Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2008/09

Blatt 13 (Version 1) — Abgabetermin: 09.02.2009, 12:30 Uhr

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Arbeiten Sie sich in das Thema "Modelle für Typ-0 & Typ-1 Sprachen" ein. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheit 4.2, die Kapitel 8 der Bücher von Hopcroft, Motwani und Ullman bzw. von Vossen und Witt, eines der anderen empfohlenen Bücher oder das Internet.

Aufgabe 13.1 (Normalformen kontextfreier Grammatiken)

In der Vorlesung haben wir gezeigt, daß jede kontextfreie Sprache, die ε nicht enthält, durch eine Grammatik erzeugt werden kann, deren Produktionsregeln die Form $A{\rightarrow}BC$ oder $A{\rightarrow}a$ haben (mit $A,B,C\in V$ und $a\in T$).

Zeigen oder widerlegen Sie, daß dies auch gilt, wenn die Grammatik nur Produktionsregeln der Form $A{\rightarrow}BCD$ oder $A{\rightarrow}a$ haben (mit $A,B,C,D\in V$ und $a\in T$) darf.

Aufgabe 13.2 (Umkehrung des Pumping Lemmas für Anwendungen)

In Einheit 2.5 wurde eine Umkehrung des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen formuliert:

Eine Sprache L ist nicht regulär, wenn es
für jedes $n\in\mathbb{N}$ ein $w\in L$ mit $|w|\geq n$ gibt so dass
für jede Zerlegung $w = x\,y\,z$ mit den Eigenschaften $y\neq\varepsilon$ und $|x\,y|\leq n$
ein $k\in\mathbb{N}$ existiert mit $x\,y^k\,z \notin L$

Formulieren Sie in gleicher Weise die Kontraposition des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen.

Aufgabe 13.3 (Anwendungen des Pumping Lemmas)

Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind.

1. $A = \{0^k 1^{k*l} 2^l \mid k,l\in\mathbb{N}\}$
2. $B = \{a^i b^j \mid j = i^2\}$
3. $C = \{a^n b^{n!} \mid n\geq 1\}$
4. $D = \{a^p \mid p$ ist eine Quadratzahl$\}$

Aufgabe 13.4 (Turingmaschinen)

Betrachten Sie die TM $M = (\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5\},\{0,1\},\{0,1,X,B\},\delta,q_0,B,\{q_5\})$, wobei δ durch die folgende Tabelle gegeben ist.

δ	0	1	X	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,B,R)	(q_3,B,R)	(q_0,B,R)	(q_5,B,R)
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,X,L)	(q_1,X,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_2,X,L)	(q_0,B,R)
q_3	(q_4,X,L)	$(q_3,1,R)$	(q_3,X,R)	—
q_4	—	$(q_4,1,L)$	(q_4,X,L)	(q_0,B,R)
$*q_5$	—	—	—	—

1. Zeichnen Sie den zu M gehörenden Automatengraphen!
2. Geben Sie die Ableitung der Wörter ε, 010, 1010 und 0011 mit Hilfe von Konfigurationen an! Werden diese Wörter akzeptiert?
3. Geben Sie eine Beschreibung der TM an. Gehen Sie dabei auf die Bedeutung der einzelnen Zustände, der Hilfssymbole und des aktuellen Bandinhaltes ein.
4. Geben Sie die Sprache L an, die M akzeptiert.
5. Handelt es sich bei $L(M)$ um eine entscheidbare oder eine semi-entscheidbare Sprache?
6. Beweisen Sie mit Hilfe von Konfigurationen, daß für alle $w \in L$ gilt $(\varepsilon, q_0, w) \vdash^* (\varepsilon, q_5, B)$, d.h. daß M tatsächlich alle Wörter aus L akzeptiert.
   Beschreiben Sie hierzu die wichtigsten Zwischenkonfigurationen der Abarbeitung von Eingaben $z \in \{0, 1\}^*$ in Form von Aussagen der Form $(\varepsilon, q_0, z) \vdash^* (u, q_i, v)$ und begründen Sie warum die von Ihnen behaupteten Konfigurationsübergänge möglich sind.
   Induktionsbeweise zu Schleifen müssen nicht ausgeführt werden.

Hausaufgabe 13.5 (Kontextfreie Sprachen über einelementigem Alphabet sind regulär)

Beweisen Sie, daß jede Sprache L über einem einelementigen Alphabet $\Sigma = \{a\}$ genau dann kontextfrei ist, wenn sie regulär ist. Zeigen Sie hierzu, daß L sich als Vereinigung endlich vieler regulärer Sprachen darstellen läßt und benutzen sie das Pumping Lemma, um diese Sprachen zu identifizieren.

Hinweis: Das Pumping Lemma und die Tatsache, daß die Elemente von L durch die Anzahl der a's eindeutig beschreibbar sind, wird Ihnen zunächst eine potentiell unendliche Zahl von regulären Sprachen $L_{k,j} \subseteq L$ liefern, die zusammen mit den “kleinen” Elementen von L die Sprache L überdecken. Sie benötigen nun etwas Restklassenarithmetik, um zu zeigen, daß bereits endlich viele dieser Klassen ausreichen.

Anmerkung: Sie werden im Internet fragmentarische Lösungen zu dieser Aufgabe finden. Sie erhalten nur Punkte, wenn Ihre Argumente einigermaßen verständlich und schlüssig formuliert sind.

Hausaufgabe 13.6 (Nicht kontextfreie Sprachen)

Beweisen Sie, daß die folgenden Mengen nicht kontextfrei sind.

1. $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1 \wedge (2i = j \wedge 2j = k)$
2. $L_2 = \{1^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$

Hausaufgabe 13.7 (Konstruktion von Turingmaschinen)

Konstruieren Sie eine Turingmaschine M mit maximal 6 Zuständen und zwei Hilfssymbolen X und B, welche die Sprache $L = \{0^a 1^b 2^c \mid a, b, c \in \mathbb{N} \wedge a \geq b \geq c\}$ akzeptiert.

1. Geben Sie zunächst eine informale Beschreibung der Turingmaschine an. Gehen Sie dabei auf die Bedeutung der einzelnen Zustände, der Hilfssymbole und des aktuellen Bandinhaltes ein.
2. Geben Sie anschließen alle Komponenten Ihrer Turingmaschine an.
3. Zeigen Sie mit Hilfe von Konfigurationen, daß M tatsächlich alle Wörter aus L akzeptiert.
   Beschreiben Sie hierzu die wichtigsten Zwischenkonfigurationen der Abarbeitung von Eingaben $z \in \{0, 1, 2\}^*$ in Form von Aussagen der Form $(\varepsilon, q_0, z) \vdash^* (u, q_i, v)$ und begründen Sie warum die von Ihnen behaupteten Konfigurationsübergänge möglich sind.
   Induktionsbeweise zu Schleifen müssen nicht ausgeführt werden.