Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2008/09

Blatt 10 (Version 2) — Abgabetermin: 19.01.2009

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Vertiefen Sie das Thema "Pushdown Automaten" und arbeiten Sie sich in das Thema "Eigenschaften kontextfreier Sprachen" ein. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheit 3.2 und 3.3 (Folien 1–7), die Kapitel 6 und 7.3 des Buches von Hopcroft, Motwani und Ullman, eines der empfohlenen Bücher oder das Internet.

Aufgabe 10.1 (Analyse von Pushdown-Automaten)

Gegeben sei der PDA $P = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_1\})$, wobei δ durch die folgende Tabelle gegeben ist.

Q	$\Sigma\cup\varepsilon$	Γ	Resultat
$\rightarrow q_0$	0	Z_0	q_0, XZ_0
$\rightarrow q_0$	0	X	q_0, XX
$\rightarrow q_0$	0	Y	q_0, ε
$\rightarrow q_0$	1	Z_0	q_1, Z_0
$\rightarrow q_0$	1	X	q_0, ε
$\rightarrow q_0$	1	Y	q_0, YY
$\rightarrow q_0$	ε	Z	q_1, ε
$*q_1$	0	Z_0	q_0, Z_0
$*q_1$	1	Z_0	q_0, YZZ_0

1. Geben Sie alle möglichen Konfigurationsfolgen für die Wörter „00111“, „10101“ und „1110“ an!
2. Geben Sie die von P akzeptierte Sprache an, wenn P durch die Endzustände akzeptiert.
3. Wie sieht die Sprache von P aus, wenn P mit leerem bzw. mit einelementigem Stack „Z_0“ akzeptiert?

Aufgabe 10.2 (Pushdown-Automaten vs. Grammatiken)

Es sei $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$.

1. Geben Sie einen PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ an, der die Sprache L akzeptiert und erläutern Sie kurz Ihre Konstruktion.
2. Geben Sie zwei Ableitungen (Folgen von Konfigurationen) für das Wort $aabbcc$ an.
3. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (V, T, P, S)$ an, welche die Sprache L erzeugt und erläutern Sie kurz Ihre Konstruktion.
4. Geben Sie zwei Ableitungen für das Wort $aabbcc$ in der Grammatik G an.

Aufgabe 10.3 (Entwurf von Pushdown-Automaten)

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen das Übergangsdiagramm und eine informelle Beschreibung von PDAs P_ε und P_F an, welche diese Sprachen akzeptiert durch Erreichen eines Endzustands bzw. durch Leeren des Stacks akzeptieren.

1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$.

   Versuchen Sie P_ε auf einen Zustand zu beschränken! Kann man P_F nur mit einem Zustand konstruieren? Skizzieren Sie einen Induktionsbeweis dafür, daß ihr PDA P_ε auch tatsächlich die Sprache L_1 akzeptiert! Nutzen Sie dazu Konfigurationsfolgen!

2. $L_2 = \{a,b\}^* \setminus \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hausaufgabe 10.4 (Abschlußeigenschaften kontextfreier Sprachen)

Zeigen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen abgeschlossen unter endlicher Vereinigung, Verkettung und Hüllenbildung ist.

Hausaufgabe 10.5 (Konstruktion von Pushdown-Automaten)

Sei L die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{a,b\}$, die doppelt so viele a's wie b's enthalten.

1. Geben Sie einen PDA A an, der die Sprache L durch einen leeren Stack akzeptiert. Beginnen Sie mit einer verbalen Beschreibung Ihrer Lösungsidee.
2. Skizzieren Sie einen Induktionsbeweis dafür, daß ihr PDA auch tatsächlich die Sprache L akzeptiert. Nutzen Sie dazu Konfigurationsfolgen. (Achtung: der vollständige Beweis ist sehr lang!)

Hausaufgabe 10.6 (Ein Pushdown Automaten Modell für reguläre Sprachen)

Zeigen Sie, daß eine Sprache L genau dann regulär ist, wenn sie von einem PDA mit beschränkter Stackgröße akzeptiert wird. Beschreiben Sie dazu, wie ein PDA P mit einem Stack der Größe k in einen äquivalenten NEA umgewandelt werden kann und umgekehrt.
Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion. Ein Beweis der Äquivalenz ist nicht erforderlich.