Übung zur Vorlesung

# Automatisierte Logik und Programmierung

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Blatt 4 — Abgabetermin: 10.07.2009

---

*Das Übungsblatt soll die Vorteile von Algorithmentheorien, speziell der Globalsuchtheorien für die Programmsynthese deutlich machen und einen Teil des theoretischen Fundaments aufdecken.*

---

## Aufgabe 4.1 (Verfeinerung und Spezialisierung von Globalsuchtheorien)

Es sei *spec* eine Spezifikation, $G$ eine Globalsuchtheorie, $\Phi$ ein Wohlfundiertheitsfilter für $G$ und $\Psi$ ein beliebiger Filter für $G$. Zeigen Sie

4.1–a $G$ generalisiert *spec* mit $\vartheta \;\Rightarrow\; G_\vartheta$(spec) ist eine Globalsuchtheorie

4.1–b $G$ generalisiert *spec* mit $\vartheta \;\Rightarrow\; \Phi_\vartheta$ ist Wohlfundiertheitsfilter für $G_\vartheta$(*spec*)

4.1–c $\Phi$ notwendig für $G$ und $\Psi$ notwendig für $G$
$\Rightarrow \Xi \;\equiv\; \lambda$x,s.$\Phi$(x,s)$\wedge\Psi$(x,s) notwendiger Wohlfundiertheitsfilter für $G$

## Aufgabe 4.2 (Globalsuch-Synthese)

Erzeugen Sie einen Globalsuch-Algorithmus für das n-Damen Problem.

```
FUNCTION queens(n:ℤ) WHERE n≥1 RETURNS {nq:Seq(ℤ) | perm(nq,{1..n}) ∧ safe(nq)}
```

wobei

```
perm(L,S)    ≡ nodups(L) ∧ range(L)=S
safe(L)      ≡ ∀i,j<|L|.i≠j ⇒ |L[i]-L[j]| ≠ |i-j|
```

- Wählen Sie eine der vorgegebenen Globalsuch-Theorien.
- Spezialisieren sie diese auf das Problem.
- Wählen Sie einen Wohlfundiertheitsfilter und spezialisieren Sie diesen mit der eben festgelegten Substitution, so daß er notwendig ist.
- Verfeinern sie den Filter, wenn möglich.
- Erzeugen Sie den schematischen Algorithmus
- Vereinfachen Sie den Algorithmus (von Hand) nachträglich

## Aufgabe 4.3 (Vordefinierte Globalsuchtheorien und Filter)

Zeigen Sie die Korrektheit der folgenden im Anhang definierten Einträge einer Wissensbank.

4.3–a gs_sequences_over_finite_set($\alpha$) ist eine Globalsuchtheorie[1]

4.3–b $\lambda$S,V.|V|$\leq$k ist ein Wohlfundiertheitsfilter für gs_sequences_over_finite_set($\alpha$)

4.3–c $\lambda$S,V.|V|$\leq$k*|S| ist ein Wohlfundiertheitsfilter für gs_sequences_over_finite_set($\alpha$)

4.3–d $\lambda$S,V.nodups(V) ist ein Wohlfundiertheitsfilter für gs_sequences_over_finite_set($\alpha$)

4.3–e gs_subsets_of_a_finite_set($\alpha$) ist eine wohlfundierte Globalsuchtheorie

---

[1] In der Vorlesung wurde diese Theorie kurz gs_seq_set($\alpha$) genannt.

## **Anhang 4.1:** Globalsuchtheorien und Wohlfundiertheitsfilter

The following global search theories which we have adopted from the KIDS system are sufficient to support the synthesis of many global search algorithms on sets, sequences, mappings, and integers.

1. `gs_sequences_over_finite_set(`$\alpha$`)` enumerates all sequences over a given finite set S. A set of sequences is represented by their greatest common prefix V. Splitting is performed by appending an element from S onto the end of V. Extracting selects the greatest common prefix V itself.

$$
\begin{array}{lll}
\mathtt{D} & \mapsto & \mathtt{Set}(\alpha) \\
\mathtt{R} & \mapsto & \mathtt{Seq}(\alpha) \\
\mathtt{I} & \mapsto & \lambda\mathtt{S.True} \\
\mathtt{O} & \mapsto & \lambda\mathtt{S,L.range(L)}\subseteq\mathtt{S} \\
\mathtt{S} & \mapsto & \mathtt{Seq}(\alpha) \\
\mathtt{J} & \mapsto & \lambda\mathtt{S,V.range(V)}\subseteq\mathtt{S} \\
\mathtt{s}_0 & \mapsto & \lambda\mathtt{S.[\,]} \\
\mathtt{sat} & \mapsto & \lambda\mathtt{L,V.V}\sqsubseteq\mathtt{L} \\
\mathtt{split} & \mapsto & \lambda\mathtt{S,V.}\{\mathtt{V}\cdot\mathtt{i}\,|\,\mathtt{i}\in\mathtt{S}\} \\
\mathtt{ext} & \mapsto & \lambda\mathtt{V.}\{\mathtt{V}\}
\end{array}
$$

2. `gs_subsets_of_a_finite_set(`$\alpha$`)` enumerates subsets of a given finite set S. A set of subsets is is represented by their greatest common subset U and a variable V holds the set of uncommitted elements so far. Splitting involves selecting an arbitrary element of V and alternatively adding or not adding it to U (yielding two new space descriptors). Extracting selects U if V does not hold any uncommitted elements.

$$
\begin{array}{lll}
\mathtt{D} & \mapsto & \mathtt{Set}(\alpha) \\
\mathtt{R} & \mapsto & \mathtt{Set}(\alpha) \\
\mathtt{I} & \mapsto & \lambda\mathtt{S.True} \\
\mathtt{O} & \mapsto & \lambda\mathtt{S,T.T}\subseteq\mathtt{S} \\
\mathtt{S} & \mapsto & \mathtt{Set}(\alpha)^2 \\
\mathtt{J} & \mapsto & \lambda\mathtt{S,U,V.empty?(U}\cap\alpha\mathtt{V)}\ \wedge\ \mathtt{U}\cup\mathtt{V}\subseteq\mathtt{S} \\
\mathtt{s}_0 & \mapsto & \lambda\mathtt{S.}\langle\emptyset\mathtt{,S}\rangle \\
\mathtt{sat} & \mapsto & \lambda\mathtt{T,U,V.U}\subseteq\mathtt{T}\ \wedge\ \mathtt{T}\subseteq\mathtt{U}\cup\mathtt{V} \\
\mathtt{split} & \mapsto & \lambda\mathtt{S,U,V.}\{\langle\mathtt{U+a,V-a}\rangle\,|\,\mathtt{a}\in\mathtt{V}\}\ \cup\ \{\langle\mathtt{U,V-a}\rangle\,|\,\mathtt{a}\in\mathtt{V}\} \\
\mathtt{ext} & \mapsto & \lambda\mathtt{U,V.if\ empty?(V)\ then}\ \{\mathtt{U}\}\ \mathtt{else}\ \emptyset
\end{array}
$$

This theory has the property that subsets are extracted only from the leaves. The depth of the search tree is exactly |S| and its size is $2^{|S|+1}-1$.

3. `gs_finite_mappings(`$\alpha$`,`$\beta$`)` is enumerates all mappings from a finite set `S` to a finite set `S'`. The space structure incrementally builds up a partial map `M` whose domain is a subset of `S` and holds uncommitted elements of `S` in a set `T`. Splitting thus extends `M` by a new pair and reduces `T` accordingly. Extracting selects `M` if all elements are committed.

$$
\begin{array}{lll}
\texttt{D} & \mapsto & \texttt{Set}(\alpha)\times\texttt{Set}(\beta) \\
\texttt{R} & \mapsto & \texttt{Map}(\alpha,\beta) \\
\texttt{I} & \mapsto & \lambda\texttt{S,S'.True} \\
\texttt{O} & \mapsto & \lambda\texttt{S,S',N.domain(N)=S} \wedge \texttt{range(N)}\subseteq\texttt{S'} \\
\texttt{S} & \mapsto & \texttt{Set}(\alpha) \times \texttt{Map}(\alpha,\beta) \\
\texttt{J} & \mapsto & \lambda\texttt{S,S',T,M.domain(M)}\subseteq\texttt{S} \wedge \texttt{range}_\alpha\texttt{(M)}\subseteq\texttt{S'} \wedge \texttt{T=S}\backslash\texttt{domain(M)} \\
\texttt{s}_0 & \mapsto & \lambda\texttt{S,S'.}\langle\texttt{S,}\{|\,|\}\rangle \\
\texttt{sat} & \mapsto & \lambda\texttt{N,T,M.M}\sqsubseteq\texttt{N} \\
\texttt{split} & \mapsto & \lambda\texttt{S,S',T,M.}\bigcup\{\ \{\langle\texttt{T-a, extend(M,a,b)}\rangle|\texttt{a}\in\texttt{T}\}\ |\ \texttt{b}\in\texttt{S'}\} \\
\texttt{ext} & \mapsto & \lambda\texttt{T,M.if empty?(T) then }\{\texttt{M}\}\texttt{ else }\emptyset
\end{array}
$$

4. `gs_binary_split_of_integer_subrange` encodes the binary split paradigm. It enumerates all elements of an interval $\{$`m..n`$\}$ of integers. Space descriptors correspond to subintervals and and are split roughly in half. Extraction selects the only element if an interval has shrunk to a singleton set.

$$
\begin{array}{lll}
\texttt{D} & \mapsto & \mathbb{Z}^2 \\
\texttt{R} & \mapsto & \mathbb{Z} \\
\texttt{I} & \mapsto & \lambda\texttt{m,n. m}\leq\texttt{n} \\
\texttt{O} & \mapsto & \lambda\texttt{m,n,k. k}\in\{\texttt{m..n}\} \\
\texttt{S} & \mapsto & \mathbb{Z}^2 \\
\texttt{J} & \mapsto & \lambda\texttt{m,n,i,j. }\{\texttt{i..j}\}\subseteq\{\texttt{m..n}\} \\
\texttt{s}_0 & \mapsto & \lambda\texttt{m,n. }\langle\texttt{m,n}\rangle \\
\texttt{sat} & \mapsto & \lambda\texttt{k,i,j. k}\in\{\texttt{i..j}\} \\
\texttt{split} & \mapsto & \lambda\texttt{m,n,i,j. if i<j then }\{\langle\texttt{i,(i+j)/2}\rangle\texttt{,}\langle\texttt{1+(i+j)/2,j}\rangle\}\texttt{ else }\emptyset \\
\texttt{ext} & \mapsto & \lambda\texttt{i,j. if i=j then }\{\texttt{i}\}\texttt{ else }\emptyset
\end{array}
$$

**Lösung 4.1** *Ziel dieser Aufgabe ist es, die Grundlagen der Globalsuchstrategie abzusichern.*

Es sei *spec* = $(\mathtt{D,R,I,O})$ und $G$ = $((\mathtt{D',R',I',O'}),\ \mathtt{S},\ \mathtt{J},\ \mathtt{s}_0,\ \mathtt{sat},\ \mathtt{split},\ \mathtt{ext})$. Nach Voraussetzung erfüllen $G$ und $\Phi$ die folgenden 5 Axiome.

1. $\forall x'{:}D'.\ I'(x') \Rightarrow J(x',s_0(x'))$
2. $\forall x'{:}D'.\forall s{:}S.\ I(x') \wedge J(x',s) \Rightarrow \forall t\in split(x',s).\ J(x',t)$
3. $\forall x'{:}D'.\forall z{:}R'.\ I'(x') \wedge O(x',z) \Rightarrow sat(z,s_0(x'))$
4. $\forall x'{:}D'.\forall s{:}S.\forall z{:}R'.\ I'(x') \wedge J(x',s) \wedge O(x',z)$
   $\Rightarrow\ sat(z,s) \Leftrightarrow \exists k{:}\mathbb{N}.\exists t\in split^k(x',s).\ z\in ext(t)$
5. $\forall x'{:}D'.\forall s{:}S.\ I'(x')\wedge J(x',s) \Rightarrow \exists k{:}\mathbb{N}.\ split_\Phi{}^k(x',s)=\emptyset$

4.1–a Es gelte "$G$ generalisiert *spec* mit $\vartheta$". Dann ist R eine Teilmenge von R′ und es gilt

$$\forall x{:}D.\ I(x) \Rightarrow I'(\vartheta(x)) \wedge \forall z{:}R.\ O(x,z) \Rightarrow O'(\vartheta(x),z)$$

Per Definition ist $G_\vartheta$(*spec*) =

$$((D,R,I,O),S,\ \lambda x,s.J(\vartheta(x),s),\ \lambda x.s_0(\vartheta(x)),\ sat,\ \lambda x,s.split(\vartheta(x),s),\ ext)$$

Wir zeigen, daß $G_\vartheta$(*spec*) die vier Axiome einer Globalsuchtheorie erfüllt.

1. $\forall x{:}D.\ I(x) \Rightarrow J(\vartheta(x),s_0(\vartheta(x)))$
   Für $x\in D$ mit $I(x)$ gilt $I'(\vartheta(x))$ und nach Axiom 1 für $G$ dann $J(\vartheta(x),s_0(\vartheta(x)))$
2. $\forall x{:}D.\forall s{:}S.\ I(x) \wedge J(\vartheta(x),s) \Rightarrow \forall t\in split(\vartheta(x),s).\ J(\vartheta(x),t)$
   Für $x\in D,\ s\in S$ mit $I(x)$ und $J(\vartheta(x),s)$ gilt
   $I'(\vartheta(x))$ und nach Axiom 2 für $G$ dann $\forall t\in split(\vartheta(x),s).\ J(\vartheta(x),t)$
3. $\forall x{:}D.\forall z{:}R.\ I(x) \wedge O(x,z) \Rightarrow sat(z,s_0(\vartheta(x)))$
   Für $x\in D,\ z\in R$ mit $I(x)$ und $O(x,z)$ gilt
   $I'(\vartheta(x))$ und $O'(\vartheta(x),z)$ und nach Axiom 3 für $G$ dann $sat(z,s_0(\vartheta(x)))$
4. $\forall x{:}D.\forall s{:}S.\forall z{:}R.\ I(x) \wedge J(\vartheta(x),s) \wedge O(x,z)$
   $\Rightarrow\ sat(z,s) \Leftrightarrow \exists k{:}\mathbb{N}.\exists t\in(\lambda x.s.split(\vartheta(x),s))^k(x,s).\ z\in ext(t)$

   Für $x\in D,\ s\in S,\ z\in R$ mit $I(x)$, $J(\vartheta(x),s)$ und $O(x,z)$ gilt
   $I'(\vartheta(x))$ und $O'(\vartheta(x),z)$ und nach Axiom 4 für $G$ dann
   $$sat(z,s) \Leftrightarrow \exists k{:}\mathbb{N}.\exists t\in split^k(\vartheta(x),s)\, z\in ext(t)$$
   Durch Induktion kann man zeigen, daß für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt:
   $$(\lambda x.s.split(\vartheta(x),s))^k(x,s) = split^k(\vartheta(x),s)$$
   Hieraus folgt dann die Behauptung.

4.1–b Es gelte "$G$ generalisiert *spec* mit $\vartheta$" wie oben. Zu zeigen ist

$$\forall x{:}D.\forall s{:}S.\ I(x)\wedge J(\vartheta(x),s) \Rightarrow \exists k{:}\mathbb{N}.\ split_{\vartheta,\Phi_\vartheta}{}^k(x,s)=\emptyset$$

Für $x\in D,\ s\in S$ mit $I(x)$, $J(\vartheta(x),s)$ gilt $I'(\vartheta(x))$ und nach Axiom 5 für $G$ und $\Phi$ dann

$$\exists k{:}\mathbb{N}.\ split_\Phi{}^k(\vartheta(x),s)=\emptyset$$

Es ist $split_{\vartheta,\Phi_\vartheta} \equiv \lambda x,s.\{\,t \mid t\in split(\vartheta(x),s)\wedge\Phi(\vartheta(x),t)\,\} = \lambda x,s.split_\Phi(\vartheta(x),s)$

Durch Induktion kann man wie in Teil (a).4 zeigen, daß für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt:

$$split_{\vartheta,\Phi_\vartheta}{}^k(x,s) = (\lambda x.s.split_\Phi(\vartheta(x),s))^k(x,s) = split_\Phi{}^k(\vartheta(x),s)$$

Hieraus folgt dann die Behauptung.

4.1–c Da $\Phi$ und $\Psi$ notwendig für $G$ sind, gilt

$$\forall\mathtt{x'}{:}\mathtt{D}.\forall\mathtt{s}{:}\mathtt{S}.\ \exists\mathtt{z'}{:}\mathtt{R'}.\,\mathtt{sat(z',s)}\wedge\mathtt{O(x',z)}\ \Rightarrow\ \Phi\mathtt{(x',s)}\wedge\Psi\mathtt{(x',s)}$$

Wegen $\Xi\mathtt{(x',s)}=\Phi\mathtt{(x',s)}\wedge\Psi\mathtt{(x',s)}$ folgt hieraus, daß $\Xi$ notwendig für $G$ ist.

Da $\Phi$ ein Wohlfundiertheitsfilter für $G$ ist und für alle $\mathtt{x'}\in\mathtt{D'},\ \mathtt{s}\in\mathtt{S}$ gilt

$$\mathtt{split}_\Xi\mathtt{(x',s)}\ =\ \{\mathtt{t}\,|\,\mathtt{t}\in\mathtt{split(x',s)}\wedge\Phi\mathtt{(x,t)}\wedge\Psi\mathtt{(x,t)}\}\ \subseteq\ \mathtt{split}_\varphi\mathtt{(x',s)}$$

folgt $\forall\mathtt{x'}{:}\mathtt{D'}.\forall\mathtt{s}{:}\mathtt{S}.\,\mathtt{I'(x')}\wedge\mathtt{J(x',s)}\ \Rightarrow\ \exists\mathtt{k}{:}\mathbb{N}.\ \mathtt{split}_\Xi^{\,\mathtt{k}}\mathtt{(x',s)}=\emptyset$ .

Damit ist $\Xi$ ein Wohlfundiertheitsfilter für $G$.

## Lösung 4.2

*Die Lösung besitzt eine erstaunliche Verwandtschaft zu der des Costas-Arrays Problems, obwohl die Aufgabenstellungen sehr verschieden sind.*

$\mathtt{FUNCTION\ queen(n{:}}\mathbb{Z}\mathtt{)\ WHERE\ n}\geq\mathtt{1\ RETURNS}\ \{\mathtt{nq{:}Seq(}\mathbb{Z}\mathtt{)}\,|\,\mathtt{perm(nq,}\{\mathtt{1..n}\}\mathtt{)}\wedge\mathtt{safe(nq)}\}$

1. Wähle die Globalsuchtheorie $G$ = $\mathtt{gs\_sequences\_over\_finite\_set(}\mathbb{Z}\mathtt{)}$, da diese – wie das Problem – Folgen über ganzen Zahlen aufzählt.

2. Zu zeigen ist ‘$G$ generalisiert $\mathtt{(D,R,I,O)}$’
   (a) Ausgabebereich $\mathtt{R}$ stimmt mit $\mathtt{R}_G\mathtt{=Seq(}\mathbb{Z}\mathtt{)}$ überein
   (b) Eingabebereiche $\mathtt{D=}\mathbb{Z}$ und $\mathtt{D}_G\mathtt{=Set(}\mathbb{Z}\mathtt{)}$ sind anzupassen
   (c) Keine Eingabebedingung zu prüfen, da $\mathtt{I}_G\mathtt{(S)=true}$.
   (d) Zu zeigen bleibt also

$$\forall\mathtt{n}{:}\mathbb{Z}.\,\mathtt{n}\geq\mathtt{1}\Rightarrow\ \exists\mathtt{S{:}Set(}\mathbb{Z}\mathtt{)}.\ \forall\mathtt{nq{:}Seq(}\mathbb{Z}\mathtt{)}.\,\mathtt{perm(nq,}\{\mathtt{1..n}\}\mathtt{)}\wedge\mathtt{safe(nq)}\ \Rightarrow\ \mathtt{range(nq)}\subseteq\mathtt{S}$$

   – Suche Folgerungen von $\mathtt{perm(nq,}\{\mathtt{1..n}\}\mathtt{)}\wedge\mathtt{safe(nq)}$, in denen $\mathtt{range(nq)}$ vorkommt
   – Auffalten von $\mathtt{perm}$ liefert: $\mathtt{perm(nq,}\{\mathtt{1..n}\}\mathtt{)}\ \Rightarrow\ \mathtt{range(nq)}\subseteq\{\mathtt{1..n}\}$
   – Wähle $\mathtt{S{:=}}\{\mathtt{1..n}\}$

   Der Beweis liefert $\vartheta\mathtt{(n){:=}}\{\mathtt{1..n}\}$. Die mit $\vartheta$ und der Ausgangsspezifikation modifizierte Globalsuchtheorie $G_\vartheta$ hat folgende Komponenten

| | | |
|---|---|---|
| $\mathtt{D}$ | $\mapsto$ | $\mathtt{Set(}\mathbb{Z}\mathtt{)}$ |
| $\mathtt{R}$ | $\mapsto$ | $\mathtt{Seq(}\mathbb{Z}\mathtt{)}$ |
| $\mathtt{I}$ | $\mapsto$ | $\lambda\mathtt{n.}\ \mathtt{n}\geq\mathtt{1}$ |
| $\mathtt{O}$ | $\mapsto$ | $\lambda\mathtt{n,nq.}\ \mathtt{perm(nq,}\{\mathtt{1..n}\}\mathtt{)}\wedge\mathtt{safe(nq)}$ |
| $\mathtt{S}$ | $\mapsto$ | $\mathtt{Seq(}\mathbb{Z}\mathtt{)}$ |
| $\mathtt{J}$ | $\mapsto$ | $\lambda\mathtt{n,V.range(V)}\subseteq\{\mathtt{1..n}\}$ |
| $\mathtt{s}_0$ | $\mapsto$ | $\lambda\mathtt{n.}\ \mathtt{[]}$ |
| $\mathtt{sat}$ | $\mapsto$ | $\lambda\mathtt{nq,V.V}\sqsubseteq\mathtt{nq}$ |
| $\mathtt{split}$ | $\mapsto$ | $\lambda\mathtt{n,V.}\{\mathtt{V{\cdot}i}\,|\,\mathtt{i}\in\{\mathtt{1..n}\}\}$ |
| $\mathtt{ext}$ | $\mapsto$ | $\lambda\mathtt{V.}\{\mathtt{V}\}$ |

3. Wähle WF-Filter $\Phi$ für $G$ so, daß ‘$\Phi_\vartheta$ notwendig für $G_\vartheta$’ beweisbar. Wir testen die bekannten Filter für $G$ und prüfen $\mathtt{perm(nq,}\{\mathtt{1..n}\}\mathtt{)}\wedge\mathtt{safe(nq)}\wedge\mathtt{V}\sqsubseteq\mathtt{nq}\ \Rightarrow\ \Phi\mathtt{(}\{\mathtt{1..n}\}\mathtt{,V)}$
   (a) $\Phi_1\mathtt{(S,V)}=|\mathtt{V}|\leq\mathtt{k}$ für ein festes $\mathtt{k}$:

$$\mathtt{perm(nq,}\{\mathtt{1..n}\}\mathtt{)}\wedge\mathtt{safe(nq)}\wedge\mathtt{V}\sqsubseteq\mathtt{nq}\ \Rightarrow\ |\mathtt{V}|\leq\mathtt{k}$$

   Dieser Beweis ist nicht so einfach möglich.

(b) $\Phi_2$(S,V) = |V|$\leq$k*|S| für ein festes k:

  perm(nq,{1..n}) ∧ safe(nq) ∧ V⊑nq ⇒ |V|≤k*|{1..n}|

  Reduktion mit Lemma B.1.16.5 liefert als Bedingung

  perm(nq,{1..n}) ∧ safe(nq) ∧ V⊑nq ⇒ |V|≤k*n

  Auffalten von `perm` liefert:

  perm(nq,{1..n}) ⇒ range(nq)⊆{1..n} ∧ nodups(nq)

  Mit Lemma B.2.22.4, B.2.24.3, B.2.24.5 und B.1.13.12 folgt

  range(nq)⊆{1..n} ∧ nodups(nq) ∧ V⊑nq ⇒ range(V)⊆{1..n} ∧ |V|=|range(V)|

  Mit Lemma B.1.16.4/5 folgt tatsächlich

  perm(nq,{1..n}) ∧ safe(nq) ∧ V⊑nq ⇒ |V|≤n

  Damit ist die Behauptung beweisen: $\Phi_{2,\vartheta}$ ist notwendig für $G_\vartheta$. Der Beweis ist automatisch allerdings recht schwer zu finden.

(c) $\Phi_3$(S,V) = nodups(V): perm(nq,{1..n}) ∧ safe(nq) ∧ V⊑nq ⇒ nodups(V)

  Auffalten von `perm` liefert:

  perm(nq,{1..n}) ⇒ nodups(nq)

  Mit Lemma B.2.24.3 folgt

  nodups(nq) ∧ V⊑nq ⇒ nodups(V)

  Damit ist die Behauptung beweisen: $\Phi_{3,\vartheta}$ ist notwendig für $G_\vartheta$.

Wir wählen also $\Phi_3$ und verfeinern diesen Filter zu $\Phi_{3,\vartheta}$(n,V)=nodups(V)

4. Verfeinerung des Filters durch weitere Folgerungen aus der Ausgabebedingung.

   perm(nq,{1..n}) ∧ safe(nq) ∧ V⊑nq ⇒ $\Psi$(n,V)

   Die Bedingung `perm(nq,{1..n})` ist mit der Generalisierungseigenschaft und dem Filter bereits ausgenutzt worden und braucht nicht mehr betrachtet zu werden. Wir ziehen daher Schlußfolgerungen aus `safe(nq)` ∧ V⊑nq, falten die Definitionen auf und erhalten.

   V⊑nq ∧ ∀i<j<|nq|.|nq[i]-nq[j]| ≠ j-i

   Das Lemma über begrenzte All-Quantoren und Präfix (≙ Lemma B.1.11.4) führt zu

   V⊑nq ∧ ∀i<j<|V|.|nq[i]-nq[j]| ≠ j-i

   Das Lemma über Präfix und Elementselektion B.2.10.16 führt zu

   V⊑nq ∧ ∀i<j<|V|.|V[i]-V[j]| ≠ j-i

   Dies erlaubt ein Rückfalten der Definitionen und liefert $\Psi$(n,V) ≡ safe(V)

5. Die Instantiierung des Standard-Globalsuchalgorithmus liefert nun

   FUNCTION queens(n:ℤ) WHERE n≥1 RETURNS {nq:Seq(ℤ) | perm(nq,{1..n}) ∧ safe(nq)}
   ≡ if nodups([]) ∧ safe([]) then queens$_{gs}$(n,[]) else ∅

   FUNCTION queens$_{gs}$(n:ℤ,V:Seq(ℤ)) WHERE n≥1 ∧ range(V)⊆{1..n} ∧ nodups(V) ∧ safe(V)
     RETURNS {nq:Seq(ℤ) | perm(nq,{1..n}) ∧ V⊑nq ∧ safe(nq)}
   ≡  {nq | nq∈{V} ∧ perm(nq,{1..n}) ∧ safe(nq)}
     ∪ ⋃{ queens$_{gs}$(n,W) | W∈{V·i | i∈{1..n}} ∧ nodups(W) ∧ safe(W)}

   In diesem Algorithmus sind noch einige Vereinfachungen möglich, die im nächsten Übungsblatt besprochen werden.

**Lösung 4.3** *Ziel dieser Aufgabe ist es, zu erkennen, wie die Korrektheit von Einträge einer Wissensbank sichergestellt werden kann.*

Eine eine wohlfundierte Globalsuchtheorie muß die folgenden 5 Axiome erfüllen.

1. Initialdeskriptor ist sinnvoll
   – $\forall$x:D. I(x) $\Rightarrow$ J(x,$s_0$(x))
2. Splitting sinnvoller Deskriptoren liefert sinnvolle Deskriptoren
   – $\forall$x:D.$\forall$s:S. I(x) $\wedge$ J(x,s) $\Rightarrow$ $\forall$t$\in$split(x,s). J(x,t)
3. Initialdeskriptor enthält alle Lösungen
   – $\forall$x:D.$\forall$z:R. I(x) $\wedge$ O(x,z) $\Rightarrow$ sat(z,$s_0$(x))
4. Alle Lösungen in endlich vielen Schritten extrahierbar
   – $\forall$x:D.$\forall$s:S.$\forall$z:R. I(x) $\wedge$ J(x,s) $\wedge$ O(x,z)
   $\Rightarrow$ sat(z,s) $\Leftrightarrow$ $\exists$k:$\mathbb{N}$.$\exists$t$\in$$\text{split}^k$(x,s). z$\in$ext(t)
5. Splitting nur endlich oft durchführbar (Wohlfundiertheit)
   – $\forall$x:D.$\forall$s:S. I(x)$\wedge$J(x,s) $\Rightarrow$ $\exists$k:$\mathbb{N}$. $\text{split}^k$(x,s)=$\emptyset$

Die ersten 4 Axiome kennzeichnen eine Globalsuchtheorie. Ein Filter ist ein Wohlfundiertheitsfilter, wenn $\text{split}_\Phi$ $\equiv$ $\lambda$x,s.{t | t$\in$split(x,s)$\wedge\Phi$(x,t)} das Axiom 5 erfüllt.

4.3–a Wir zeigen, daß gs_sequences_over_finite_set($\alpha$) ist eine Globalsuchtheorie ist, indem wir die ersten 4 Axiome überprüfen.

1. $\forall$S:Set($\alpha$). true $\Rightarrow$ range([])$\subseteq$S
   Dies folgt unmittelbar aus Lemma B.2.22.1 und B.1.13.1
2. $\forall$S,V:Set($\alpha$). true $\wedge$ range(V)$\subseteq$S $\Rightarrow$ $\forall$W$\in${V·i | i$\in$S}. W$\subseteq$S
   Umwandlung mit Lemma B.1.11.5 ergibt
   ... range(V)$\subseteq$S $\Rightarrow$ $\forall$i$\in$S.range(V·i)$\subseteq$S
   Dies folgt mit Lemma B.2.22.5 und B.1.13.3
3. $\forall$S,L:Set($\alpha$). true $\wedge$ range(L)$\subseteq$S $\Rightarrow$ []$\sqsubseteq$L
   Dies folgt mit Lemma B.2.10.1
4. $\forall$S,V,L:Set($\alpha$). true $\wedge$ range(V)$\subseteq$S $\wedge$ range(L)$\subseteq$S
   $\Rightarrow$ V$\sqsubseteq$L $\Leftrightarrow$ $\exists$k:$\mathbb{N}$.$\exists$W$\in$($\lambda$S,V.{V·i|i$\in$S}$)^k$(S,V). L$\in${W}
   Durch Induktion kann man zeigen:
   ($\lambda$S,V.{V·i|i$\in$S}$)^k$(S,V) = {V$\circ$U | range(U)$\subseteq$S$\wedge$|U|=k}
   Damit bleibt zu zeigen
   ... V$\sqsubseteq$L $\Leftrightarrow$ $\exists$k:$\mathbb{N}$.$\exists$U:Seq($\alpha$). range(U)$\subseteq$S$\wedge$|U|=k$\wedge$L=V$\circ$U
   Dies folgt nun mit Lemma B.2.10.8.

4.3–b $\Phi_1$:=$\lambda$S,V.|V|$\leq$k: Es ist $\text{split}_\Phi$(S,V) = {V·i|i$\in$S$\wedge$|V·i|$\leq$k}

Zu zeigen ist $\forall$S,V:Set($\alpha$). true $\wedge$ range(V)$\subseteq$S $\Rightarrow$ $\exists$k:$\mathbb{N}$.$\text{split}_\Phi{}^k$(S,V)=$\emptyset$

Durch Induktion zeige man:

$\forall$j:$\mathbb{N}$. $\text{split}_\Phi{}^j$(S,V) = {V$\circ$W | range(W)$\subseteq$S$\wedge$|W|=j$\wedge$|V|$\leq$k-j}

Wählt man nun j:=k-|V|+1 so ist

$\text{split}_\Phi{}^j$(S,V) = {V$\circ$W | range(W)$\subseteq$S$\wedge$|W|=j$\wedge$|V|$\leq$|V|-1} = $\emptyset$

4.3–c $\Phi_2$`:=`$\lambda$`S,V.|V|`$\leq$`k*|S|`: Es ist $\mathtt{split}_\Phi\mathtt{(S,V)} = \{\mathtt{V{\cdot}i} \mid \mathtt{i} \in \mathtt{S} \wedge \mathtt{|V{\cdot}i|} \leq \mathtt{k*|S|}\}$

Durch Induktion zeige man:

$$\forall \mathtt{j}:\mathbb{N}.\ \mathtt{split}_\Phi{}^{\mathtt{j}}\mathtt{(S,V)} = \{\mathtt{V}\circ\mathtt{W} \mid \mathtt{range(W)} \subseteq \mathtt{S} \wedge \mathtt{|W|=j} \wedge \mathtt{|V|} \leq \mathtt{k*|S|-j}\}$$

Wählt man nun `j:=k*|S|-|V|+1` so ist

$$\mathtt{split}_\Phi{}^{\mathtt{j}}\mathtt{(S,V)} = \{\mathtt{V}\circ\mathtt{W} \mid \mathtt{range(W)} \subseteq \mathtt{S} \wedge \mathtt{|W|=j} \wedge \mathtt{|V|} \leq \mathtt{|V|-1}\} = \emptyset$$

4.3–d $\Phi_3$`:=`$\lambda$`S,V.nodups(V)`: Es ist $\mathtt{split}_\Phi\mathtt{(S,V)} = \{\mathtt{V{\cdot}i} \mid \mathtt{i} \in \mathtt{S} \wedge \mathtt{nodups(V{\cdot}i)}\}$

Durch Induktion zeige man:

$$\forall \mathtt{j}:\mathbb{N}.\ \mathtt{split}_\Phi{}^{\mathtt{j}}\mathtt{(S,V)} = \{\mathtt{V}\circ\mathtt{W} \mid \mathtt{range(W)} \subseteq \mathtt{S} \wedge \mathtt{|W|=j} \wedge \mathtt{nodups(V}\circ\mathtt{W)}\}$$

Aus den Eigenschaften von `nodups`, $\circ$, `range` und $\subseteq$ folgt (da $\mathtt{range(V)} \cup \mathtt{range(W)} \subseteq \mathtt{S}$):

$$\mathtt{|V|+|W|} = \mathtt{|V}\circ\mathtt{W|} = \mathtt{|range(V}\circ\mathtt{W)|} = \mathtt{|range(V)} \cup \mathtt{range(W)|} \leq \mathtt{|S|},$$

und damit

$$\forall \mathtt{j}:\mathbb{N}.\ \mathtt{split}_\Phi{}^{\mathtt{j}}\mathtt{(S,V)} = \{\mathtt{V}\circ\mathtt{W} \mid \mathtt{range(W)} \subseteq \mathtt{S} \wedge \mathtt{|W|=j} \wedge \mathtt{nodups(V}\circ\mathtt{W)} \wedge \mathtt{|V|} \leq \mathtt{|S|-j}\}$$

Wählt man nun `j:=|S|-|V|+1` so ist

$$\mathtt{split}_\Phi{}^{\mathtt{j}}\mathtt{(S,V)} = \{\mathtt{V}\circ\mathtt{W} \mid \mathtt{range(W)} \subseteq \mathtt{S} \wedge \mathtt{|W|=j} \wedge \mathtt{nodups(V}\circ\mathtt{W)} \wedge \mathtt{|V|} \leq \mathtt{|V|-1}\}$$
$$= \emptyset$$

4.3–e Den Beweis, daß `gs_subsets_of_a_finite_set(`$\alpha$`)` eine wohlfundierte Globalsuchtheorie ist, wollen wir nur kurz skizzieren.

1. Zu zeigen ist $\mathtt{empty?(}\emptyset \cap \alpha \mathtt{S)} \wedge \emptyset \cup \mathtt{S} \subseteq \mathtt{S}$, was elementare Mengeneigenschaften sind.
2. $\mathtt{empty?(U} \cap \alpha \mathtt{V)} \wedge \mathtt{U} \cup \mathtt{V} \subseteq \mathtt{S}$
   $\Rightarrow \forall \mathtt{a} \in \mathtt{V}.\ \mathtt{empty?(U+a} \cap \alpha \mathtt{V-a)} \wedge \mathtt{U+a} \cup \mathtt{V-a} \subseteq \mathtt{S} \quad \wedge \quad \mathtt{empty?(U} \cap \alpha \mathtt{V-a)} \wedge \mathtt{U} \cup \mathtt{V-a} \subseteq \mathtt{S}$
   Auch dies ist eine Standardeigenschaft von Vereinigung, Durchschnitt, Mengenaddition und Elemententfernung.
3. $\mathtt{T} \subseteq \mathtt{S} \Rightarrow \emptyset \subseteq \mathtt{T} \wedge \mathtt{T} \subseteq \emptyset \cup \mathtt{S}$ ist trivial
4. Es ist $\mathtt{split}^{\mathtt{j}}\mathtt{(S,U,V)} = \{\langle \mathtt{U} \cup \mathtt{X},\ \mathtt{V} \setminus \mathtt{W} \rangle \mid \mathtt{W} \subseteq \mathtt{V} \wedge \mathtt{X} \subseteq \mathtt{W} \wedge \mathtt{|W|=j}\}$
   Es gilt $\mathtt{empty?(V} \setminus \mathtt{W)}$ genau dann, wenn `W=V` ist. Zu zeigen bleibt
   $$\mathtt{empty?(U} \cap \alpha \mathtt{V)} \wedge \mathtt{U} \cup \mathtt{V} \subseteq \mathtt{S} \wedge \mathtt{T} \subseteq \mathtt{S} \Rightarrow \mathtt{U} \subseteq \mathtt{T} \wedge \mathtt{T} \subseteq \mathtt{U} \cup \mathtt{V} \Leftrightarrow \exists \mathtt{k}:\mathbb{N}.\mathtt{T} \in \{\mathtt{U} \cup \mathtt{X} \mid \mathtt{X} \subseteq \mathtt{V}\}$$
   Auch dies ist nun eine Standardeigenschaft.
5. Es ist $\mathtt{split}^{\mathtt{k}}\mathtt{(S,U,V)} = \emptyset$ genau dann, wenn `j>|V|` ist. In diesem Fall ist nämlich die Bedingung $\mathtt{W} \subseteq \mathtt{V}$ unerfüllbar.