Theoretische Informatik II

Dr. Eva Richter / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2008

Übungsblatt 10 — Abgabetermin: 7.7.2008, 12.00 Uhr

Es wird für die folgenden Aufgaben angenommen, dass alle in der Beschreibung von Sprachen vorkommenden Zahlen binär codiert werden.

Aufgabe 10.1

Zeigen Sie, dass NP unter Vereinigung, Durchschnitt, Verkettung und Hüllenbildung abgeschlossen ist.

Aufgabe 10.2

Ein Graph $G' = (V', E')$ mit Knotenmenge V' und Kantenmenge E' heißt *Teilgraph* eines Graphen $G = (V, E)$, wenn gilt: $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ und $e_1, e_2 \in V'$ für alle $(e_1, e_2) \in E'$. Zwei Graphen G_1 und G_2 heißen *isomorph*, wenn G_1 durch Umbenennung seiner Knoten in G_2 überführt werden kann. Betrachten Sie folgendes Problem:

$$\textit{SUBGRAPH-ISO} = \{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1 \text{ und } G_2 \text{ sind ungerichtete Graphen und } G_1 \text{ enthält einen zu } G_2 \text{ isomorphen Teilgraphen}\}$$

1. Beweisen Sie, dass *SUBGRAPH-ISO* in NP liegt, indem Sie einen Polynomzeit-Verifizierer für diese Menge angeben. Was ist ein Zertifikat für das Enthaltensein zweier Graphen in *SUBGRAPH-ISO*?

2. Geben Sie eine nichtdeterministische Turingmaschine an, die *SUBGRAPH-ISO* in polynomieller Zeit akzeptiert.

3. Eine Sprache A heißt auf eine Sprache B *in polynomieller Zeit reduzierbar* oder *Polynomzeit-reduzierbar*, geschrieben $A \leq_{\mathrm{p}} B$, wenn es eine in polynomieller Zeit berechenbare funktionale Reduktion von A auf B gibt. Beweisen Sie: Wenn A auf B in polynomieller Zeit reduzierbar ist und B in P liegt, dann liegt auch A in P.

4. Das Cliquenproblem wird durch folgende Menge beschrieben:

   $$\textit{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ enthält einen vollständigen Teilgraphen mit } k \text{ Knoten}\}.$$

   Geben Sie eine Polynomzeit-Reduktion von *CLIQUE* auf *SUBGRAPH-ISO* an. Begründen Sie, warum die Reduktion in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

   Hinweis: Beachten Sie, dass die Länge der Beschreibung eines Graphen mit k Knoten nicht polynomiell in $|\langle k\rangle|$ ist, wenn k binär codiert wird.

Hausaufgabe 10.3

Ein Zyklus in einem gerichteten Graphen G ist eine endliche Folge $k_1, \ldots, k_n$ von Knoten aus G, so dass $k_1 = k_n$ ist und G für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ eine Kante von k_i nach k_{i+1} enthält. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der entscheidet, ob ein Graph einen Zyklus enthält. Begründen Sie die Korrektheit des Algorithmus und analysieren Sie seine Zeitkomplexität.

Hausaufgabe 10.4

Betrachten Sie folgendes Problem:

$$\mathit{INDEPENDENT\text{-}SET} = \{\langle G, k\rangle \mid k \geq 2 \text{ und } G \text{ ist ein Graph, dessen Knotenmenge } V \text{ eine } k\text{-elementige Teilmenge } C \subseteq V \text{ enthält, so dass keine zwei Knoten aus } C \text{ durch eine Kante verbunden sind}\}$$

1. Beweisen Sie, dass *INDEPENDENT-SET* in NP liegt, indem Sie einen Polynomzeit-Verifizierer für diese Menge angeben. Was ist ein Zertifikat für das Enthaltensein eines Paars $\langle G, k\rangle$ in *INDEPENDENT-SET*?

2. Geben Sie eine polynomielle Reduktion von *CLIQUE* auf *INDEPENDENT-SET* an. Begründen Sie, warum die Reduktion in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

Hausaufgabe 10.5

Für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ ist die Sprachklasse co-$\mathcal{C}$ definiert als co-$\mathcal{C} = \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{C}\}$. Die Sprachklasse coNP enthält also genau die Sprachen, deren Komplement in NP enthalten ist. Beweisen Sie: Wenn NP $\neq$ coNP ist, dann ist P $\neq$ NP.

Hausaufgaben Für jede Hausaufgabe können Sie maximal 3 Punkte bekommen. Die Punkte werden nach folgenden Regeln vergeben:

3 Punkte	= die Aufgabe wurde vollständig und fehlerfrei gelöst
2 Punkte	= die Aufgabe wurde vollständig und im Wesentlichen richtig gelöst, die Lösung enthielt aber einige technische Fehler oder Ungenauigkeiten
1 Punkt	= die Lösung war unvollständig oder enthielt größere Fehler
0 Punkte	= die Aufgabe wurde nicht gelöst

Sprechzeiten Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- Sprechen Sie in den Übungen Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor an.
- Holger Arnold, Raum 1.21, holger@cs.uni-potsdam.de
  Sprechzeiten: mittwochs 14.00–15.00 Uhr und nach Vereinbarung
- Dr. Eva Richter, Raum 1.25, erichter@cs.uni-potsdam.de
  Sprechzeiten: dienstags 13.30–15.00 Uhr und nach Vereinbarung