Übung zur Vorlesung

# Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2008/09

**Blatt 2 (Version 2) — Abgabetermin: 10.11.2008, 12:30 Uhr**

---

**Vorbereitung auf die nächste Vorlesung:** Arbeiten Sie sich in das Thema "deterministische und nichtdeterministische endliche Automaten" ein. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheiten 2.1 und 2.2 und die Kapitel 1.5 und 2.1–2.3 des Buches von Hopcroft, Motwani und Ullman.

Gute Zusatzinformation zu diesen Themen finden Sie auch in der empfohlenen Literatur und im Internet. Informationsquellen wie Wikipedia sind jedoch mit Vorsicht zu genießen, da sie nicht referiert sind und oft Fehler im Detail enthalten. Für einen ersten Eindruck sind sie jedoch gut geeignet.

---

## Aufgabe 2.1 (Fehlerhafte Beweisführung)

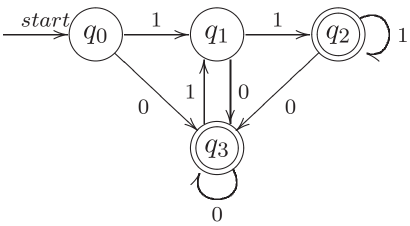
Wo ist der Fehler in folgendem Beweis für die Behauptung

„Wenn $M$ eine nichtleere Menge ist, dann sind alle ihre Elemente gleich."

„Wir beweisen durch Induktion über $|M|$: Wenn $|M| = 1$, dann ist die Bedingung trivialerweise erfüllt. Es sei $|M|=n$ und die Bedingung gelte für alle Mengen $M'$ mit $|M'|<n$. Wir wählen ein Element $a \in M$ und zerlegen $M$ in $M = M_1 \cup M_2$ mit $|M_1|=|M_2|<n$ und $a \in M_1$ und $a \in M_2$.
Weil nach der Induktionshypothese alle Elemente in $M_1$ gleich sind, alle Elemente in $M_2$ gleich sind und $M_1$ und $M_2$ das Element $a$ enthalten, müssen auch alle Elemente in $M$ gleich sein."

## Aufgabe 2.2 (Analyse endlicher Automaten)

Gegeben sei der Automat $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_3\})$, wobei die Zustandsüberführungsfunktion $\delta$ durch die folgende Grafik gegeben ist.




1. Nennen Sie 5 Wörter, die der Automat $A$ akzeptiert! Beschreiben Sie die Abarbeitung des Wortes „0111" mit Hilfe der erweiterten Zustandsüberführungsfunktion!
2. Versuchen Sie zu verstehen, wie der Automat arbeitet. Beschreiben Sie die Sprache des Automaten $A$ mit eigenen Worten!
3. Erstellen Sie eine möglichst kurze Darstellung der Sprache, die der Automat $A$ akzeptiert!

## Aufgabe 2.3 (Konstruktion endlicher Automaten)

Entwerfen Sie einen Automaten, der die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w)$ ist gerade und $3 \mid \#_b(w)\}$ akzeptiert. Dabei bezeichnet $\#_a(w)$ die Anzahl der $a$'s im Wort $w$ (eine andere Notation hierfür ist $|w|_a$). Gehen Sie dabei nach den folgenden vier Schritten vor.

1. Beschreiben Sie die Funktionsweise Ihres Automaten stichpunktartig!
2. Stellen Sie das Automatentupel (ohne die Überführungsfunktion) Ihres Automaten auf!
3. Stellen Sie die Zustandsüberführungsfunktion graphisch dar!
4. Stellen Sie die Zustandsüberführungsfunktion tabellarisch dar!

## Aufgabe 2.4 (Weitere Aufgaben zur Konstruktion von DEA)

Geben Sie deterministische endliche Automaten an, die folgende Sprachen akzeptieren.

1. $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ ist Binärdarstellung einer Zweierpotenz$\}$
2. $\{w \in \{a,b,c\}^* \mid \exists u, v \in \{a,b,c\}^*, w = uabcv \wedge |v| \geq 3\}$,
3. $\{w \in \{0,1\}^* \mid \exists u, v \in \{a,b,c\}^*. \exists n \in \mathbb{N}. w = uabcv \wedge |u| = 3n\}$,

Begründen Sie Ihre Lösungen stichpunktartig. Aus diesen Begründungen sollte erkennbar sein, wie Sie auf den entsprechenden Automaten gekommen sind oder wie der Automat arbeitet. Ein Beweis ist nicht erforderlich.

## Aufgabe 2.5 (Induktive Beweise mit struktureller Induktion)

Ein *binärer Baum* sei rekursiv wie folgt definiert:

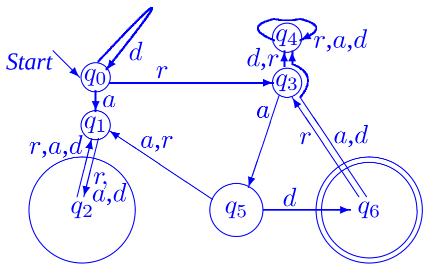
1. Ein Knoten $N$ ist ein binärer Baum mit *Wurzel* $N$.
2. Falls $T_1$ und $T_2$ binäre Bäume sind und $N$ ein (neuer) Knoten ist, dann ist auch $T = (N, T_1, T_2)$ ein binärer Baum mit Wurzel $N$. $T$ beschreibt den Baum, der entsteht indem $N$ mit den Wurzeln der Bäume $T_1$ und $T_2$ durch Kanten verbunden wird.

Ein *innerer Knoten* ist ein Knoten mit mehr als einer Kante.

Beweisen Sie mit struktureller Induktion über den rekursiven Aufbau von binären Bäumen, daß ein binärer Baum $T$ mit $n$ inneren Knoten insgesamt genau $2n+1$ Knoten besitzt.

## Hausaufgabe 2.6 (Konstruktion deterministischer endlicher Automaten)

Gegben sei der endliche Automat $A_{rad}{=}\{\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6\},\{r,a,d\},\ \delta_{rad},q_0,\{q_6\}\}$, wobei die Zustandsübergangsfunktion $\delta_{rad}$ durch folgendes Diagramm gegeben ist.




Geben Sie die Sprache $L_{rad}$ an, die der Automat akzeptiert, und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Behauptung.

**Hinweis:** Da am 31.10. keine Vorlesung stattfindet, werden beispielhafte Beweise für die Korrektheit von Automaten erstmalig am 7.11. vorgeführt. Formulieren Sie zunächst eine informale Begründung und erweitern Sie diese später zu einem Beweis. Dieser Beweis sollte gründlich, verhältnismäßig ausführlich und präzise sein, aber nicht notwendigerweise formal.

## Hausaufgabe 2.7 (Endliche Automaten mit Ausgabe)

In der Literatur zur Automatentheorie findet man oft auch Modelle für endliche Automaten, die eine zusätzliche Ausgabefunktion $\lambda$ enthalten. Bei Mealy-Automaten wird die Ausgabe bestimmt durch die Eingabe und den Zustand, in dem sich der Automat gerade befindet. Bei Moore-Automaten hängt die Ausgabe nur vom erreichten Zustand ab. Die Formalisierung ist ähnlich zu der von endlichen Automaten.

Ein Mealy-Automat ist ein 6-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$, wobei $\Delta$ ein Ausgabealphabet ist und $\lambda{:}Q{\times}\Sigma \rightarrow \Delta$ eine Ausgabefunktion. Die anderen Komponenten sind wie bei endlichen Automaten. Im Kontrast dazu ist ein Moore-Automat ein 6-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ mit Ausgabefunktion $\lambda{:}Q{\rightarrow}\Delta$.

Die von einem Automaten $M$ berechnete Funktion $f_M$ beschreibt die Ausgabe, die der Automat bei einer gegebenen Eingabe generiert. Sie ist definiert als $f_M(w) = \hat{\lambda}(q_0, w)$, wobei die erweiterte Ausgabefunktion $\hat{\lambda}: Q{\times}\Sigma^*{\rightarrow}\Delta^*$ wie folgt definiert ist:

Für Mealy-Automaten: $\hat{\lambda}(q,w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w{=}\varepsilon, \\ \hat{\lambda}(q,v){\circ}\lambda(\hat{\delta}(q,v),a) & \text{falls } w{=}v\,a \text{ für ein } a\in\Sigma \end{cases}$

Für Moore-Automaten: $\hat{\lambda}(q,w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w{=}\varepsilon, \\ \hat{\lambda}(q,v){\circ}\lambda(\hat{\delta}(q,va)) & \text{falls } w{=}v\,a \text{ für ein } a\in\Sigma \end{cases}$

Beweisen Sie, daß Mealy- und Moore-Automaten im folgenden Sinne äquivalent sind

1. Zu jedem Moore-Automaten $MO$ gibt es einen Mealy-Automaten $ME$ mit $f_{ME}(w) = f_{MO}(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$
2. Zu jedem Mealy-Automaten $ME$ gibt es einen Moore-Automaten $MO$ mit $f_{ME}(w) = f_{MO}(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$

**Anmerkung:** Sollten Sie zur Lösung dieser Aufgabe Informationen aus Lehrbüchern oder dem Internet verwenden, vergessen Sie bitte nicht, die Notation auf die oben angegebene zu übertragen, eventuell vorhandene Lücken zu schließen und Ihre Quellen zu zitieren.