

Theoretische Informatik II

Dr. Eva Richter / Holger Arnold

Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2008

Übungsblatt 6 (Version 2) — Abgabetermin: 2.6.2008, 12.00 Uhr

Definition 1. Eine *funktionale Reduktion* einer Sprache A auf eine Sprache B ist eine total berechenbare Funktion t , so dass jedes Wort x genau dann in A enthalten ist, wenn $t(x)$ in B enthalten ist. Existiert eine funktionale Reduktion von A auf B , dann heißt A *funktional reduzierbar* auf B und man schreibt $A \leq_f B$.

Satz 2. Eine Sprache A sei funktional reduzierbar auf eine Sprache B . Dann gilt: (i) Wenn B Turing-akzeptierbar ist, dann ist auch A Turing-akzeptierbar. (ii) Wenn B entscheidbar ist, dann ist auch A entscheidbar. (iii) Wenn A unentscheidbar ist, dann ist auch B unentscheidbar. (iv) Wenn A nicht Turing-akzeptierbar ist, dann ist auch B nicht Turing-akzeptierbar.

Aufgabe 6.1

1. Beweisen Sie Satz 2 und erklären Sie, wie Sie diesen Satz verwenden können, um zu beweisen, dass eine Sprache nicht Turing-akzeptierbar bzw. nicht entscheidbar ist.
2. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass die Sprachen $HALT_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ ist eine Turingmaschine, die auf dem Wort } w \text{ anhält}\}$, $E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist eine Turingmaschine, deren Sprache leer ist}\}$, $REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist eine Turingmaschine, deren Sprache regulär ist}\}$ und $EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ und } M_2 \text{ sind Turingmaschinen, welche die gleiche Sprache akzeptieren}\}$ unentscheidbar sind.

Geben Sie die beim Beweis der Unentscheidbarkeit von $HALT_{TM}$, E_{TM} , $REGULAR_{TM}$ und EQ_{TM} verwendeten funktionalen Reduktionen an. Welche Sprachen wurden jeweils aufeinander *funktional* reduziert?

3. Beweisen Sie durch funktionale Reduktion, dass die Menge $DECIDABLE_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist eine Turingmaschine, deren Sprache entscheidbar ist}\}$ nicht Turing-akzeptierbar ist. Beachten Sie, dass diese Menge auch Beschreibungen von Turingmaschinen enthält, die *nicht* auf jeder Eingabe anhalten — warum ist das so?

Aufgabe 6.2

1. Formulieren Sie Bedingungen, die eine Übereinstimmung (ein „Match“) für folgende Menge von Dominosteinen erfüllen muss und geben Sie eine Übereinstimmung an.

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} ab \\ abab \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} b \\ a \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} aba \\ b \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} aa \\ a \end{array} \right] \right\}$$

2. Beweisen Sie, dass für die folgende Menge von Dominosteinen keine Übereinstimmung existiert.

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} ab \\ abab \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} ababababab \\ ababababd \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} dbcd \\ bcdbcd \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} bcda \\ ab \end{array} \right] \right\}$$

Hausaufgabe 6.3

Beweisen Sie durch funktionale Reduktion, dass die Sprache $INFINITE_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist eine Turingmaschine, deren Sprache unendlich ist}\}$ unentscheidbar ist. Geben Sie dazu die Reduktionsfunktion an und beweisen Sie, dass diese tatsächlich die Eigenschaften einer funktionalen Reduktion besitzt.

Hausaufgabe 6.4

Zeigen Sie, dass es eine Turingmaschine M gibt, so dass die Sprache $H_M = \{w \mid M \text{ hält auf der Eingabe } w \text{ an}\}$ unentscheidbar ist. Geben Sie eine solche Turingmaschine an.

Hausaufgabe 6.5

Beweisen Sie, dass es eine unentscheidbare Teilmenge von $\{1\}^*$ gibt.

Hinweis: Die in Aufgabe 4.2 beschriebene Codierungsfunktion kann bei der Lösung der Aufgabe nützlich sein...

Hausaufgaben Für jede Hausaufgabe können Sie maximal 3 Punkte bekommen. Die Punkte werden nach folgenden Regeln vergeben:

- 3 Punkte* = die Aufgabe wurde vollständig und fehlerfrei gelöst
- 2 Punkte* = die Aufgabe wurde vollständig und im Wesentlichen richtig gelöst, die Lösung enthielt aber einige technische Fehler oder Ungenauigkeiten
- 1 Punkt* = die Lösung war unvollständig oder enthielt größere Fehler
- 0 Punkte* = die Aufgabe wurde nicht gelöst

Sprechzeiten Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- Sprechen Sie in den Übungen Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor an.
- Holger Arnold, Raum 1.21, holger@cs.uni-potsdam.de
Sprechzeiten: mittwochs 14.00–15.00 Uhr und nach Vereinbarung
- Dr. Eva Richter, Raum 1.25, erichter@cs.uni-potsdam.de
Sprechzeiten: dienstags 13.30–15.00 Uhr und nach Vereinbarung