Theoretische Informatik II

Dr. Eva Richter / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2008

Übungsblatt 7 — Abgabetermin: 9.6.2008, 12.00 Uhr

Aufgabe 7.1

Beweisen Sie, dass weder die Sprache $\mathit{EQ\text{-}FUN}_{\mathsf{TM}} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1$ und M_2 sind Turingmaschinen, welche die gleiche Funktion berechnen$\}$ noch ihr Komplement $\overline{\mathit{EQ\text{-}FUN}_{\mathsf{TM}}}$ Turing-akzeptierbar sind.

Hinwies: Reduzieren Sie die Sprache $\mathit{HALT}_{\mathsf{TM}}$ auf die Sprachen $\mathit{EQ\text{-}FUN}_{\mathsf{TM}}$ und $\overline{\mathit{EQ\text{-}FUN}_{\mathsf{TM}}}$.

Aufgabe 7.2

Gegeben sei eine Menge von Dominosteinen $I = \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ Wörter über dem Alphabet Σ sind. Aus I können zwei kontextfreie Grammatiken G_α und G_β folgendermaßen konstruiert werden: Sei $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ mit $C \cap \Sigma = \emptyset$. Dann sei G_α die Grammatik mit dem Startsymbol S_α und den $2n$ Regeln

$$S_\alpha \longrightarrow \alpha_i S_\alpha c_i \mid \alpha_i c_i \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\},$$

und G_β sei die Grammatik mit dem Startsymbol S_β und den $2n$ Regeln

$$S_\beta \longrightarrow \beta_i S_\beta c_i \mid \beta_i c_i \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

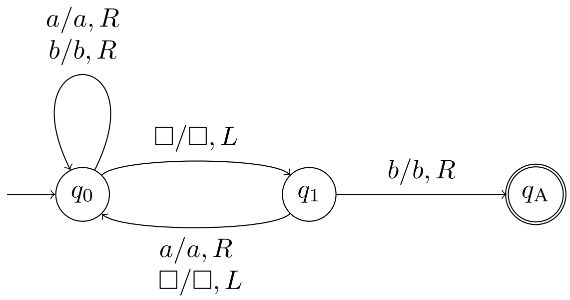
1. Beschreiben Sie die von G_α und G_β erzeugten Sprachen.
2. Beschreiben Sie die Sprache $L(G_\alpha) \cap L(G_\beta)$.
3. Beweisen Sie, dass die Menge $\mathit{NONEMPTY\text{-}INTERSECTION}_{\mathsf{CFG}} = \{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1$ und G_2 besitzen einen nichtleeren Durchschnitt$\}$ unentscheidbar ist.

Hinweis: Reduzieren Sie das Postsche Korrespondenzproblem mit Hilfe der Grammatiken G_α und G_β auf die Menge $\mathit{NONEMPTY\text{-}INTERSECTION}_{\mathsf{CFG}}$.

Aufgabe 7.3

Die Unentscheidbarkeit des Postschen Korrespondenzproblems wurde in der Vorlesung durch Reduktion des Akzeptanzproblems für Turingmaschinen A_{TM} auf die Menge PCP bewiesen. Dabei wurde gezeigt, wie für jede Turingmaschine M und jedes Wort w eine Menge von Dominosteinen konstruiert werden kann, die genau dann eine Übereinstimmung besitzt, wenn M das Wort w akzeptiert.

Konstruieren Sie in gleicher Weise die Dominosteine für die durch folgendes Übergangsdiagramm beschriebene Turingmaschine und die Worte ϵ, a und b (das Symbol $\square$ steht für das Leerzeichen).



Hausaufgabe 7.4

Beweisen Sie:

1. Eine Sprache A ist genau dann Turing-akzeptierbar, wenn $A \leq_{\mathrm{f}} A_{\mathsf{TM}}$ gilt.
2. Eine Sprache A ist genau dann entscheidbar, wenn $A \leq_{\mathrm{f}} L(0^*1^*)$ gilt.

Hausaufgabe 7.5

Beweisen Sie, dass die Menge $EQ_{\mathsf{CFG}} = \{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1$ und G_2 sind kontextfreie Grammatiken, welche die gleiche Sprache erzeugen$\}$ unentscheidbar ist.

Hinweis: Reduzieren Sie ein aus der Vorlesung als unentscheidbar bekanntes Problem auf EQ_{CFG}.

Hausaufgabe 7.6

Was können Sie über die Sprache $J = \{0w \mid w \in A_{\mathsf{TM}}\} \cup \{1w \mid w \notin A_{\mathsf{TM}}\}$ und ihr Komplement aussagen? Sind J und $\overline{J}$ entscheidbar, Turing-akzeptierbar oder keines von beiden? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Hausaufgaben Für jede Hausaufgabe können Sie maximal 3 Punkte bekommen. Die Punkte werden nach folgenden Regeln vergeben:

3 Punkte	= die Aufgabe wurde vollständig und fehlerfrei gelöst
2 Punkte	= die Aufgabe wurde vollständig und im Wesentlichen richtig gelöst, die Lösung enthielt aber einige technische Fehler oder Ungenauigkeiten
1 Punkt	= die Lösung war unvollständig oder enthielt größere Fehler
0 Punkte	= die Aufgabe wurde nicht gelöst

Sprechzeiten Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- Sprechen Sie in den Übungen Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor an.
- Holger Arnold, Raum 1.21, holger@cs.uni-potsdam.de
  Sprechzeiten: mittwochs 14.00–15.00 Uhr und nach Vereinbarung
- Dr. Eva Richter, Raum 1.25, erichter@cs.uni-potsdam.de
  Sprechzeiten: dienstags 13.30–15.00 Uhr und nach Vereinbarung