Tutorium, 14.1.2009

Notiztitel 11/5/2008

- 10.3.1 $L_1 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \}$

PDA: Zähle im Stack die Differenz der Anzahl von a's und b's

jedes "+" ein a mehr als b's
- schreiben wenn a gelesen und Stacksymbol ist Z_0 / +
- entfernen wenn b gelesen " +

"–" ein b mehr als a's
- schreiben, wenn b gelesen und Stacksymbol ist Z_0 / –
- löschen wenn a gelesen –

wenn Wort fertig gelesen und Z_0 im Stack dann leere den Stack (ε-Übergang)
"Nichtdeterministisch"

$$P_\varepsilon = (\underbrace{\{q_0\}}_{Q}, \underbrace{\{a,b\}}_{\Sigma}, \underbrace{\{Z_0, +, -\}}_{\Gamma}, \delta_\varepsilon, q_0, Z_0, \emptyset)$$

mit δ_ε =

δ_F

	Q	Σ	Γ	
$\rightarrow$	q_0	a	Z_0	$(q_0, +Z_0)$
$\rightarrow$	q_0	a	$+$	$(q_0, ++)$
$\rightarrow$	q_0	a	$-$	(q_0, ε)
$\rightarrow$	q_0	b	Z_0	$(q_0, -Z_0)$
$\rightarrow$	q_0	b	$+$	(q_0, ε)
$\rightarrow$	q_0	b	$-$	$(q_0, --)$
$\Longrightarrow$	~~q_0~~	~~ε~~	~~Z_0~~	~~(q_0, ε)~~
*	q_0	ε	Z_0	(q_1, ε)

Akzeptieren mit Endzustand

wenn Wort fertig gelesen, Z_0 im Stack, springe in Endzustand q_1

$$P_F = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, +, -\}, \delta_F, q_0, Z_0, \{q_1\})$$

Korrektheit: $L_\varepsilon(P_\varepsilon) = L_1$?

$$L_\varepsilon(P_\varepsilon) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q.\ (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$$

hier

$$L_\varepsilon(P_\varepsilon) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, z_0) \vdash^* (q_0, \varepsilon, \varepsilon) \}$$
$$= \{ w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \}$$

Behauptung spiegelt Idee des Automaten wider

(1) $(q_0, \cancel{w}v, z_0) \vdash^* (q_0, v, \cancel{+^n}\, z_0)$

$\Longleftrightarrow \#_a(w) - \#_b(w) = n \geq 0$ für alle v

(2) $(q_0, wv, z_0) \vdash^* (q_0, v, -^n z_0)$

$\Downarrow$

$\Longleftrightarrow \#_b(w) - \#_a(w) = n \geq 0$

Beweis durch Induktion über w

Basis $w = \varepsilon$ $\quad (q_0, \varepsilon v, z_0) \vdash^* (q_0, v, +^n z_0)$ (1)

$\Longleftrightarrow$ [$n = 0$ weil kein Schritt durchgeführt
und $\#_a(\varepsilon) - \#_b(\varepsilon) = 0 = n$]

analog für $-$

$\cancel{(q_0, v, Z_0) \vdash^* (q_0, v, \varepsilon)}$

es gilt $\#_a(\varepsilon) - \#_b(\varepsilon) = 0$

und $(q_0, \varepsilon v, Z_0) \vdash^0 (q_0, v, Z_0)$

$= (q_0, v, +^0 Z_0)$

$= (q_0, v, -^0 Z_0)$

damit ist (1) (2) erfüllt

Annahme (1) und (2) sind erfüllt für ein $v \in \Sigma^*$

Schritt $w = vx$ für ein $x \in \{a, b\}$

Falls $x = a$: (1) wenn $(q_0, vav, Z_0) \vdash^* (q_0, v, +^n Z_0)$

genau dann war die Ableitung

$*$ $(q_0, \underbrace{v\boxed{av}}_{v'}, Z_0) \vdash^* (q_0, \underbrace{\boxed{av}}_{v'}, +^{n-1} Z_0) \vdash (q_0, v, +^n Z_0)$

oder

$*$ $(\ldots \ldots \quad (q_0, av, -Z_0) \vdash (q_0, v, +^0 Z_0)$

genau dann wenn

$\#_a(v) - \#_b(v) = n-1 \geq 0$

$*$ also $\#_a(w) - \#_b(w) = n \geq 0$ ✓

oder

$$\#_b(v) - \#_a(v) = 1$$

also

$$\#_a(w) - \#_b(w) = 0$$

Umkehrung folgt wie markiert

(2) wenn $(q_0, vau, z_0) \vdash^* (q_0, u, -^n z_0)$

genau dann $(q_0, vau, z_0) \vdash (q_0, au, -^{n+1} z_0) \vdash (q_0, u, -^n z_0)$

per Annahme ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\#_b(v) - \#_a(v) = n+1$$

also

$$\#_b(w) - \#_a(w) = n$$

Fall $x = b$ analog.

Abschluß: da P_ε mit leerem Stack erkennt, ist der letzte Schritt $(q_0, \varepsilon, z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$

also

$$w \in L(P_\varepsilon) \Leftrightarrow (q_0, w, z_0) \vdash^* (q_0, \varepsilon, z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \#_a(w) - \#_b(w) = 0$$

$$\Leftrightarrow w \in L_1$$