Übung zur Vorlesung

Automatisierte Logik und Programmierung

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2004

Blatt 2 — Abgabetermin: 05.06.2009

Aufgabe 2.1 (Die Mühen des Beweisens ohne Entscheidungsprozeduren I)

Beweisen Sie die folgende Sequenz ohne Verwendung der `arith`-Entscheidungsprozedur:

$x:\mathbb{Z},\ y:\mathbb{Z},\ 4\text{-}y\leq 1\text{-}x,\ y\text{-}2<6 \vdash x<7$

Formulieren Sie hierzu die erforderlichen Gesetze über $\leq$, <, Addition, Subtraktion, Monotonie, etc. und wenden Sie diese dann in Ihrem Beweis mit der Taktik `InstLemma` an. Die Lemmata brauchen nicht bewiesen zu werden, sollten aber möglichst allgemeingültiger Natur sein. So könnte man z.B. ein spezielles Lemma formulieren, das $4\text{-}y\leq 1\text{-}x$ in einem Schritt in $4\text{+}x\leq 1\text{+}y$ überführt, aber eigentlich ist hierfür die Kombination von drei elementareren Lemmata erforderlich.

`InstLemma: tok->term list->tactic` (Manual, S. 128) instantiiert Lemmata der Form $\forall x_1{:}T_1..x_n{:}T_n.P \Rightarrow Q$ mit den gelisteten Termen und wendet dann modus ponens (`impE`) an.

Mit der `arith` Prozedur wird die Sequenz in einem Schritt gelöst.

Aufgabe 2.2 (Theoretisches Fundament von `arith`)

2.2–a Zeigen Sie, daß eine Sequenz $\Gamma \vdash G_1 \vee .. \vee G_n$ genau dann gültig ist, wenn die Sequenz $\Gamma, \neg G_1, .., \neg G_n \vdash \text{ff}$ gültig ist, sofern alle Formeln G_i entscheidbar sind.

2.2–b Zeigen Sie, daß entscheidbare Formeln abgeschlossen sind unter den aussagenlogischen Konnektiven $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.

2.2–c Es sei Γ = $v_1 \geq u_1 + c_1, \ldots, v_n \geq u_n + c_n$ eine Menge von atomaren arithmetischen Formeln, wobei die v_i und u_i Variablen (oder 0) und die c_i ganzzahlige Konstanten sind, und $\mathcal{G}$ der Graph, der die Ordnungsrelation zwischen den Variablen von Γ beschreibt.

Zeigen Sie, daß Γ genau dann widersprüchlich ist, wenn $\mathcal{G}$ einen positiven Zyklus besitzt.

Aufgabe 2.3 (Grundlagen der `arith`-Prozedur)

2.3–a Beschreiben Sie einen Algorithmus, der überprüft, ob ein gerichteter Graph einen positiven Zyklus besitzt.

2.3–b Beschreiben Sie (informal) eine Taktik, welche elementar-arithmetische Formeln in konjunktive Normalform (als Vorbereitung für `arith`) umwandelt.

Aufgabe 2.4 (Die Mühen des Beweisens ohne Entscheidungsprozeduren II)

Beweisen Sie die Gültigkeit der Formel

$..,\ a{=}f(b)\in\mathbb{Z},\ c{=}f(f(b))\in\mathbb{Z} \vdash h(g(a,f(c)),f(a)) = h(g(a,f(f(a))),c) \in \mathbb{Z}$

ohne Verwendung der `equality` Regel. Verwenden Sie hierzu Elementartaktiken wie `D`, `HypSubst`, `Declaration` und Tacticals wie `THEN`, `Repeat` etc. und gehen Sie davon aus, daß die Tactic `Wf` alle bei `HypSubst` anfallenden Wohlgeformtheitsziele lösen kann.