Theoretische Informatik II

Dr. Eva Richter / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2008

Übungsblatt 5 (Version 2) — Abgabetermin: 26.5.2008, 12.00 Uhr

---

Aufgabe 5.1

Geben Sie an, ob die Sprache

$$A = \{\langle M, w, t\rangle \mid M \text{ ist eine Turingmaschine, die das Wort } w \text{ in genau } t \text{ Schritten akzeptiert}\}$$

entscheidbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.2

Beweisen Sie durch Diagonalisierung, dass die Menge $\mathbb{B} = \{b_1 b_2 b_3 \cdots \mid b_i \in \{0, 1\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}$ aller unendlichen Folgen von Nullen und Einsen nicht abzählbar ist. Ist die Menge aller endlichen Folgen von Nullen und Einsen abzählbar?

Aufgabe 5.3

Sei $A = \{\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle, \dots\}$ eine Turing-akzeptierbare Sprache, deren Elemente Beschreibungen von Turingmaschinen (in einer geeigneten Codierung) sind, die auf jeder Eingabe anhalten. Beweisen Sie, dass es eine entscheidbare Sprache D gibt, die von keiner Turingmaschine entschieden wird, deren Beschreibung in A enthalten ist. Wo steckt in Ihrem Beweis der Diagonalisierungsschritt? Was können Sie über die Menge *aller* Beschreibungen von auf jeder Eingabe haltenden Turingmaschinen sagen?

Hinweis: Betrachten Sie einen Aufzähler E_A für die Sprache A und konstruieren Sie eine auf jeder Eingabe haltende Turingmaschine, deren Sprache sich von jeder durch E_A aufgezählten Turingmaschine unterscheidet.

Aufgabe 5.4

Beweisen Sie, dass die entscheidbaren Sprachen unter Homomorphismen *nicht* abgeschlossen sind. Geben Sie dazu eine entscheidbare Sprache $E \subseteq \Sigma^*$ und einen Homomorphismus $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ für Alphabete Σ und Γ an, so dass gilt:

$$\begin{aligned} f(E) &= \{f(x) \mid x \in E\} \\ &= \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ ist eine Turingmaschine, die das Wort } w \text{ akzeptiert}\} \\ &= A_{\mathsf{TM}}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass f tatsächlich ein Homomorphismus mit dieser Eigenschaft ist.

Hausaufgabe 5.5

Für eine Turingmaschine M sei $\phi_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die von M berechnete Funktion auf natürlichen Zahlen.

1. Beweisen Sie durch Diagonalisierung, dass die Menge $B = \{\langle M \rangle \mid M$ ist eine Turingmaschine, so dass ϕ_M überall definiert ist und an keiner Stelle den Funktionswert 0 besitzt$\}$ nicht Turing-akzeptierbar ist.

2. Ist die Menge $B' = \{\langle M \rangle \mid M$ ist eine Turingmaschine, so dass ϕ_M an mindestens einer Stelle den Funktionswert 0 besitzt$\}$ Turing-akzeptierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 5.6

Der Große Satz von Fermat war bis zu Beginn der 90er Jahre eine der berühmtesten unbewiesenen Vermutungen der Mathematik. Er besagt, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $x, y > 0$ und $n > 2$ keine ganzzahligen Lösungen besitzt. Zeigen Sie, dass Sie diese Vermutung bestätigen oder widerlegen könnten, wenn das Halteproblem für Turingmaschinen A_{TM} entscheidbar wäre.

Hausaufgabe 5.7

Beweisen Sie, dass eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ genau dann Turing-akzeptierbar ist, wenn es eine entscheidbare Sprache $B \subseteq \Sigma^*$ gibt, so dass $A = \{x \mid \langle x, y \rangle \in B$ für ein $y\}$ gilt.

Hinweis: Angenommen, die Turingmaschine M akzeptiert die Sprache A. Stellen Sie sich vor, dass für ein $x \in A$ mit $\langle x, y \rangle \in B$ das Wort y Informationen über eine akzeptierende Berechnung von M auf x enthält.

Hausaufgaben Für jede Hausaufgabe können Sie maximal 3 Punkte bekommen. Die Punkte werden nach folgenden *geänderten* Regeln vergeben:

3 Punkte	= die Aufgabe wurde vollständig und fehlerfrei gelöst
2 Punkte	= die Aufgabe wurde vollständig und im Wesentlichen richtig gelöst, die Lösung enthielt aber einige technische Fehler oder Ungenauigkeiten
1 Punkt	= die Lösung war unvollständig oder enthielt größere Fehler
0 Punkte	= die Aufgabe wurde nicht gelöst

Sprechzeiten Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- Sprechen Sie in den Übungen Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor an.
- Holger Arnold, Raum 1.21, holger@cs.uni-potsdam.de
  Sprechzeiten: mittwochs 14.00–15.00 Uhr und nach Vereinbarung
- Dr. Eva Richter, Raum 1.25, erichter@cs.uni-potsdam.de
  Sprechzeiten: dienstags 13.30–15.00 Uhr und nach Vereinbarung