

Theoretische Informatik II

Dr. Eva Richter / Holger Arnold

Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2008

Übungsblatt 1 (Version 2) — Abgabetermin: 28.04.2008, 12.00 Uhr

Aufgabe 1.1

Erklären Sie, warum der folgende Text keine Beschreibung einer Turingmaschine M ist, die entscheidet, ob ein Polynom in mehreren Variablen eine ganzzahlige Nullstelle besitzt (tatsächlich kann es eine solche Turingmaschine nicht geben).

$M =$ „Bei Eingabe $\langle p \rangle$:

1. Teste, ob die Eingabe eine wohlgeformte Beschreibung eines Polynoms p in den Variablen x_1, \dots, x_n ist. Falls nicht, lehne die Eingabe ab.
2. Zähle nacheinander alle n -Tupel ganzer Zahlen auf und werte p auf jedem dieser Tupel aus.
3. Falls p für eine dieser Belegungen gleich 0 ist, akzeptiere die Eingabe. Ansonsten lehne die Eingabe ab.“

Aufgabe 1.2

Wie viele Schritte kann eine Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R)$ höchstens ausführen, wenn M auf jeder Eingabe anhält und sich der Kopf von M nicht über die ersten k Bandzellen hinausbewegt?

Aufgabe 1.3

Eine Turingmaschine mit beidseitig unendlichem Band funktioniert wie die in der Vorlesung definierte Turingmaschine, mit dem Unterschied, dass ihr Band keinen linken Rand besitzt. Die Sonderregeln für die Übergangsfunktion bei Erreichen des Randes fallen also weg. Bis auf das Eingabewort ist das Band zu Beginn der Verarbeitung mit Leerzeichen gefüllt und der Kopf befindet sich auf dem ersten Zeichen des Eingabeworts.

Beweisen Sie, dass dieses Maschinenmodell äquivalent zu dem in der Vorlesung definierten ist. Zeigen Sie dazu, dass eine Turingmaschine mit einseitig unendlichem Band von einer Turingmaschine mit beidseitig unendlichem Band simuliert werden kann und umgekehrt (es genügt, die Konstruktion zu skizzieren).

Hinweis: Verwenden Sie dieses Maschinenmodell, wenn es die Lösung einer Aufgabe erleichtert.

Aufgabe 1.4

Konstruieren Sie eine Turingmaschine, welche die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ und } i \times j = k\}$ entscheidet. Beschreiben Sie die Arbeitsweise der Turingmaschine zunächst informal, aber trotzdem präzise genug, um daraus eine formale Definition ableiten zu können. Erstellen Sie dann aus der informalen Beschreibung ein Übergangsdiagramm.

Hausaufgabe 1.5

Konstruieren Sie eine Turingmaschine, welche die Sprache $\{w \mid w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* \text{ und } w \text{ enth\u00e4lt jeweils die gleiche Anzahl der Symbole } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ und } \mathbf{c}\}$ entscheidet. Beschreiben Sie die Arbeitsweise der Turingmaschine informal, aber trotzdem pr\u00e4zise genug, um daraus eine formale Definition ableiten zu k\u00f6nnen.

Hausaufgabe 1.6

Geben Sie eine formale Definition der f\u00fcr die vorhergehende Aufgabe konstruierten Turingmaschine an. Beschreiben Sie dabei die \u00dcbergangsfunktion mit einem oder mehreren \u00dcbergangsdigrammen.

Hausaufgabe 1.7

Zeigen Sie, dass die entscheidbaren Sprachen unter Vereinigung, Verkettung, Komplementbildung und Durchschnittsbildung abgeschlossen sind, dass also gilt: Sind L_1 und L_2 entscheidbare Sprachen \u00fcber dem Alphabet Σ , dann sind auch die Sprachen $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2 = \{uv \mid u \in L_1 \text{ und } v \in L_2\}$, $\overline{L_1} = \Sigma^* \setminus L_1$ und $L_1 \cap L_2$ entscheidbar (es gen\u00fcgt, die Konstruktion zu skizzieren).

Hinweis: Argumentieren Sie mit nichtdeterministischen Turingmaschinen und mit Mehrband-Turingmaschinen, wenn es die L\u00f6sung erleichtert. Beachten Sie bei der Konstruktion der Turingmaschine f\u00fcr $L_1 L_2$, dass im Voraus nicht klar ist, welcher Teil der Eingabe auf Enthaltensein in L_1 bzw. L_2 gepr\u00fcft werden soll, und dass eine simulierte Turingmaschine das Band ver\u00e4ndern kann.

Noch einige Hinweise...

Hausaufgaben F\u00fcr jede Hausaufgabe k\u00f6nnen Sie maximal 3 Punkte bekommen. Die Punkte werden nach folgenden Regeln vergeben:

- 3 Punkte* = die Aufgabe wurde im Wesentlichen korrekt gel\u00f6st
- 2 Punkte* = die Aufgabe wurde nur teilweise gel\u00f6st
- 1 Punkt* = die L\u00f6sung der Aufgabe enthielt gr\u00f6\u00dfere Fehler oder L\u00fccken
- 0 Punkte* = die Aufgabe wurde nicht gel\u00f6st oder enthielt sehr viele Fehler oder L\u00fccken

Sprechzeiten Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- Sprechen Sie in den \u00dcbungen Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor an.
- Holger Arnold, Raum 1.21, holger@cs.uni-potsdam.de
Sprechzeiten: mittwochs 14.00–15.00 Uhr und nach Vereinbarung
- Dr. Eva Richter, Raum 1.25, erichter@cs.uni-potsdam.de
Sprechzeiten: dienstags 13.30–15.00 Uhr und nach Vereinbarung