# Theoretische Informatik II

Dr. Eva Richter / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Sommersemester 2008

**Übungsblatt 12 (Version 2)**

---

## Bandkomplexität

**Definition 1.** Sei $M$ eine deterministische Turingmaschine, die auf jeder Eingabe anhält. Die *Bandkomplexität* oder *Platzkomplexität* von $M$ ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $f(n)$ die maximale Anzahl an Bandfeldern ist, auf die der Kopf von $M$ bei Eingaben der Länge $n$ bewegt wird. Für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ ist die *Bandkomplexitätsklasse* SPACE$(f(n))$ definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{SPACE}(f(n)) = \{L \mid L &\text{ wird von einer deterministischen Turingmaschine mit}\\ &\text{Bandkomplexität } O(f(n)) \text{ entschieden}\}.\end{aligned}$$

Das Bandkomplexitäts-Äquivalent zur Zeitkomplexitätsklasse P ist die Klasse PSPACE, die definiert ist als

$$\mathrm{PSPACE} = \{L \mid L \in \mathrm{SPACE}(n^c) \text{ für ein } c \in \mathbb{N}\}.$$

## Probabilistische Algorithmen ohne Fehler

**Definition 2.** Sei $M$ eine probabilistische Turingmaschine, die auf jeder Eingabe anhält. Sei $\mathcal{B}_M(w)$ die Menge der möglichen Berechnungszweige von $M$ auf der Eingabe $w$. Die *mittlere Zeitkomplexität von $M$ auf der Eingabe $w$* ist der Erwartungswert der Laufzeit von $M$ auf dem Wort $w$ über alle Zufallsentscheidungen:

$$\mathrm{E}[T_M(w)] = \sum_{b \in \mathcal{B}_M(w)} |b| \Pr[b].$$

Die *mittlere Zeitkomplexität von $M$* ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $f(n)$ die maximale mittlere Zeitkomplexität von $M$ auf Eingaben der Länge $n$ ist. Für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ ist die *Nullfehler-Zeitkomplexitätsklasse* ZTIME$(f(n))$ definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{ZTIME}(f(n)) = \{L \mid L &\text{ wird von einer probabilistischen Turingmaschine mit}\\ &\text{mittlerer Zeitkomplexität } O(f(n)) \text{ entschieden}\}.\end{aligned}$$

Die entsprechende polynomielle Komplexitätsklasse ist die Klasse ZPP, die definiert ist als

$$\mathrm{ZPP} = \{L \mid L \in \mathrm{ZTIME}(n^c) \text{ für ein } c \in \mathbb{N}\}.$$

---

## Aufgabe 12.1

Beweisen Sie: Wenn es für eine Sprache $L$ eine polynomiell zeitbeschränkte probabilistische Turingmaschine $M_1$ und ein $\epsilon_1$ mit $0 \leq \epsilon_1 < 1$ gibt, so dass gilt: $\Pr[M_1 \text{ akzeptiert } w] \geq 1 - \epsilon_1$ für alle $w \in L$ und $\Pr[M_1 \text{ lehnt } w \text{ ab}] = 1$ für alle $w \notin L$, dann gibt es für jedes $\epsilon_2$ mit $0 < \epsilon_2 < 1$ eine polynomiell zeitbeschränkte probabilistische Turingmaschine $M_2$, so dass gilt: $\Pr[M_2 \text{ akzeptiert } w] \geq 1 - \epsilon_2$ für alle $w \in L$ und $\Pr[M_2 \text{ lehnt } w \text{ ab}] = 1$ für alle $w \notin L$.

## Aufgabe 12.2

Zeigen Sie, dass jede Sprache in BPP von einer deterministischen (d.h. nicht probabilistischen) Turingmaschine mit polynomieller Bandkomplexität akzeptiert wird, dass also gilt: BPP $\subseteq$ PSPACE.

## Aufgabe 12.3

Beweisen Sie:

1. RP $\subseteq$ NP, RP $\subseteq$ BPP und coRP $\subseteq$ BPP.
2. ZPP = RP $\cap$ coRP.

   *Hinweis: Verwenden Sie die in der folgenden Aufgabe gegebene Definition der Menge* ZPP.
3. Eine Sprache $L$ liegt genau dann in ZPP, wenn es eine polynomiell zeitbeschränkte probabilistische Turingmaschine $M$ gibt, die eine Funktion $f : \Sigma^* \to \{0, 1, ?\}$ berechnet, so dass gilt: $f(w) \in \{1, ?\}$ und $\Pr[f(w) = 1] \geq 1/2$ für alle $w \in L$ und $f(w) \in \{0, ?\}$ und $\Pr[f(w) = 0] \geq 1/2$ für alle $w \notin L$.

   *Hinweis: Verwenden Sie die Markov-Ungleichung: Sei $X$ eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $a > 0$ die Schranke* $\Pr[X \geq a] \leq \mathrm{E}[X]/a$.