

Theoretische Informatik II

Dr. Eva Richter / Holger Arnold

Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2008

Übungsblatt 9 (Version 2) — Abgabetermin: 30.6.2008, 12.00 Uhr

Asymptotische Notation

Definition 1. Seien f und g, g_1, \dots, g_k Funktionen mit $f, g, g_1, \dots, g_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ und sei t eine Funktion mit $t : (\mathbb{R}^+)^k \rightarrow \mathbb{R}^+$.

1. Die Funktion f wird durch die Funktion g *asymptotisch nach oben beschränkt*, geschrieben $f(n) = O(g(n))$, wenn es Konstanten $n_0 > 0$ und $c > 0$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq cg(n)$. Die Menge $O(g)$ ist die Menge aller Funktionen f mit $f(n) = O(g(n))$.
2. Die Funktion f wird von der Funktion g *asymptotisch dominiert*, geschrieben $f(n) = o(g(n))$, wenn es für jedes $c > 0$ eine Konstante n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) < cg(n)$. Die Menge $o(g)$ ist die Menge aller Funktionen f mit $f(n) = o(g(n))$.
3. Die Schreibweise $t(O(g_1(n)), \dots, O(g_k(n)))$ bezeichnet die Funktionenmenge

$$\{f \mid f(n) = t(h_1(n), \dots, h_k(n)) \text{ und } h_i(n) = O(g_i(n)) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k\}\}$$

(analog für die o -Notation).

4. Sind A und B asymptotisch (d.h. mit O - oder o -Ausdrücken) definierte Mengen von Funktionen, dann bedeutet die Schreibweise $A = B$, dass A eine Teilmenge von B ist, und die Schreibweise $f(n) = A$ bedeutet, dass f in A enthalten ist.

Beachten Sie, dass Aussagen wie $f(n) = O(g(n))$ und $O(f(n)) = O(g(n))$ keine Gleichungen darstellen. Die in diesem Zusammenhang mit „ $=$ “ bezeichneten Relationen sind nicht symmetrisch und im ersten Fall auch nicht transitiv. Die Verwendung des Symbols „ $=$ “ statt „ \in “ und „ \subseteq “ ist nur eine Konvention.

Aufgabe 9.1

Seien f und g Funktionen auf natürlichen Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) $n^m = O(n^k)$, wenn $m \leq k$.
- (b) $f(n) = O(f(n))$.
- (c) $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$.
- (d) $cO(f(n)) = O(f(n))$ für jedes $c \geq 0$.
- (e) $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$.
- (f) $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$.

Aufgabe 9.2

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen korrekt sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $2n = O(n)$.

(d) $n = o(2n)$.

(b) $n^2 = O(n(\log n)^2)$.

(e) $2^n = o(3^n)$.

(c) $n \log n = O(n^2)$.

(f) $1 = o(n)$.

Aufgabe 9.3

Zeigen Sie, dass P unter Vereinigung, Durchschnittsbildung, Verkettung und Komplementbildung abgeschlossen ist.

Aufgabe 9.4

Ein ungerichteter Graph G heißt zusammenhängend, wenn für alle Paare i, j von Knoten von G ein Pfad von i nach j in G existiert. Beweisen Sie, dass die Sprache

$$CONNECTED = \{\langle G \rangle \mid G \text{ ist ein zusammenhängender Graph}\}$$

in P liegt. Geben Sie dazu einen Algorithmus an, der *CONNECTED* entscheidet und analysieren Sie seine Zeitkomplexität. Gehen Sie auch auf die von Ihnen verwendete Codierung für Graphen ein.

Hausaufgabe 9.5

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen korrekt sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

- | | |
|------------------------------|-----------------------|
| (a) $n^2 = O(n)$. | (d) $2n = o(n^2)$. |
| (b) $3^n = 2^{O(n)}$. | (e) $n = o(\log n)$. |
| (c) $2^{2^n} = O(2^{2^n})$. | (f) $1 = o(1/n)$. |

Hausaufgabe 9.6

Beweisen Sie, dass P unter Hüllenbildung abgeschlossen ist, d.h. wenn $L \in P$ gilt, dann ist auch $L^* = \{w \mid w = w_1 \cdots w_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ und } w_1, \dots, w_n \in L\}$ in P enthalten.

Hinweis: Der Ansatz, alle Zerlegungen eines Wortes aufzuzählen, funktioniert hier nicht, weil es 2^{n-1} Möglichkeiten gibt, ein Wort der Länge n in nichtleere Teilwörter zu zerlegen. Überlegen Sie sich stattdessen, wie das Enthaltensein eines Wortes w in L^ auf das Enthaltensein von Teilen von w in L^* zurückgeführt werden kann.*

Hausaufgabe 9.7

Beweisen Sie, dass die Sprache

$$ALL_{DEA} = \{\langle A \rangle \mid A \text{ ist ein DEA, der alle Wörter über dem Alphabet } \Sigma \text{ akzeptiert}\}$$

in P liegt.

Hausaufgaben Für jede Hausaufgabe können Sie maximal 3 Punkte bekommen. Die Punkte werden nach folgenden Regeln vergeben:

- 3 Punkte* = die Aufgabe wurde vollständig und fehlerfrei gelöst
- 2 Punkte* = die Aufgabe wurde vollständig und im Wesentlichen richtig gelöst, die Lösung enthielt aber einige technische Fehler oder Ungenauigkeiten
- 1 Punkt* = die Lösung war unvollständig oder enthielt größere Fehler
- 0 Punkte* = die Aufgabe wurde nicht gelöst

Sprechzeiten Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- Sprechen Sie in den Übungen Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor an.
- Holger Arnold, Raum 1.21, holger@cs.uni-potsdam.de
Sprechzeiten: mittwochs 14.00–15.00 Uhr und nach Vereinbarung
- Dr. Eva Richter, Raum 1.25, erichter@cs.uni-potsdam.de
Sprechzeiten: dienstags 13.30–15.00 Uhr und nach Vereinbarung