$ $\hat{\delta}(q_0, w) = q_0 \neq q_3$
 $w \neq d^n (\text{rad})^m r$

beide Seiten sind falsch $\rightarrow$ also gilt b)

(c, d genauso)

Annahme b, c, d gilt für alle $w \in \{r, a, d\}^*$

Schritt

$$w = vb$$

für ein $b \in \{r, q, d\}$

(b) Sei $\hat{\delta}(q_0, w) = q_3$

dann gibt es einen Zustand p mit $\hat{\delta}(q_0, v) = p$
und $\delta(p, b) = q_3$

Laut Diagramm muß $p = q_0$ oder $p = q_6$ sein

und $b = r$

↑
symbol 'r'
halt & halte

wenn $p = q_0$: $\hat{\delta}(q_0, v) = q_0$ also $v = d^n$
also $w = d^n r$ ✓

wenn $p = q_6$: $\hat{\delta}(q_0, v) = q_6$ also $v = d^n (rad)^{m+1}$
also $w = d^n (rad)^{m+1} r$

↳ beide Fälle gibt es ein $n, m \in \mathbb{N}$ mit
 $w = d^n (rad)^m r$ ✓

Gegenrichtung

Sei $w = d^n (rad)^m r$ ($w = vb$)

dann $v = d^n (rad)^m$ und $b = r$

Falls $m=0$: dann $v = d^n$ also nach (a)

$$\hat{\delta}(q_0, v) = q_0$$

und damit

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q_0, w) &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, v), r) \\ &= \hat{\delta}(q_0, r) = q_3\end{aligned}$$

Falls $m>0$ dann $v = d^n (rad)^{m-1} rad$

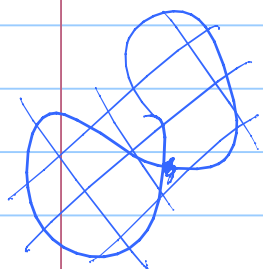
also nach (d)

$$\hat{\delta}(q_0, v) = q_0$$

und

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q_0, w) &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, v), r) \\ &= \hat{\delta}(q_0, r) = q_3\end{aligned}$$

also $\hat{\delta}(q_0, w) = q_3$ in beide Fälle ✓



Hausaufgabe 2.7 (Endliche Automaten mit Ausgabe)

In der Literatur zur Automatentheorie findet man oft auch Modelle für endliche Automaten, die eine zusätzliche **Ausgabefunktion** λ enthalten. Bei Mealy-Automaten wird die Ausgabe bestimmt durch die Eingabe und den Zustand, in dem sich der Automat gerade befindet. Bei Moore-Automaten hängt die Ausgabe nur vom erreichten Zustand ab. Die Formalisierung ist ähnlich zu der von endlichen Automaten.

Ein **Mealy-Automat** ist ein 6-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$, wobei Δ ein Ausgabealphabet ist und $\lambda: Q \times \Sigma \rightarrow \Delta$ eine Ausgabefunktion. Die anderen Komponenten sind wie bei endlichen Automaten. Im Kontrast dazu ist ein **Moore-Automat** ein 6-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ mit Ausgabefunktion $\lambda: Q \rightarrow \Delta$.

Die von einem Automaten M **berechnete Funktion** f_M beschreibt die Ausgabe, die der Automat bei einer gegebenen Eingabe generiert. Sie ist definiert als $f_M(w) = \hat{\lambda}(q_0, w)$, wobei die erweiterte Ausgabefunktion $\hat{\lambda}: Q \times \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ wie folgt definiert ist:

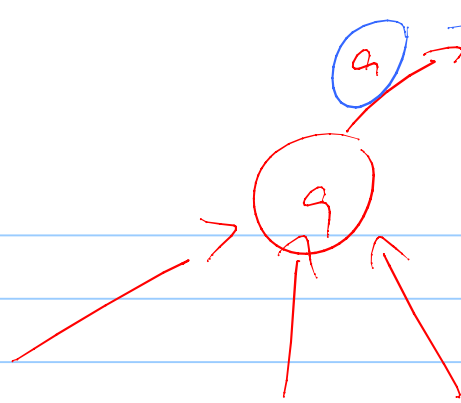
$$\text{Für Mealy-Automaten: } \hat{\lambda}(q, w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = \varepsilon, \\ \hat{\lambda}(q, v) \circ \lambda(\delta(q, v), a) & \text{falls } w = v a \text{ für ein } a \in \Sigma \end{cases}$$

$$\text{Für Moore-Automaten: } \hat{\lambda}(q, w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = \varepsilon, \\ \hat{\lambda}(q, v) \circ \lambda(\delta(q, v), a) & \text{falls } w = v a \text{ für ein } a \in \Sigma \end{cases}$$

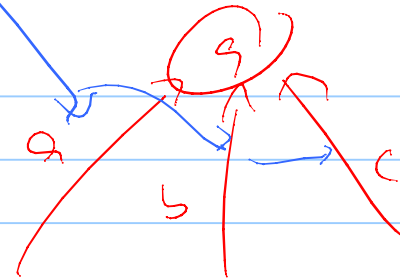
Beweisen Sie, daß Mealy- und Moore-Automaten im folgenden Sinne äquivalent sind

1. Zu jedem Moore-Automaten MO gibt es einen Mealy-Automaten ME mit $f_{ME}(w) = f_{MO}(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$
2. Zu jedem Mealy-Automaten ME gibt es einen Moore-Automaten MO mit $f_{ME}(w) = f_{MO}(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$

1)



Moore



Mealy

Simulation

Mealy Automat gibt bei Eingabe von x in Zustand q das Symbol aus, das der Moore Automat in $\delta(q, x)$ ausgibt

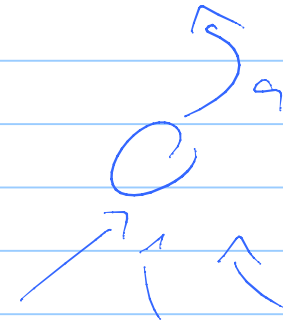
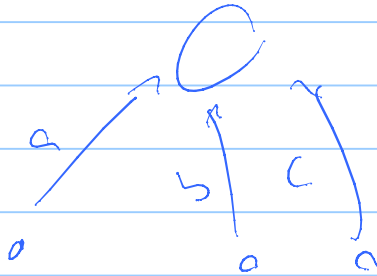
$$\lambda_{ME}(q, x) = \lambda_{MO}(\delta(q, x))$$

gegeben $MO = (Q, \Sigma, \delta, \lambda_{MO}, q_0)$

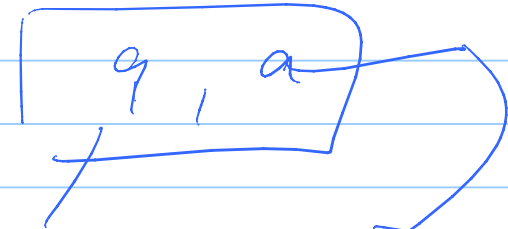
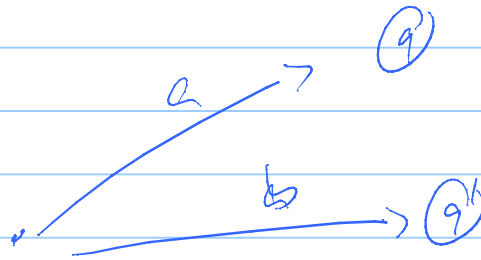
wähle $ME = (Q, \Sigma, A, \delta, \lambda_{ME}, q_0)$

zeige $\lambda_{ME}(q, w) = \lambda_{MO}(q, w)$ per Induktion

MOORE $\rightarrow$ MEALY ?



MOORE
Zustand



erreichte MB Zustand
Ausgabe bei Übergang

Codiere Ausgabe des Mealy Automaten in Zustands-
namen

Gegeben $MB = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda_{ME}, q_0)$

Konstruiere $M_C = (Q \times \Delta, \Sigma, \Delta, \delta', \lambda_{MC}, (q_0, e))$

für ein beliebiges $e \in \Delta$

$$\delta'_{MC}(\underline{(q, e)}, x) = (\delta_{ME}(q, x), \lambda_{ME}(q, x))$$

$$\lambda_{MC}(\underline{(q, e)}) = e$$

Beweise $\hat{\lambda}_{MC}(\underline{(q, e)}, w) = \hat{\lambda}_{ME}(\underline{q}, w)$

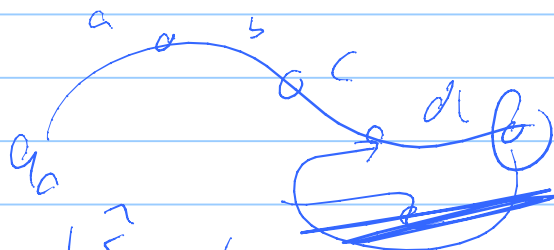
per Induktion über w

$$w = \epsilon$$

$$w = vx$$

$$\hat{\lambda}_{MC}(\underline{(q, e)}, vx) =$$

$$\hat{\lambda}_{MC}(\underline{(q, e)}, v) \circ \hat{\lambda}_{MC}(\delta_{MC}(\underline{(q, e)}, v), x)$$



$$abcd \in L(A)$$

$$\left. \begin{array}{l} abc \\ ab \\ a \\ \epsilon \end{array} \right\} \in L_1$$

$$\hat{\lambda}_{m\varepsilon}(q, v) \approx a$$

$$\text{wobec } (\hat{\delta}_{m\varepsilon}(q, e, vx) = (p, a))$$

$$\hat{\delta}_{m\varepsilon}(q, vx), \lambda_{m\varepsilon}(\hat{\delta}(q, v), x)$$

$$\hat{\lambda}_{m\varepsilon}(q, vx)$$

$$\hat{\lambda}_{m\varepsilon}(q, v) \approx \lambda_{m\varepsilon}(\hat{\delta}(q, v), x)$$